Экстремальные задачи механики

Контроль успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Для получения зачета студент должен

- правильно решить 9 контрольных задач в двух контрольных работах
- уметь отвечать на устные вопросы по пройденному материалу

Зачет ставится по результатам работы студента в течение семестра. Не допускается выдача всех контрольных работ в день выставления зачета.

Примерный перечень вопросов к зачету по всему курсу

1. Функциональные пространства.
2. Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума.
3. Простейшие задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
4. Задача о брахистохроне.
5. Задачи с закрепленными концами в случае нескольких неизвестных функций.
6. Распространение света в неоднородной среде.
7. Задача о геодезических линиях.
8. Принцип наименьшего действия.
9. Задачи с функционалами, зависящими от производных старших порядков.
10. Задача с подвижными концами.
11. Изопериметрические задачи.
12. Задача Больца.
13. Задача Лагранжа.
14. Связанные задачи вариационного исчисления.
15. Сведение задач Лагранжа и Больца к задаче Майера.
16. Принцип Лагранжа – правило сведения задачи с ограничениями к некоторой элементарной задаче.
17. Постановка задачи оптимального управления.
18. Формулировка принципа максимума Понтрягина.
19. Принцип Лагранжа в задаче оптимального управления.
20. Задачи линейные по фазовым координатам.
21. Задача о быстродействии. Примеры.

Список обязательной литературы

- Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М., 2005
- Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М. 2009.

Список дополнительной литературы

- Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 2005
- Пасынков В.Е., Пасынкова И.А., Наумова Н.В. Экстремальные задачи. СПб., 2000.
- Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М. 1950.

Перечень иных информационных источников

- Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/
- Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS
- Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/
- Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource%20type=8
- Интернет-ресурсы, в частности https://tm.spbu.ru/kursy-lektsij.html

Задачи на максимум и минимум

- Изопериметрическая задача
  - Форма кривой заданной длины, охватывающая максимальную S
  - Форма поверхности заданной S, охватывающая максимальный V
- Задача о параллелограмме наибольшей площади, который можно вписать в треугольник (Евклид, 3в. до н.э.)
- Шаровой сегмент максимального объема при заданной площади шаровой части поверхности этого сегмента (Архимед, 3в. до н.э.)
- Задача о минимальном расстоянии от точки плоскости до эллипса и о нормалях к эллипсу из произвольной точки плоскости (Апполоний, 3-2вв. до н.э.)

Первые решенные задачи

- Законы природы подчиняются экстремальным принципам
- В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума (Л. Эйлер)
- Пьер Ферма (1662)
  - Свет избирает такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое им на преодоление пути от одной точки до другой, минимально
- И. Бернулли (1696)
  - Задача о брахистохроне (кривая наибыстрейшего ската тела без трения)

Цели экстремальных задач

Максимальное использование ресурсов

- Аэродинамическая задача Ньютона (1687) о форме тела вращения испытывающего минимальное сопротивление
- Транспортная задача в экономике (1940е): наилучший способ транспортировки продуктов со складов в магазины
- Задача о быстродействии, например, наименьшее время движения лифта в угольной шахте (1940е)
- Теория оптимального управления (Ньютон и после в 1950е годы)

Задача 1. Выделение квадрата двучлена из квадратичной функции

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Тогда функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает экстремальные значения при $x = -b/2a$ именно:

$y_{min} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$; y_{max} не существует – при $a > 0$;

$y_{max} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$; y_{min} не существует – при $a < 0$.

Задача 2. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найдите наибольшую высоту его подъёма.

Решение. Ординату тела $y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$ преобразуем так:

$$y = -\frac{g}{2}\left(t^2 - 2t \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}\right) + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2.$$

Следовательно, в момент времени $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Задача 3 (задача Гюйгенса). Три совершенно упругих шара массами m_1, m_2 и m_3 находятся на одной прямой в покое. Потом шар m_1 ударяет шар m_2 с известной скоростью υ_1. Какова должна быть масса m_2 второго шара, чтобы после его удара о шар m_3 скорость последнего была наибольшей?

Решение. Применив законы сохранения энергии и импульса к удару первого шара о второй и второго о третий, получим $v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ и $v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_2 + m_3}$, откуда

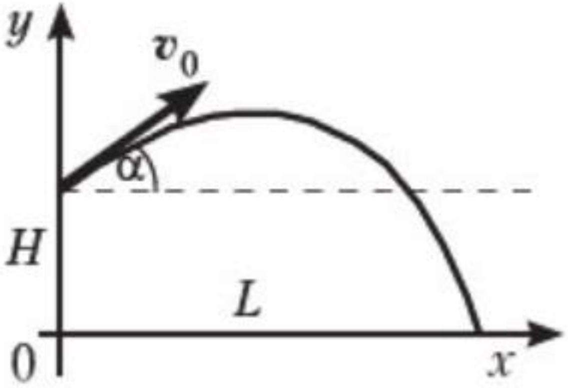
$$v_3 = \frac{4m_1 \cdot m_2 v_1}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)}.$$

Преобразуем результат:

$$v_3 = \frac{4m_1 v_1}{m_2 + \frac{m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3} = \frac{4m_1 v_1}{m_2 - 2\sqrt{m_1 m_3} + \left(\frac{\sqrt{m_1 m_3}}{\sqrt{m_2}}\right)^2 + m_1 + 2\sqrt{m_1 \cdot m_3} + m_3} = \frac{4m_1 v_1}{\left(\sqrt{m_2} - \frac{\sqrt{m_1 m_3}}{\sqrt{m_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3}\right)^2}.$$

Значит, $v_{max} = \frac{4m_1 v_1}{\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3}\right)^2}$ при $m_2 = \sqrt{m_1 \cdot m_3}$.

Задача 4. Под каким углом к горизонту надо бросить тело с башни высотой *H*, чтобы оно упало как можно дальше от основания башни? Чему равна наибольшая дальность полёта L_{max}? Начальная скорость тела υ_0.



Решение. В выбранной системе координат уравнения движения тела

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha) \cdot t, \\ y = H + (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Исключив из уравнений (1) время *t*, получим уравнение траектории:

$$y = H + x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha).$$

Ясно, что $x = L$ при $y = 0$, тогда из уравнения (2) получим квадратное уравнение относительно tg α:

$$L^2g^2\text{tg}^2\alpha - 2Lgv_0^2\text{tg}\alpha + (L^2g^2 - 2gHv_0^2) = 0,$$

откуда $\text{tg}\alpha = \dfrac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^2(v_0^2 + 2gH) - L^2g^2}}{Lg}$.

Последнее выражение имеет смысл при

$L \le \dfrac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$, поэтому $L_{max} = \dfrac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$.

Наибольшей дальности полёта соответствует

$$\text{tg}\alpha_0 = \frac{v_0^2}{L_{max}g} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} = \frac{v_0}{v_п},$$

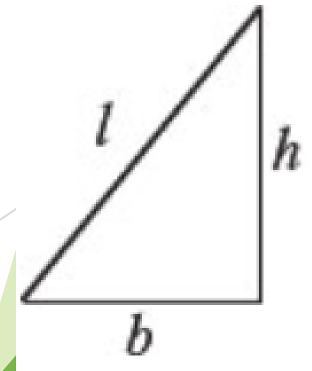
где $v_п$ – скорость падения тела на Землю. Так как $\text{tg}\,\alpha < 1$, то $\alpha_0 < 45°$.

Задача 5. Имеется множество наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями, равными *b*, но разной высоты. При какой высоте *h* время *t* соскальзывания тела по наклонной плоскости без трения будет наименьшим?

Решение. При равноускоренном движении $l = \frac{at^2}{2}$, где $a = g \sin \alpha$ – ускорение тела,

$l = \frac{b}{\cos\alpha}$ – длина наклонной плоскости.

Отсюда $t = \sqrt{\frac{2b}{g \sin\alpha \cos\alpha}} = 2\sqrt{\frac{b}{g \sin 2\alpha}}$.



Следовательно, $t_{min} = 2\sqrt{\dfrac{b}{g}}$ при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45°$, т.е. при $h = b$.

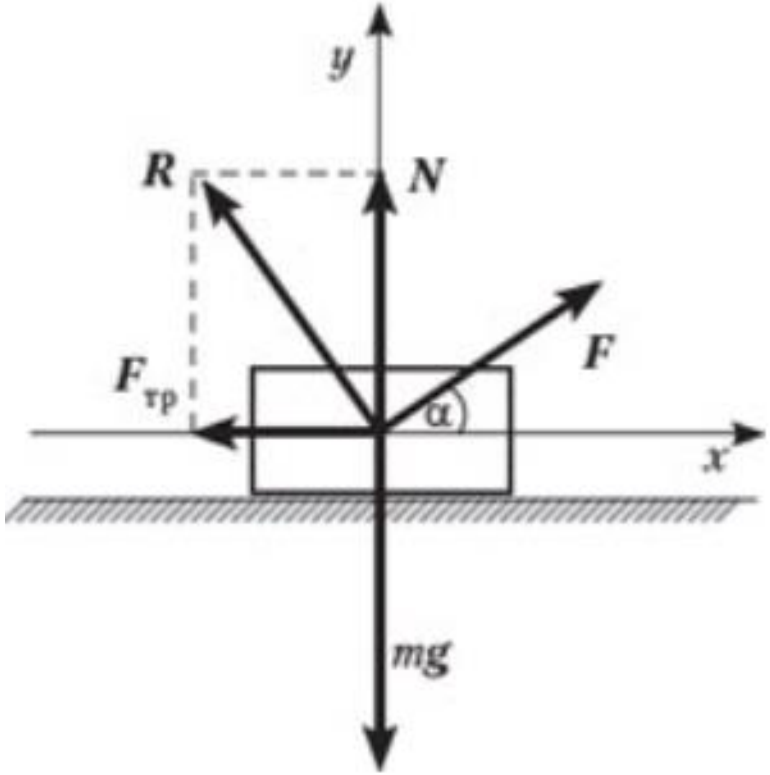
Данный приём полезен и при изучении теории. В учебнике физики выведена формула дальности полёта тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту:

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \qquad (3)$$

Без доказательства сообщается, что наибольшая дальность полёта будет при $\alpha = 45°$.

Повторяя механику в 11-м классе, запишем формулу (3) в виде $l = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, откуда $l_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$ при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45°$.

Задача 6. Тело массой *m* движется равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы ***F***. Коэффициент трения равен μ. При каком значении угла α сила ***F*** имеет наименьший модуль? Чему он равен?



Решение. На тело действуют четыре силы: сила ***F***, сила тяжести ***mg***, сила нормальной реакции поверхности ***N*** и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Под действием этих сил тело движется равномерно и прямолинейно. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси *X* и *Y*:

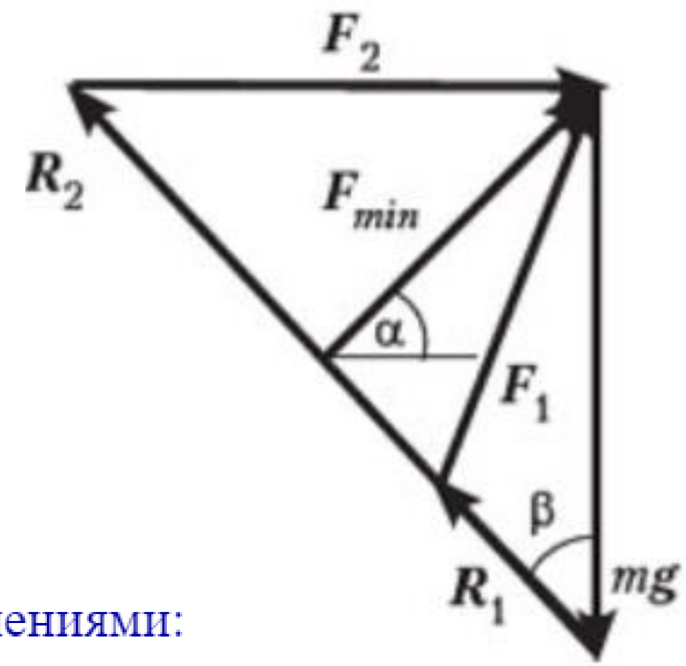
$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{тр} = 0, \\ N + F\sin\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Так как $F_{тр} = \mu N$, то из этих уравнений находим:

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Заменим действие сил $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ действием одной силы реакции опоры $\boldsymbol{R}$. Поскольку тело движется равномерно, векторная сумма всех сил равна нулю, т.е. силы $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{R}$, и $\boldsymbol{F}$ образуют замкнутый треугольник. Модуль силы $\boldsymbol{R}$ зависит от направления силы $\boldsymbol{F}$, но направление силы $\boldsymbol{R}$ неизменно и определяется только коэффициентом трения:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_{тр}}{N} = \mu.$$



С изменением направления силы $\boldsymbol{F}$ изменяется её модуль и модуль силы $\boldsymbol{R}$. На рисунке изображены два треугольника, определяемые соотношениями:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{F}_1 = 0,$$

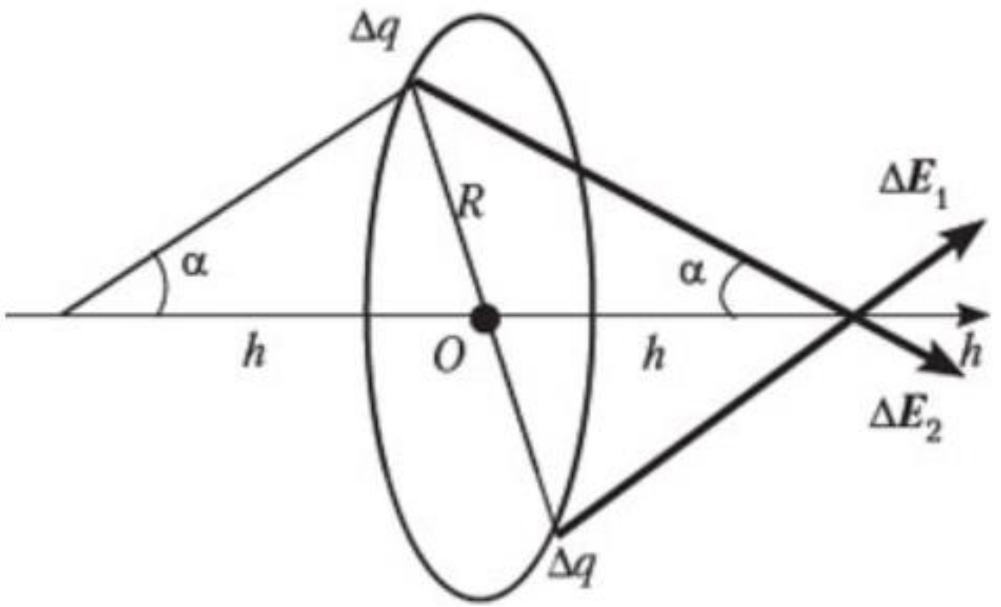
$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{F}_2 = 0.$$

Из рисунка видно, что сила $\boldsymbol{F}$ будет наименьшей по модулю в том случае, если она перпендикулярна к линии действия силы $\boldsymbol{R}$. Очевидно, что при этом угол её наклона к горизонту $\alpha = \beta = \operatorname{arctg} \mu$. Следовательно,

$$F_{min} = mg\sin\beta = mg\sin\alpha = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Задача 7. Положительный заряд q равномерно распределён по тонкому проволочному кольцу радиусом R. Найдите точки на оси кольца, в которых напряжённость электрического поля имеет наибольшее значение, и определите его.

Решение. Очевидно, что на оси кольца существуют две симметричные относительно центра O точки, в которых модуль напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}$ имеет именно наибольшее значение. Действительно, из соображений симметрии, в центре кольца $E = 0$. Если взять точку, у которой $h \gg R$, то кольцо можно рассматривать как точечный заряд, напряжённость поля которого $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{h^2} \to 0$ при $h \to \infty$. Значит, существует



такое h, при котором напряжённость поля
наибольшая. Избегая дифференцировать иррациональную функцию от h, примем за независимую переменную угол α, тогда $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin^2\alpha\cos\alpha$. Находим производную и экстремум: E:

$E_{max} = \frac{\sqrt{3}q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$ при $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Следовательно, $h = R\operatorname{ctg}\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Задача 8. Какую наибольшую полезную мощность тока P_{max} может обеспечить источник с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением r?

Решение 1.

$$P = IU = I(\mathscr{E} - Ir) = \mathscr{E} \cdot I - r \cdot I^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{4r} - r\left(I - \frac{\mathscr{E}}{2r}\right)^2.$$

Значит, максимум мощности $P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}$ при $I = \frac{\mathscr{E}}{2r}$. Сравнивая с законом Ома $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}$, видим, что этот максимум достигается при $R = r$.

Задача 8. Какую наибольшую полезную мощность тока P_{max} может обеспечить источник с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением r?

Решение 2. Рассмотрим равенство $P = \mathscr{E} I - r I^2$ как квадратное уравнение относительно I: $r \cdot I^2 - \mathscr{E} I + P = 0$, откуда $I_{1,2} = \dfrac{\mathscr{E} \pm \sqrt{\mathscr{E}^2 - 4rP}}{2r}$.

Следовательно, $P \leq \dfrac{\mathscr{E}^2}{4r}$, т.е. $P_{max} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{4r}$ при $I = \dfrac{\mathscr{E}}{2r}$.

Задача 8. Какую наибольшую полезную мощность тока P_{max} может обеспечить источник с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением r?

Решение 3.

$$P = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{R + 2r + \frac{r^2}{R}} = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4r}.$$

Дальнейшее ясно.

Задача 8. Какую наибольшую полезную мощность тока P_{max} может обеспечить источник с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением r?

Решение 4. Так как $R = \dfrac{(R+r)^2 - (R-r)^2}{4r}$,

то $P = \dfrac{\mathscr{E}^2}{4r} \cdot \left(1 - \dfrac{(R-r)^2}{(R+r)^2}\right)$. Решение очевидно.

Задача 8. Какую наибольшую полезную мощность тока P_{max} может обеспечить источник с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением r?

Решение 5. При решении с помощью производной за независимую переменную проще выбрать ток I, а не внешнее сопротивление R.