Глава 11

Устойчивость движения

Механика изучает реальные объекты, создавая их модели. При разработке механической модели обычно не принимают во внимание различные малые возмущения и несовершенства конструкции, так как их учет приводит к чрезмерному усложнению задачи.

Движения механических моделей, как правило, описывают решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Однако для реального объекта практически невозможно добиться точного выполнения начальных условий.

Рассмотрим, например, движение материальной точки массой m по поверхности цилиндра под действием силы веса $P = mg$. Это движение можно описать с помощью уравнений Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат выберем цилиндрические координаты φ и z (рис. 11.1). Ввиду того, что точка находится на поверхности цилиндра, ее третья координата r во все время

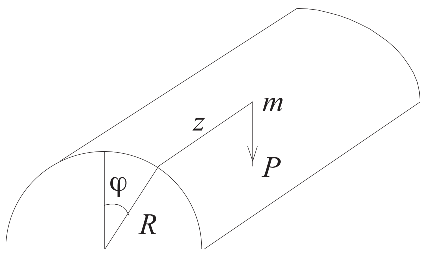

Рис. 11.1. Материальная точка на поверхности цилиндра.

движения равна радиусу цилиндра R. Подставив выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$T = mv^2/2 = m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)/2, \quad \Pi = PR\cos\varphi$$

в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

получим уравнения движения материальной точки:

$$R\ddot{\varphi} - g\sin\varphi = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

При начальных условиях

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = v_0 \tag{11.1}$$

уравнения имеют решение

$$\varphi = 0, \quad z = v_0 t + z_0, \tag{11.2}$$

соответствующее движению точки по верхней образующей цилиндра с постоянной скоростью v_0.

Реализовать это движение на практике невозможно из-за неправильностей формы реального цилиндра и малых внешних возмущений (вибрации, движение воздуха и т. п.), которые не позволяют добиться точного выполнения начальных условий (11.1). Если, несмотря на это, предположить, что каким-то случайным образом начальные условия (11.1) оказались выполнены, то в дальнейшем за счет неправильностей и возмущений неизбежно произойдет отклонение реального движения от прямолинейного движения с постоянной скоростью.

Малые изменения начальных условий могут привести лишь к малому изменению решения на небольших промежутках времени, но на большом промежутке времени решение может существенно измениться. Решение, обладающее таким свойством, называются неустойчивым. Неустойчивые решения удовлетворительно описывают реальное движение лишь на малых промежутках времени. Решение (11.2) является неустойчивым, в чем легко убедится, пытаясь прокатить шарик по верхней части цилиндра.

В частном случае $v_0 = 0$ решение (11.2) описывает неустойчивое положение равновесия. Даже при малом изменении начального условия $\varphi(0) = 0$, материальная точка, двигаясь по поверхности цилиндра, далеко уйдет от положения равновесия, если время ее движения будет достаточно велико.

Решение называется устойчивым в том случае, когда малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям решения на любом промежутке времени. Для описания реальных движений на больших промежутках времени годятся только устойчивые решения. Таким образом, исследование устойчивости решений задач механики необходимо для выяснения возможности их практической реализации.

11.1. Определение устойчивости. Теоремы Ляпунова

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{z}_k = F_k(z_1, z_2, \ldots, z_m, t), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11.3}$$

Если к такой системе свести уравнения Лагранжа второго рода, то $m = 2n$, где n — число степеней свободы.

Пусть $z_k = f_k(t)$ — решение системы (11.3). Функции $x_k = z_k - f_k$ называются отклонениями. Подставив $z_k = f_k + x_k$ в (11.3), получим систему уравнений для определения отклонений

$$\dot{x}_k = \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, t), \tag{11.4}$$

где

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_m, t) = F_k(f_1 + x_1, \ldots, f_m + x_m, t) - F_k(f_1, \ldots, f_m, t).$$

Очевидно, что $\Phi_k(0, 0, \ldots, 0, t) = 0$, поэтому система (11.4) имеет нулевое решение $x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 1

Решение $z_k = f_k(t)$ системы (11.3) называется устойчивым, если устойчиво нулевое решение системы (11.4), т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x_k(0)| < \delta$ для любых $t > 0$ выполняются неравенства $|x_k(t)| < \varepsilon$.

Точку m-мерного пространства с координатами x_1, x_2,..., x_m называют изображающей точкой, а множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_k| < \delta$, — δ-окрестностью начала координат. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует δ-окрестность начала координат такая, что изображающая точка никогда не выйдет за пределы ε-окрестности, если в момент времени $t = 0$ она находилась внутри δ-окрестности. Тогда нулевое решение системы (11.4) будет устойчиво.

Решение $f_k(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $x_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Определение 2

Производная функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, вычисленная по формуле

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial x_k} \Phi_k,$$

называется производной v в силу уравнений $\dot{x}_k = \Phi_k$.

Первая теорема Ляпунова

Пусть автономная система уравнений

$$\dot{x}_k = \Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{11.5}$$

имеет нулевое решение. Если существует непрерывно дифференцируемая функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, имеющая строгий экстремум в начале координат, производная которой в силу уравнений (11.5) имеет в этой точке экстремум противоположного типа, то нулевое решение системы (11.5) будет устойчиво. Функцию v называют функцией Ляпунова.

Доказательство

Предположим, что функция v имеет в начале координат строгий минимум, равный v_0. Тогда функция $u = v - v_0$ имеет в начале координат строгий минимум, равный нулю. Это означает, что существует $\Delta_1 > 0$ такое, что $u \geqslant 0$ при $|x_k| < \Delta_1$, причем в Δ_1-окрестности $u = 0$ только при $x_k = 0$.

В этом случае по условию теоремы производная dv/dt в силу уравнений (11.5) имеет максимум в начале координат. В этой точке $dv/dt = 0$, так как $\Phi_k(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Ввиду того, что $dv/dt = du/dt$, существует Δ_2-окрестность начала координат, в которой $du/dt \leqslant 0$.

Выберем $\varepsilon < \min(\Delta_1, \Delta_2)$. В области $|x_k(t)| < \varepsilon$ выполняется неравенство $du/dt \leqslant 0$, поэтому функция u не возрастает при увеличении t, и для любого $t > 0$

$$u(t) = u[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)] \leqslant u[x_1(0), x_2(0), \ldots, x_m(0)] = u_0, \tag{11.6}$$

Граница ε-окрестности является ограниченным замкнутым множеством, на котором непрерывная функция u достигает своего наименьшего значения u_*, причем $u_* > 0$, так как на границе все значения функции u положительны.

С другой стороны, поскольку непрерывная функция u равна нулю в начале координат, существует δ-окрестность, в которой $u < u_*$. Если $|x_k(0)| < \delta$, то $u_0 < u_*$ и из неравенства (11.6) следует, что

$$u(t) < u_* \tag{11.7}$$

для любого $t > 0$.

Предположим, что изображающая точка, которая при $t = 0$ находилась в δ-окрестности начала координат, вышла за пределы ε-окрестности. Тогда в некоторый момент времени $t = t_*$ она пересечет границу ε-окрестности, на которой $u \geqslant u_*$ (для случая $m = 2$ траектория движения изображающей точки показана на рис. 11.2). Следовательно, $u(t_*) \geqslant u_*$, что противоречит неравенству

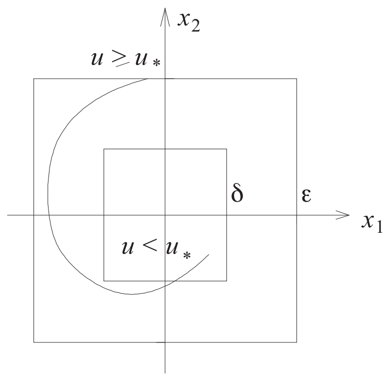

Рис. 11.2. Траектория движения изображающей точки.

(11.7). Это означает, что при условии $|x_k(0)| < \delta$ изображающая точка не может выйти за пределы ε-окрестности, т. е. для любого $t > 0$ выполняются неравенства $|x_k(t)| < \varepsilon$.

Если функция v имеет в начале координат строгий максимум, то следует выбрать $u = v_0 - v$. Тогда функция u в начале координат будет имеет равный нулю строгий минимум, а du/dt — равный нулю максимум и доказательство устойчивости нулевого решения не отличается от доказательства в случае, когда функция v имеет в начале координат строгий минимум,

Замечание 1

Если $v(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — интеграл системы (11.5), то производная dv/dt тождественно равна нулю, поэтому в начале координат функция dv/dt имеет нестрогий экстремум, который можно считать и максимумом и минимумом. Следовательно, интеграл v, имеющий в начале координат строгий экстремум, является функцией Ляпунова.

Замечание 2

Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия, доказанная в первом разделе девятой главы, вытекает из первой теоремы Ляпунова. Действительно, пусть потенциальная энергия консервативной системы $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ имеет строгий минимум в начале координат. Тогда интеграл энергии $T + \Pi$ имеет строгий минимум в начале координат $2n$-мерного фазового пространства, координатами точек которого являются обобщенные координаты q_j и обобщенные скорости $\dot{q}_j$. В соответствии с замечанием 1 нулевое решение $q_k = \dot{q}_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ уравнений Лагранжа второго рода, являющееся положением равновесия, устойчиво.

Вторая теорема Ляпунова

Если выполнены условия первой теоремы Ляпунова и, кроме того, экстремум функции dv/dt в начале координат является строгим, то нулевое решение системы (11.5) асимптотически устойчиво.

Доказательство

Пусть функция v имеет в начале координат строгий минимум $v = v_0$, а $|x_k(0)| < \delta$, где δ выбрано так же, как при доказательстве первой теоремы Ляпунова. Тогда для любых $t > 0$ изображающая точка находится в ε-окрестности начала координат, а для функции $u = v - v_0$ и ее производной du/dt выполняются неравенства $u \geqslant 0$ и $du/dt \leqslant 0$, причем $u = 0$ и $du/dt = 0$ только при $x_k = 0$.

Функция u не возрастает, поэтому $u \leqslant u_0$, где u_0 — значение u при $t = 0$. Обозначим

$$u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t).$$

Докажем, что $u_\infty = 0$. Предположим, что $u_\infty > 0$. Тогда из непрерывности функции u и равенства $u(0, \ldots, 0) = 0$ вытекает существование числа δ_1 такого, что $u < u_\infty$ при $|x_k| < \delta_1$. Ввиду того, что $u_\infty \leqslant u \leqslant u_0$, изображающая точка может находиться только в области G, где $\delta_1 \leqslant |x_k| \leqslant \varepsilon$. На рис. 11.3, соответствующем $m = 2$, область G заштрихована.

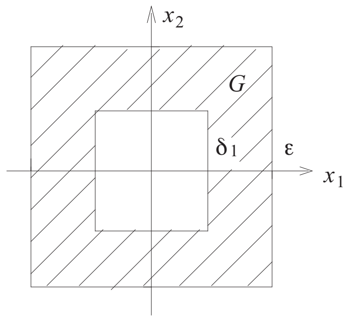

Рис. 11.3. Область G.

В ограниченной замкнутой области G непрерывная функция du/dt принимает максимальное значение h, причем $h < 0$, так как функция $du/dt \leqslant 0$ и обращается в нуль только в начале координат. Следовательно,

$$du/dt \leqslant h < 0, \quad u \leqslant ht + u_0,$$

где $u_0 = u(0) > 0$. При $t > -u_0/h$ функция u становится отрицательной, что противоречит условию $u \geqslant 0$. Тем самым доказано, что $u \to 0$ при $t \to \infty$. Равенство $u = 0$ выполняется только в начале координат, поэтому при $t \to \infty$ изображающая точка стремится к началу координат. Это означает, что $x_k \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. нулевое решение системы (11.5) асимптотически устойчиво.

11.2. Устойчивость вращений твердого тела вокруг неподвижной точки

Уравнения Эйлера, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки при отсутствии внешних сил

$$\begin{aligned} A\dot\omega_x &= (B - C)\omega_y\omega_z, \\ B\dot\omega_y &= (C - A)\omega_x\omega_z, \\ C\dot\omega_z &= (A - B)\omega_x\omega_y, \end{aligned}$$

имеют три частных решения

$$\begin{aligned} &1)\ \omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = \omega_z = 0, \\ &2)\ \omega_y = \omega_0, \quad \omega_x = \omega_z = 0, \\ &3)\ \omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = \omega_y = 0, \end{aligned}$$

которым соответствуют вращения твердого тела вокруг главных осей инерции с постоянной угловой скоростью ω_0.

Предположим, что главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам

$$A > B > C,$$

и выясним вопрос об устойчивости первого решения. Для этого введем отклонения x_k по формулам

$$x_1 = \omega_x - \omega_0 = 0, \quad x_2 = \omega_y, \quad x_3 = \omega_z.$$

Система уравнений для определения отклонений имеет вид

$$\begin{aligned} A\dot x_1 &= (B - C)x_2x_3, \\ B\dot x_2 &= (C - A)(x_1 + \omega_0)x_3, \\ C\dot x_3 &= (A - B)(x_1 + \omega_0)x_2. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Из замечания 1 к первой теореме Ляпунова следует, что интеграл системы уравнений (11.8), имеющий строгий экстремум, будет функцией Ляпунова. Если такой интеграл удастся найти, то первое решение будет устойчиво.

Наряду с интегралом энергии

$$2T = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = A(x_1 + \omega_0)^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2,$$

интегралом системы (11.8) будет функция

$$u = 2T - A\omega_0^2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2A\omega_0 x_1,$$

которая обращается в нуль в начале координат. Интегралом будет и u^2, так как

$$\frac{du^2}{dt} = 2u\frac{du}{dt} = 0.$$

Функция u^2 имеет минимум в начале координат, но этот минимум нестрогий из-за того, что u^2 обращается в нуль на эллипсоиде, заданном уравнением

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2A\omega_0 x_1 = 0$$

и проходящим через начало координат.

Умножив второе и третье уравнения системы (11.8) на $(A-B)x_2$ и $(A-C)x_3$ соответственно, сложив их и проинтегрировав полученное равенство, найдем еще один интеграл

$$w = B(A-B)x_2^2 + C(A-C)x_3^2.$$

Функция w имеет нестрогий минимум $w = 0$ в начале координат, поскольку она равна нулю на оси Ox_1.

Интеграл системы (11.8)

$$v = u^2 + w$$

обращается в нуль в тех точках, где одновременно равны нулю функции u^2 и w, а именно при

$$x_2 = x_3 = 0, \quad Ax_1^2 + 2A\omega_0 x_1 = 0.$$

Таким образом, имеются только две точки с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = -2\omega_0$, $x_2 = x_3 = 0$, в которых $v = 0$. Следовательно, интеграл v имеет в начале координат строгий минимум, и решение уравнений Эйлера

$$\omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = \omega_z = 0$$

устойчиво.

Аналогичным образом можно показать, что устойчиво третье решение. Второе решение неустойчиво. Для доказательства этого утверждения надо использовать теоремы о неустойчивости решений, которые здесь не рассматриваются.

11.3. Устойчивость по линейному приближению

Автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = \Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \Phi_j(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{11.9}$$

имеет нулевое решение. Разложив правые части уравнений в ряды по степеням x_1, x_2,…, x_m, получим

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_k + f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

где

$$a_{jk} = \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right)_0,$$

частные производные вычисляются при $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$, а разложение в ряд функций f_j начинается с членов второго порядка.

Система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \tag{11.10}$$

называется линейным приближением для системы (11.9). Запишем эту систему в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T,$$

где A квадратная матрица с коэффициентами a_{jk}. Подстановка в систему (11.10) решения $\mathbf{x} = \mathbf{u}e^{\lambda t}$ дает систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u}$ — вектор с числовыми компонентами, E — единичная матрица. Эта система имеет нетривиальное решение, если

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{11.11}$$

Пусть λ_1, λ_2,…, λ_m — корни уравнения (11.11), а $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,…, $\mathbf{u}_m$ соответствующие им нетривиальные решения. Числа λ_k и векторы $\mathbf{u}_k$ являются собственными значениями и собственными векторами матрицы A, так как

$$A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k. \tag{11.12}$$

В случае $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$ общее решение системы (11.10) имеет вид

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t},$$

где C_k — произвольные постоянные.

Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{11.13}$$

т. е. вещественные части корней λ_k отрицательны. Тогда $\mathbf{x} \to 0$ при $t \to \infty$, и нулевое решение системы (11.10) асимптотически устойчиво.

При наличии кратных собственных значений система (11.10) имеет решения $x_j = t^{p_j} e^{\lambda_k t}$, где p_j — целое неотрицательное число. И в этом случае $\mathbf{x} \to 0$ при $t \to \infty$, если выполнено условие (11.13).

Теорема об устойчивости по линейному приближению

Из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11.10) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (11.9).

Доказательство

Докажем теорему для частного случая симметричной матрицы A. Запишем систему (11.9) в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T. \tag{11.14}$$

Разложение в ряд вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в окрестности начала координат начинается с членов второго порядка.

Собственные значения λ_k симметричной матрицы A вещественны. Ее собственные векторы $\mathbf{u}_k$, соответствующие разным λ_k, ортогональны, поэтому существует ортонормированная система собственных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,…,$\mathbf{u}_m$. Подставим в систему (11.14)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} z_i \mathbf{u}_i,$$

где z_i — новые переменные. С учетом формул (11.12) получим

$$\sum_{i=1}^{m} \dot{z}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m} z_i A\mathbf{u}_i + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} z_i \lambda_i \mathbf{u}_i + \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Скалярное умножение последнего векторного равенства на $\mathbf{u}_k$ благодаря ортонормированности собственных векторов дает уравнения

$$\dot{z}_k = \lambda_k z_k + g_k(z_1, z_2, \ldots, z_m), \quad g_k = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11.15}$$

Разложение в ряд функций g_k в окрестности начала координат начинается с членов второго порядка, так как переменные x_j являются линейными комбинациями переменных z_k.

По условию теоремы нулевое решение системы (11.10) устойчиво, поэтому $\lambda_k < 0$. Функция

$$v = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k^2,$$

имеет при $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = 0$ строгий максимум, так как $v < 0$ и обращается в нуль только в начале координат.

Производная функции v в силу уравнений (11.15)

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k \dot{z}_k = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k^2 z_k^2 + \lambda_k z_k g_k)$$

положительна в достаточно малой окрестности начала координат, так как в этой окрестности ее знак определяется слагаемыми $\lambda_k^2 z_k^2$, и равна нулю только в начале координат. Следовательно, функция dv/dt имеет в начале координат строгий минимум, и в силу второй теоремы Ляпунова нулевое решение системы (11.15) асимптотически устойчиво. Ввиду того, что переменные z_k и x_j связаны между собой линейным преобразованием, асимптотически устойчивым является и нулевое решение системы (11.9).

11.4. Критерии асимптотической устойчивости

Теорема об устойчивости по линейному приближению сводит вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения автономной системы дифференциальных уравнений к вопросу о знаке вещественных частей корней алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами. Критерии асимптотической устойчивости дают необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней такого уравнения.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0, \tag{11.16}$$

где a_k — вещественные числа. Без ограничения общности будем считать, что $a_0 > 0$. Полином $f(\lambda)$ называют устойчивым, если все его корни имеют отрицательные вещественные части.

Пусть λ_1, λ_2,…, λ_p — вещественные корни уравнения (11.16), а $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$,…, $\alpha_q \pm i\beta_q$ — его комплексные корни. Тогда

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a_0(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_p)(\lambda-\alpha_1+i\beta_1)(\lambda-\alpha_1-i\beta_1)\cdots(\lambda-\alpha_q+i\beta_q)(\lambda-\alpha_q-i\beta_q) = \\ &= a_0(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_p)(\lambda^2-2\lambda\alpha_1+\alpha_1^2+\beta_1^2)\cdots(\lambda^2-2\lambda\alpha_q+\alpha_q^2+\beta_q^2) \end{aligned}$$

Если все корни уравнения (11.16) имеют отрицательные вещественные части, т. е. $\lambda_j < 0$, $\alpha_k < 0$, то из последней формулы вытекает, что коэффициенты a_1, a_2,…, a_m положительны, так как являются произведениями положительных чисел. Условие положительности коэффициентов полинома является необходимым условием его устойчивости. Покажем, что при $m > 2$ положительность коэффициентов не является достаточным условием выполнения неравенств (11.13). Для этого рассмотрим кубическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 = 0,$$

имеющее корень $\lambda_1 = -2$. По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1.$$

Следовательно, $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$, и, по крайней мере, один из корней уравнения имеет положительную вещественную часть.

Определитель

$$R_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{vmatrix},$$

имеющий порядок m, называется определителем Гурвица. В первой строчке определителя R_m расположены коэффициенты уравнения (11.16) с нечетными индексами, а во второй — с четными индексами. Концы строчек заполнены нулями. Третья и четвертая строчки получены сдвигом первой и второй строчек на одну позицию вправо, причем первыми элементами этих строчек являются нули. Пятая строчка, начинающаяся с двух нулей, получена сдвигом третьей строчки на одну позицию вправо и т. д. На главной диагонали определителя находятся коэффициенты a_1, a_2,..., a_m.

Определители Гурвица для частных значений m имеют вид

$$R_1 = |a_1|, \quad R_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad R_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad R_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Критерий Рауса-Гурвица

Для того, чтобы все корни уравнения (11.16) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_m = R_m.$$

представляют собой миноры, расположенные в левом верхнем углу определителя Гурвица.

Если $m = 1$, то условия Рауса-Гурвица выполнены при $a_1 > 0$. В случае $m = 2$

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2,$$

и критерий Рауса-Гурвица справедлив, если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Следовательно, при $m < 3$ положительность коэффициентов уравнения является достаточным условием для выполнения неравенств (11.13).

Для практического применения более удобными являются необходимые и достаточные условия устойчивости полинома, полученные Льенаром и Шипаром.

Критерий Льенара-Шипара

Все корни уравнения (11.16) имеют отрицательные вещественные части, если коэффициенты a_1, a_2,..., a_m положительны и выполняются неравенства

$$\Delta_{m-1} > 0, \quad \Delta_{m-3} > 0, \ldots,$$

где Δ_k — миноры определителя Гурвица.

В случае $m = 3$ критерий Льенара-Шипара эквивалентен неравенствам

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Пример

Используя критерий Льенара-Шипара, покажем, что корни уравнения

$$\lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

имеют отрицательные вещественные части.

Для рассматриваемого примера $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 11$, $a_4 = 7$, $a_5 = 2$. Коэффициенты уравнения положительны, поэтому достаточно проверить выполнение условий $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Вычисляя определители, получаем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 39.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 33 & 0 \\ 5 & 11 & 2 \\ 1 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 6(160 + 29).$$

Следовательно, все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части.

11.5. Критерий Эрмита-Михайлова

Чтобы сформулировать критерий устойчивости Эрмита-Михайлова, запишем полином (11.16) в виде

$$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m),$$

и введем функцию

$$f(i\omega) = a_0(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)\cdots(i\omega - \lambda_m),$$

где ω — вещественное число. Пусть

$$\varphi(\omega) = \arg f(i\omega),$$

где $\arg z$ — аргумент комплексного числа z, равный углу между вектором этого числа на комплексной плоскости и вещественной осью (рис. 11.4).

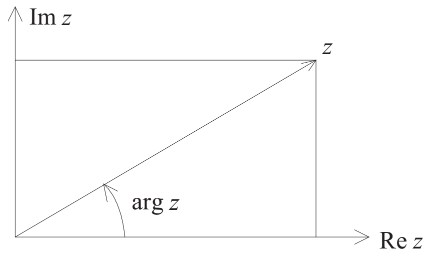

Рис. 11.4. Комплексная плоскость.

Аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, поэтому

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \arg(i\omega - \lambda_k).$$

Обозначим $\Delta\varphi(\omega)|_{-\infty}^{+\infty}$ приращение функции $\varphi(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда

$$\Delta\varphi(\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{m} \Delta \arg(i\omega - \lambda_k)|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{11.17}$$

Величина приращения $\Delta \arg(i\omega-\lambda_k)|_{-\infty}^{+\infty}$ зависит от знака $\operatorname{Re}\lambda_k$. На рис. 11.5$a$ изображен вектор числа $i\omega - \lambda_k$ в случае $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. При измении ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора скользит снизу вверх по прямой $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re}\lambda_k$, а вектор поворачивается против часовой стрелки на угол π, поэтому

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_k)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

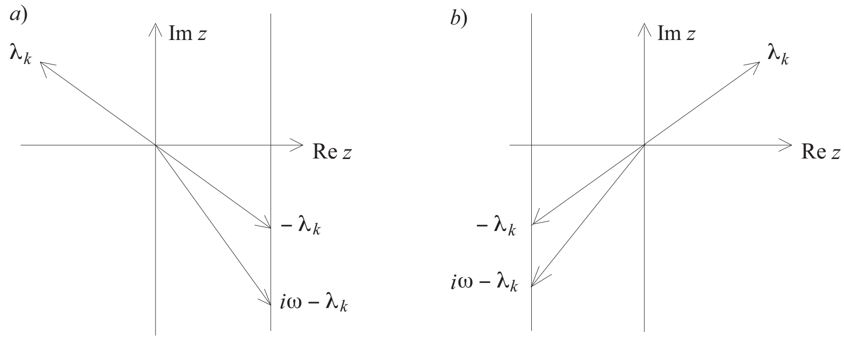

Рис. 11.5. Вектор числа $i\omega - \lambda_k$.

Если вещественная часть λ_k положительна (рис. 11.5b), то прямая $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ находится слева от начала координат. В этом случае при увеличении ω от $-\infty$ до $+\infty$ аргумент числа $i\omega - \lambda_k$ уменьшается от $-\pi/2$ до $-3\pi/2$ и, следовательно,

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_k)|_{-\infty}^{+\infty} = -\pi.$$

Предположим, что полином $f(\lambda)$ имеет p корней с отрицательной вещественной частью и q корней с положительной вещественной частью, причем $p+q=m$. Принимая во внимание формулу (11.17), получаем

$$\Delta\varphi(\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi(p-q).$$

Если все корни имеют отрицательные вещественные части, то $p=m$, $q=0$ и

$$\Delta\varphi(\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi m. \tag{11.18}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости полинома $f(\lambda)$ является равенство (11.18). Последнее утверждение носит название критерия Эрмита-Михайлова.

Полином $f(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. На рис. 11.6 изображена кривая на комплексной плоскости, которую описывет конец вектора

$$f(i\omega) = u + iv, \quad u = \operatorname{Re} f(i\omega) = 2 - \omega^2, \quad v = \operatorname{Im} f(i\omega) = 3\omega$$

при увеличении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Эта кривая называется годографом вектора $f(i\omega)$. Для рассмат-

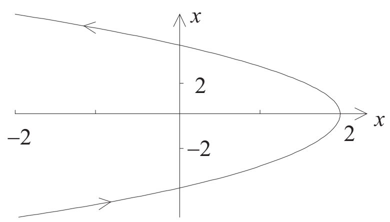

Рис. 11.6. Годограф вектора $f(i\omega)$.

риваемого примера годограф $f(i\omega)$ представляет собой параболу, так как $u = 2 - v^2/9$. Стрелки на рис. 11.6 показывают направление движения конца вектора $f(i\omega)$ при увеличении ω.

Ввиду того, что $v/u \to 0$ при $\omega \to -\infty$, справедливо равенство $\varphi(-\infty) = -\pi$. С возрастанием ω функция $\varphi(\omega)$ растет и при $\omega = +\infty$ достигает значения π. Поэтому

$$\Delta\varphi(\omega)|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi,$$

что соответствует наличию у рассматриваемого квадратного уравнения двух корней с отрицательной вещественной частью.

Годограф вектора $f(i\omega)$, изображенный на рис. 11.6, симметричен относительно вещественной оси. Эта симметрия имеет место и в общем случае, так как $f(-i\omega)$ и $f(i\omega)$ являются комплексно сопряженными числами. Поэтому равенство (11.18) эквивалентно условию

$$\Delta\varphi(\omega)|_0^{\infty} = \frac{\pi m}{2}.$$

Упражнение
Показать, что для полинома $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$ имеет место равенство

$$\Delta\varphi(\omega)|_0^{\infty} = \frac{5\pi}{2}.$$

11.6. Регулятор Уатта

Регулятор Уатта был изобретен английским механиком Джеймсом Уаттом и предназначен для обеспечения постоянства угловой скорости вращения паровой машины. С целью стабилизации угловой скорости он устанавливается на паровых и гидравлических турбинах, на дизельных двигателях и других технических устройствах. Схема одной из возможных конструкций регулятора Уатта изображена на рис. 11.7. Рабочее вещество (пар, вода, дизельное топливо) поступает по трубопроводу в машину (турбину, двигатель) и создает момент, вращающий вал. Так, например, в паровой турбине вращающий момент возникает при действии струи пара на лопатки турбины.

Регулятор Уатта, состоит из двух одинаковых грузов массой m, которые могут скользить по горизонтальному стержню, прикрепленному к валу. Грузы соединены с валом пружинами жесткости c и двумя стержнями прикреплены к муфте, которая может перемещаться вдоль вала. Муфта,

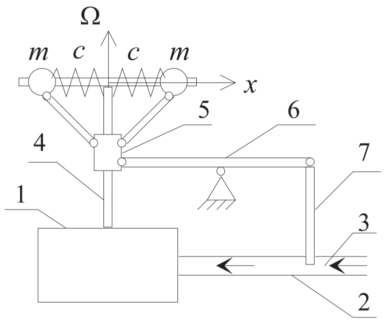

Рис. 11.7. Регулятор Уатта: 1 — машина, 2 — трубопровод,
3 — рабочее вещество, 4 — вал, 5 — муфта, 6 — рычаг, 7 — заслонка.

в свою очередь, при помощи рычага соединена с заслонкой, регулирующей поступление рабочего вещества в машину.

Предположим, что вал вращается с угловой скоростью Ω. Если угловая скорость возрастет то возрастет центробежная сила, действующая на грузы, и расстояние между ними увеличится. Это приведет к тому, что муфта поднимется вверх, заслонка опустится вниз, поступление рабочего вещества уменьшится и угловая скорость снизится. Такой способ регулирования называется отрицательной обратной связью.

Для определения угловой скорости Ω используем уравнение, описывающее вращение твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$J\dot{\Omega} = M[u(x)] - G, \tag{11.19}$$

где J — момент инерции твердого тела, состоящего из вала, вращающейся части машины и регулятора Уатта, M — момент, создаваемый с помощью рабочего вещества, u и x — перемещения заслонки и груза. Момент G равен моменту полезной нагрузки. Для турбины полезной нагрузкой может быть электрический генератор. Постоянство угловой скорости вращения генератора имеет большое значение, так как оно обеспечивает неизменность частоты переменного тока в электрической сети.

Момент инерции J зависит от x, так как от x зависят моменты инерции J_m грузов массой m. Учитывая, что $J_m \ll J$, пренебрежем моментами инерции грузов и будем считать J постоянной величиной. Конкретный вид функции $M(u)$ определяется конструкцией машины, однако эта функция всегда является убывающей, и, следовательно, $dM/du < 0$.

Уравнение движения груза массой m в подвижной системе координат, жестко связанной с валом, имеет вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c,$$

где $\mathbf{w}_r$ — относительное ускорение, $\mathbf{F}$ — сумма внешних сил, $\mathbf{J}_e$ — сила инерции переносного движения (центробежная сила), $\mathbf{J}_c$ — сила инерции Кориолиса.

Предположим, что кроме силы упругости пружины на груз действует сила сопротивления, пропорциональная скорости движения груза. Спроектировав уравнение движения груза на ось Ox, направленную по оси горизонтального стержня, получим

$$m\ddot{x} + n\dot{x} + cx = m(r + x)\Omega^2.$$

Здесь n — коэффициент сопротивления, r — длина недеформированной пружины, x — смещение груза вдоль оси Ox относительно конца недеформированной пружины. Проекция силы инерции Кориолиса на ось Ox равна нулю. После деления на m уравнение примет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = (r + x)\Omega^2, \tag{11.20}$$

где $2h = n/m$, $\omega^2 = c/m$.

Если задать размеры регулятора, то можно найти зависимость перемещения заслонки u от смещения груза x. Однако в данной задаче нам будет нужно лишь неравенство $du/dx > 0$, которое предполагается выполненным.

Введем переменные

$$z_1 = \Omega, \quad z_2 = x, \quad z_3 = \dot{x}$$

и запишем систему уравнений движения регулятора Уатта (11.19), (11.20) в нормальной форме:

$$J\dot z_1 = M[u(z_2)] - G, \quad \dot z_2 = z_3, \quad \dot z_3 = -2hz_3 - \omega^2 z_2 + (r + z_2)z_1^2. \tag{11.21}$$

Предположим, что система (11.21) имеет стационарное решение

$$z_1 = \Omega_0 > 0, \quad z_2 = x_0, \quad z_3 = 0,$$

соответствующее вращению вала с постоянной угловой скоростью Ω_0. Тогда

$$M[u(x_0)] = G, \quad \omega^2 x_0 = (r + x_0)\Omega_0^2. \tag{11.22}$$

Исследуем устойчивость стационарного решения. Подставив в систему (11.21)

$$z_1 = \Omega_0 + x_1, \quad z_2 = x_0 + x_2, \quad z_3 = x_3,$$

получим систему уравнений для определения отклонений x_1, x_2, x_3:

$$J\dot x_1 = M[u(x_0 + x_2)] - G, \quad \dot x_2 = x_3, \quad \dot x_3 = -2hx_3 - \omega^2(x_0 + x_2) + (r + x_0 + x_2)(\Omega_0 + x_1)^2, \tag{11.23}$$

имеющую нулевое решение.

Принимая во внимание равенства (11.22), учитывая, что

$$M[u(x_0 + x_2)] = M[u(x_0) + u'(x_0)x_2 + \cdots] = M[u(x_0)] + \frac{dM}{du}[u(x_0)]u'(x_0)x_2 + \cdots,$$

и отбрасывая в системе (11.23) нелинейные члены, получаем систему линейного приближения

$$\dot x_1 = -ax_2, \quad \dot x_2 = x_3, \quad \dot x_3 = bx_1 - cx_2 - 2hx_3, \tag{11.24}$$

где

$$a = -\frac{dM}{du}[u(x_0)]\frac{u'(x_0)}{J}, \quad b = 2\Omega_0(r + x_0) > 0, \quad c = \omega^2 - \Omega_0^2,$$

причем $a > 0$, так как $dM/du < 0$, $u' > 0$.

Из определения устойчивости и теоремы об устойчивости по линейному приближению следует, что асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (11.24) обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарного решения системы (11.21). Нулевое решение линейной системы (11.24) асимптотически устойчиво, если все корни ее характеристического уравнения

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -b & c & \lambda + 2h \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2h\lambda^2 + c\lambda + ab = 0,$$

имеют отрицательные вещественные части.

В соответствии с критерием Льенара-Шипара корни уравнения

$$\lambda^3 + 2h\lambda^2 + c\lambda + ab = 0$$

имеют отрицательные вещественные части, если его коэффициенты положительны, и

$$2ch > ab. \tag{11.25}$$

Ввиду того, что $h > 0$, $ab > 0$, а неравенство $c > 0$ следует из неравенства (11.25), стационарное решение будет асимптотически устойчиво, если выполнено условие (11.25), которое можно записать в виде

$$h > \frac{ab}{2c}.$$

Таким образом, для обеспечения устойчивой работы регулятора Уатта коэффициент трения должен быть достаточно большим. Российский механик И.А. Вышнеградский, получивший неравенство (11.25) в 1876 году путем нестрогих рассуждений, кратко сформулировал этот вывод так: "без трения нет регулятора".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М., 1960.
2. *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления. СПб, 2004.

Оглавление