Вопросы для проверки остаточных знаний
студентов по общему курсу
"Экстремальные задачи в механике"

1. Какое состояние называется положением равновесия механической системы?

2. Каким может быть положение равновесия механической системы?

3. Является ли условие минимума потенциальной энергии необходимым условием устойчивости равновесия системы?

4. Какая из перечисленных ниже задач является **Простейшей задачей вариационного исчисления**?

$$\int\limits_0^1 (1+t)\,\dot{x}^2 dt, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \mathrm{extr}, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^1 \left(\ddot{x}^2 - 48x\right) dt, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=-4, \quad x(1)=\dot{x}(1)=0. \tag{3}$$

5. **Уравнение Эйлера** для функционала $\int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)\, dt + l\big(q(t_0), q(t_1)\big)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial l}{\partial q} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{6}$$

6. Какая из перечисленных ниже задач является **Задачей с закрепленными концами в случае нескольких неизвестных функций**?

$$I(y,z) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + {y'}^2 + {z'}^2}}{v(x,y,z)} dx \to \mathrm{extr}, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^1 \left({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right) dt \to \mathrm{extr}, \quad x_1(0)=x_2(0)=0, \quad x_1(1)=x_2(1)=\operatorname{sh}1, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^1 \Big(x(y(t))^2 - 48\dot{x}\Big)\, dt \to \mathrm{extr}, \quad y(0)=1, \quad \dot{x}(0)=-4, \quad x(1)=\dot{y}(1)=0, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^T \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi. \tag{10}$$

7. Необходимым условием в **Задаче со старшими производными** является выполнение следующего уравнения для функционала $I(y) = \int_a^b F(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}) dx$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \tag{11}$$

$$F_y + \frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(2)}} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0, \tag{12}$$

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(2)}} - \ldots + (-1)^{n}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{13}$$

8. Есть ли в перечне задач (7) — (10) **Задача с подвижными концами**.

9. Правильно ли записана **Изопериметрическая задача**:

$$\mathscr{I}_0\left(x(t)\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x})\, dt \to \mathrm{extr}, \tag{14}$$

$$\mathscr{I}_i\left(x(t)\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x})\, dt = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{15}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{16}$$

10. Какая из перечисленных ниже задач является **Задачей Больца**.

$$\mathscr{B}\left(x(t)\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt + l\big(x(t_0), x(t_1)\big) \to \mathrm{extr}, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \mathrm{extr}, \tag{18}$$

$$\int\limits_0^1 \left(\ddot{x}^2 - 48x\right) dt + x(0), \quad \dot{x}(0) = -4, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 0. \tag{19}$$

11. План решения **Задачи Лагранжа**.

12. В каких задачах используются следующие выражения:

$$L = L\big(t, x(t), \dot{x}, \lambda\big) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot f_i(t, x(t), \dot{x}), \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m). \tag{20}$$

$$\mathscr{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x(t), u(t)) + p\,(t) \cdot \left(\dot{x}(t) - \varphi\left(x(t), u(t), t\right) \right) \right) dt + \tag{21}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\, \psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big), \tag{22}$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \widehat{l}_{x(t_k)}, \quad k = 0. \tag{23}$$

13. План решения **Задачи оптимального управления**.

14. Формулировка **Принципа Понтрягина**:

    - На оптимальном управлении функция Лагранжа достигает своего минимума
    - На оптимальном управлении функция Лагранжа достигает своего максимума
    - На оптимальном управлении функция Гамильтона достигает своего максимума.

15. Верно ли, что необходимость в принципе максимума Понтрягина возникает в случае, когда нигде в допустимом диапазоне управляющей переменной невозможно удовлетворить необходимому условию стационарности по u:

$$\hat{L}_u = 0. \tag{24}$$