Глава 3

Кинематика относительного движения

3.1. Относительное движение точки

В первой главе рассматривалось движение точки относительно неподвижной системы отсчета. Предположим, что наряду с неподвижной системой отсчета с ортами $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, имеется подвижная система с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ (рис. 3.1).

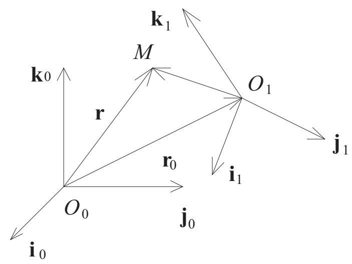

Рис. 3.1. Системы координат для относительного движения.

Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета задается вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где вектор

$$\mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i}_0 + \eta\mathbf{j}_0 + \zeta\mathbf{k}_0$$

определяет положение начала подвижной системы отсчета относительно неподвижной, а вектор

$$\boldsymbol{\rho} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1$$

задает положение точки M относительно подвижной системы отсчета.

Движение точки по отношению к неподвижной системе называется *абсолютным*, а по отношению к подвижной системе — *относительным*. *Переносным* движением будем называть движение точки, жестко связанной с подвижной системой отсчета и совпадающей в рассматриваемый момент времени с точкой M. Наблюдатель, находящийся в подвижной системе отсчета, видит относительное движение точки.

Абсолютная скорость $\mathbf{v}_a$ точки M относительно неподвижной системы отсчета определяется по формуле

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы.

Вектор

$$\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}_1\mathbf{i}_1 + \dot{y}_1\mathbf{j}_1 + \dot{z}_1\mathbf{k}_1$$

называется *относительной скоростью* точки M. Наблюдатель, находящийся в подвижной системе отсчета и измеряющий скорость точки, находит ее относительную скорость.

Если $\mathbf{v}_r = 0$, то $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e$, где

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

— *переносная скорость*, равная скорости точки твердого тела, жестко связанного с подвижной системой отсчета.

В общем случае из формулы (3.1) следует, что абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скоростей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e.$$

Пример 1

Пусть человек едет в вагоне электрички с постоянной скоростью v и смотрит в окно, за которым идет дождь. Рассмотрим неподвижную систему отсчета, жестко связанную с поверхностью Земли, и подвижную систему, жестко связанную с вагоном, причем направление ортов $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_0$, совпадает с направлением движения вагона, а орты $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_0$ направлены вертикально вверх. Тогда $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0$. Если $\mathbf{r}_0 = 0$ при $t = 0$, то $\mathbf{r}_0 = \xi \mathbf{i}_0 = vt\mathbf{i}_0$.

Рассматривая каплю дождя как точку, предположим, что абсолютным движением этой точки является движением вниз по вертикальной прямой с постоянной скоростью u (сила тяжести уравновешивается силой сопротивления воздуха). Если $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ — координаты точки при $t = 0$, то $x = x_0$, $y = y_0 - ut$, $z = z_0$.

Человек, сидящий в движущемся вагоне, наблюдает относительное движение капли по закону

$$x_1 = x - \xi = x_0 - vt, \quad y_1 = y - \eta = y_0 - ut, \quad z_1 = z - \zeta = z_0.$$

Траекторией этого движения является прямая, лежащая в плоскости $z_1 = z_0$ и направленная под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(u/v)$ к орту $\mathbf{i}_1$. Если трение капли о стекло мало, то след капли дождя на окне вагона близок к этой прямой.

На рис. 3.2 изображены векторы абсолютной относительной и переносной скоростей для примера 1.

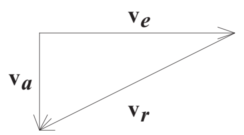

Рис. 3.2. Сложение скоростей капли дождя.

Введение подвижной системы отсчета в ряде случаев позволяет представить сложное движение точки в виде суммы двух более простых движений.

Пример 2

Рассмотрим винтовое движение точки M (раздел 1.1), при котором ее координаты относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ меняются по закону

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = ht,$$

где $\varphi = \omega t$, $a > 0$, $\omega > 0$, $h > 0$. Пусть точка P является проекцией точки M на плоскость Oxy (рис. 3.3). Тогда длина отрезка OP равна a, так как $x^2 + y^2 = a^2$.

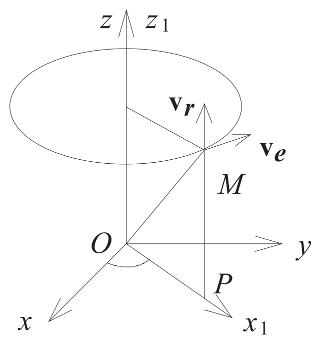

Рис. 3.3. Сложение скоростей при винтовом движении.

Введем подвижную систему отсчета $Ox_1y_1z_1$, у которой ось Oz_1 совпадает с осью Oz, а ось Ox_1 направлена по отрезку OP. Координаты точки M в подвижной системе отсчета определяются по формулам

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = z = ht.$$

Относительное движение является движением по прямой PM с постоянной скоростью, имеющей величину $v_r = h$. Переносное движение представляет собой движение точки по окружности с радиусом a. Его скорость $\mathbf{v}_e$ направлена по касательной к окружности и имеет величину $v_e = a\omega$. Величина абсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{h^2 + a^2\omega^2}.$$

Следовательно, винтовое движение эквивалентно сумме прямолинейного движения и движения по окружности.

Вектор *абсолютного ускорения*

$$\mathbf{w}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

Обозначим $\mathbf{w}_0 = d\mathbf{v}_0/dt$ и примем во внимание, что

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда

$$\mathbf{w}_a = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Вектор

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \ddot{x}_1\mathbf{i}_1 + \ddot{y}_1\mathbf{j}_1 + \ddot{z}_1\mathbf{k}_1$$

называется *относительным ускорением* точки M, вектор

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

— *переносным ускорением*, а вектор

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

— *ускорением Кориолиса.*

С учетом введенных обозначений формула для абсолютного ускорения принимает вид

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c.$$

Ускорение Кориолиса обращается в нуль в случае равенства нулю одного из векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, а также в случае, когда $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r$.

В примере 2 векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ параллельны, поэтому $\mathbf{w}_c = 0$. Кроме того, $\mathbf{w}_r = 0$ ввиду того, что $\mathbf{v}_r$ не зависит от времени. Следовательно, $\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e$. Переносное движение в примере 2 является движением по окружности с постоянной по модулю скоростью, поэтому вектор $\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e$ направлен к центру окружности, а его величина $w_a = w_e = a\omega^2$.

Пример 3

Рассмотрим сложное движение, для которого $\mathbf{w}_c \neq 0$. Пусть точка движется по поверхности Земли на север с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_r$ (рис. 3.4).

Будем считать, что Земля является шаром с радиусом R. Шар вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Введем неподвижную систему отсчета и подвижную систему, жестко связанную с Землей. Тогда относительным движением точки будет движение по меридиану, а переносным — движение по параллели, причем оба движения являются движениями по окружностям с постоянными по величине скоростями. Относительное ускорение $\mathbf{w}_r$ направлено к центру Земли и имеет величину $w_r = v_r^2/R$. Переносное ускорение $\mathbf{w}_e$ направлено в точку пересечения плоскости параллели с осью вращения Земли, а его модуль $w_e = r\omega^2$, где r — радиус параллели. Наибольшей величины, равной $R\omega^2$, переносное ускорение достигает на экваторе, а на полюсах оно равно нулю.

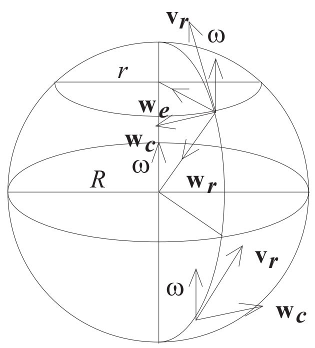

Рис. 3.4. Движение точки по поверхности Земли.

Ускорение Кориолиса $\mathbf{w}_c$ направлено на запад, если движение точки происходит в северном полушарии, и направлено на восток, если точка находится в южном полушарии. На экваторе $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r$, поэтому $\mathbf{w}_c = 0$.

3.2. Сложение движений твердого тела

Рассмотрим $n+1$ твердых тел. Пусть известно движение k-го тела относительно $(k-1)$-го при $k = 1, 2, \ldots, n$. Нулевое тело считаем неподвижным. Требуется определить каким будет движение n-го тела относительно нулевого. Эта задача называется задачей о сложении движений твердого тела.

Введем системы отсчета, жестко связанные с рассматриваемыми телами. Пусть начало отсчета k-й системы расположено в точке O_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Рассмотрим движение точки M n-го тела. Обозначим $\mathbf{r}_k$ и $\boldsymbol{\rho}_k$ векторы, соединяющие точки O_{k-1} с O_k и O_k с M $(k = 1, 2, \ldots, n)$. На рис. 3.5 эти векторы изображены в случае $n = 3$.

Вектор $\mathbf{r}$ из точки O_0 в точку M можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\rho}_n.$$

Скорость точки M

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\tilde{d}\mathbf{r}_k}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \times \mathbf{r}_k \right) + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\rho}_n,$$

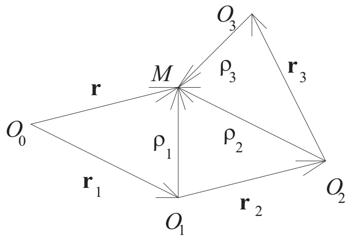

Рис. 3.5. Векторы $\mathbf{r}_k$ и $\boldsymbol{\rho}_k$.

где $\boldsymbol{\omega}_k$ угловая скорости вращения k-й системы отсчета относительно неподвижной системы, $k = 1, 2, \ldots n$, $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$. Вектор

$$\mathbf{v}'_k = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}_k}{dt}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

представляет собой скорость движения точки O_k относительно $k-$1-го тела. Учитывая, что $\mathbf{r}_k = \boldsymbol{\rho}_{k-1} - \boldsymbol{\rho}_k$, $k = 2, 3, \ldots n$ формулу для скорости точки M можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}'_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \times (\boldsymbol{\rho}_{k-1} - \boldsymbol{\rho}_k) + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\rho}_n.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\omega}'_k = \boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{\omega}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

относительные угловые скорости движения подвижных систем отсчета. Тогда

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{v}'_k + \boldsymbol{\omega}'_k \times \boldsymbol{\rho}_k). \tag{3.2}$$

Полученная формула является решением задачи о сложении движений. Она дает возможность найти скорость точки M n-го тела относительно неподвижной системы отсчета, если задано движение k-й системы отсчета относительно $(k-1)$-й.

Предположим, что все n тел движутся поступательно. Тогда $\boldsymbol{\omega}'_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, и из формулы (3.2) следует, что все точки n-го тела имеют одну и ту же скорость

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}'_k.$$

Это означает, что сумма поступательных движений эквивалентна поступательному движению.

Условие равенства нулю всех относительных угловых скоростей является достаточным условием поступательности результирующего движения, но оно не является необходимым. Необходимое и достаточное условие поступательного движения n-го тела относительно нулевого тела представляет собой равенство нулю его абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_n$. Ввиду того что

$$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_n - \boldsymbol{\omega}_0 = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{\omega}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}'_k,$$

необходимым и достаточным условием поступательности результирующего движения является равенство нулю суммы всех относительных угловых скоростей.

3.3. Сложение вращений твердого тела

Рассмотрим случай, когда движение каждого k-го тела относительно $(k-1)$-го представляет собой вращение вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'_k$. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ за начало координат O_k k-й системы отсчета выберем одну из точек, лежащую на k-ой оси вращения. Тогда $\mathbf{v}'_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, и формула (3.2) принимает вид

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}'_k \times \boldsymbol{\rho}_k.$$

Предположим, что все оси вращения пересекаются в точке P. Тогда векторы $\mathbf{p}_k$, соединяющие точку P с точками O_k, будут пропорциональны векторам $\boldsymbol{\omega}'_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 3.6).

Для вектора $\mathbf{p}$, направленного из точки P в точку M, справедливы равенства

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_k + \boldsymbol{\rho}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Принимая во внимание эти равенства и параллельность векторов $\boldsymbol{\omega}'_k$ и $\mathbf{p}_k$, для скорости точки M получаем

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}'_k \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}'_k \right) \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{p}.$$

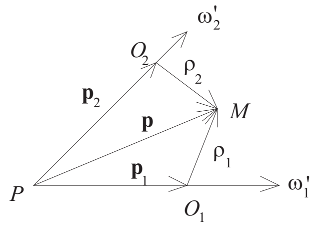

Рис. 3.6. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.

Следовательно, сумма вращений вокруг пересекающихся осей эквивалентна вращению вокруг оси, проходящей через точку P с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}'_k.$$

Рассмотрим сложение вращений вокруг двух параллельных осей с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}'_1$ и $\boldsymbol{\omega}'_2 = \alpha\boldsymbol{\omega}'_1$. Начала координат O_1 и O_2 выберем на осях вращения. Тогда $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 = 0$, и абсолютная скорость произвольной точки M второго тела

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}'_1 \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\omega}'_2 \times \boldsymbol{\rho}_2,$$

где $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ — векторы, направленные из точек O_1 и O_2 в точку M (рис. 3.7).

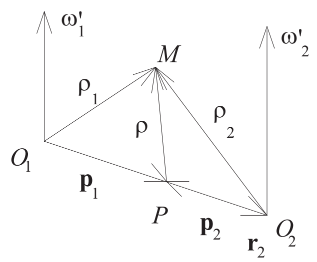

Рис. 3.7. Сложение вращений вокруг параллельных осей.

Абсолютная скорость $\mathbf{v}_P$ точки P второго тела, лежащей на прямой O_1O_2, определяется по формуле

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}'_1 \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}'_2 \times \mathbf{p}_2,$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — векторы, направленные из точек O_1 и O_2 в точку P.

Пусть $\mathbf{p}_1 = \lambda \mathbf{r}_2$, где $\mathbf{r}_2$ — вектор, соединяющий точки O_1 и O_2. Тогда

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{r}_2 = (\lambda - 1)\mathbf{r}_2.$$

Число λ определяет положение точки P на прямой O_1O_2. Найдем значение λ, для которого $\mathbf{v}_P = 0$. Подставив в формулу для скорости $\mathbf{v}_P$ выражения для $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, получим

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}_1' \times (\lambda \mathbf{r}_2) + \alpha \boldsymbol{\omega}_1' \times [(\lambda - 1)\mathbf{r}_2] = [\lambda + \alpha(\lambda - 1)]\boldsymbol{\omega}_1' \times \mathbf{r}_2.$$

Скорость $\mathbf{v}_P$ равна нулю, если $\lambda + \alpha(\lambda - 1) = 0$. В случае $\alpha \neq -1$ это уравнение имеет решение $\lambda = \alpha/(\alpha+1)$. Принимая во внимание формулы

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{p}_2 + \boldsymbol{\rho},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор из точки P в точку M, для скорости точки M получаем следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1' \times (\mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_2' \times (\mathbf{p}_2 + \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}_P + (\boldsymbol{\omega}_1' + \boldsymbol{\omega}_2') \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1' + \boldsymbol{\omega}_2'$ — абсолютная угловая скорость второго тела. Следовательно, в случае $\alpha \neq -1$ сумма вращений вокруг параллельных осей эквивалентна вращению вокруг оси, проходящей через точку P параллельно векторам $\boldsymbol{\omega}_1'$ и $\boldsymbol{\omega}_2'$, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$.

В случае $\alpha = -1$ имеет место равенство $\boldsymbol{\omega}_1' = -\boldsymbol{\omega}_2'$. Совокупность двух вращений вокруг параллельных осей с такими угловыми скоростями называется *парой вращений*. Пара вращений эквивалентна поступательному движению, так как для нее $\boldsymbol{\omega}_2 = 0$. Подставив $\alpha = -1$ в формулу для скорости точки P, получим

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}_1' \times \mathbf{r}_2.$$

Ввиду того что второе тело движется поступательно, такую же абсолютную скорость имеют и его остальные точки.

Пример

Пусть на карусели установлено сидение, которое может вращаться относительно своей вертикальной оси. Введем неподвижную систему отсчета с ортами $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, первую подвижную систему с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, жестко связанную с каруселью, и вторую подвижную систему с ортами $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$, жестко связанную с сидением.

Начала неподвижной системы отсчета O_0 и первой подвижной системы O_1 расположим на оси вращения карусели, а начало второй подвижной системы O_2 на оси вращения сидения (рис. 3.8).

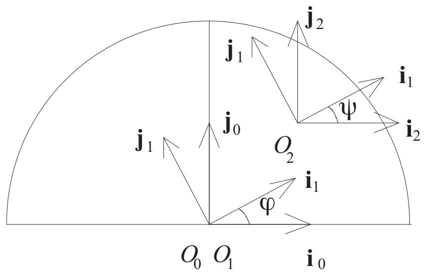

Рис. 3.8. Пара вращений.

Орты $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ направим параллельно осям вращения карусели и сидения. Предположим, что угол φ между ортами $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}_1$ меняется по закону $\varphi = \varphi(t)$, а угол ψ между ортами $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$ — по закону $\psi = -\varphi(t)$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}_1' = \dot{\varphi}\mathbf{k}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_2' = \dot{\psi}\mathbf{k}_0 = -\dot{\varphi}\mathbf{k}_0 = -\boldsymbol{\omega}_1',$$

и вращения карусели и сидения составляют пару вращений. Сидение движется поступательно относительно неподвижной системы отсчета, так как во все время движения выполняются равенства $\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_2$ (см. рис. 3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов С.Б.* Кинематика. Изд. СПбГУ, 2001.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Т. 1. М., 1965.

Оглавление