Лекция 2

- Функциональные пространства
- Первая вариация функционала
- Необходимые условия экстремума
- Простейшие задачи вариационного исчисления
- Уравнение Эйлера

Функциональные пространства

Пространства в совокупности всех функций, имеющих:

непрерывную производную

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

дважды непрерывные производные

$$I(y) = \int_a^b F(x, y', y'')dx$$

Линейное пространство

Определение. Линейным пространством называется совокупность R элементов $x, y, z, \ldots$ произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, причем выполнены следующие аксиомы:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\exists 0 : \quad x + 0 = x \quad \forall x \in R$;
4) $\forall x \in R \quad \exists (-x) : \quad x + (-x) = 0$;
5) $1 \cdot x = x$;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, α, β— вещественные или комплексные числа;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Нормированное пространство

Определение. Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие

неотрицательное число $||x||$ — норма элемента x, такое, что

$$
\begin{aligned}
&1)\quad ||x|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0;\\
&2)\quad ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \quad \alpha = \text{const};\\
&3)\quad ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||.
\end{aligned}
$$

В линейном нормированном пространстве под расстоянием между элементами x и y понимается норма $||x - y||$.

Примеры

1°. Пространство C состоит из всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда норму элемента y можно определить следующим образом:

$$||y|| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x)|.$$

В пространстве C функция $y(x)$ отстоит от функции $y_0(x)$ не более, чем на ε, если ее график находится внутри полосы шириной 2ε, окружающей график функции $y_0(x)$.

Примеры

2°. Пространство D_1 состоит из всех функций, определенных на отрезке $[a,b]$, непрерывных вместе со своими первыми производными. Норму можно определить как

$$||y||_1 = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y(x)| + \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y^{'}(x)|.$$

Тогда из $||y-z||_1 < \varepsilon$ следует, что $|y(x)-z(x)| < \varepsilon$ и $|y^{'}(x) - z(x)| < \varepsilon$ при $x \in [a,b]$.

3°. Пространство D_n состоит из всех функций, определенных на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка. Тогда норма

$$||y||_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y^{(k)}(x)|$$

и

$$||y-z||_n < \varepsilon \Longrightarrow |y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad k = 0, \ldots, n, \quad x \in [a,b].$$

Непрерывность функционала

Определение. Функционал $I(y)$ называется *непрерывным в точке* $y_0 \in R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$, как только $||y - y_0|| < \delta$.

Отметим, что функционал может быть непрерывным в одном пространстве и не быть непрерывным в другом. Например, функционал

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx, \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B,$$

непрерывен в пространстве D_1 и не является непрерывным в пространстве C.

Первая вариация функционала

Определение. Пусть R — линейное нормированное пространство, и пусть задан функционал $I(y)$, где $y \in R$. Функционал $I(y)$ называется линейным, если он:

1) непрерывен в R;

2) $I(y_1 + y_2) = I(y_1) + I(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in R$.

Примеры

1°. Рассмотрим функционал

$$I(y) = \int_a^b y(x)dx, \qquad y(x) \in C$$

и покажем, что он непрерывен.

$$|I(y_1) - I(y_2)| \leqslant \int_a^b |y_1 - y_2|dx \leqslant (b-a)||y_1 - y_2||.$$

Возьмем $\forall\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon/(b-a)$, тогда $||y_1 - y_2|| < \varepsilon/(b-a)$ и $|I(y_1) - I(y_2)| < \varepsilon$. Выполняется и второе условие линейности функционала, так как

$$I(y_1 + y_2) = \int_a^b (y_1 + y_2)dx = I(y_1) + I(y_2).$$

Примеры

2°. Легко показать, что функционал

$$I(y) = \int_a^b \phi(x) y(x) dx,$$

где $\phi(x)$ ограниченная на $[a, b]$ функция и такая, что интеграл существует, также является линейным.

Примеры

3°. Поставим в соответствие каждой функции $y(x)$ ее значение в фиксированной точке x_0. Покажем, что функционал $I(y) = y(x_0)$ линейный. Справедливо неравенство

$$|y(x_0) - y_0(x_0)| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - y_0(x)| = ||y - y_0||.$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$, тем самым доказывается непрерывность этого функционала. Очевидно, что

$$I(y_1 + y_2) = y_1(x_0) + y_2(x_0) = I(y_1) + I(y_2).$$

Лемма 1. Если $\phi(x)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция и

$$\int_a^b \phi(x)h(x)dx = 0$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$, удовлетворяющей условию $h(a) = h(b) = 0$, то $\phi(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть в точке $x_0 \in (a,b)$ имеем $\phi(x_0) \neq 0$, например, $\phi(x_0) > 0$. В силу непрерывности $\phi(x)$ найдется такой интервал $(\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$, включающий точку x_0, где $\phi(x) > 0$. Возьмем

$$h(x) = \begin{cases} (\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2, & x \in [\xi_1, \xi_2], \\ 0, & x \notin [\xi_1, \xi_2]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_a^b \phi(x)h(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi(x)(\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2 dx > 0.$$

Получили противоречие, тем самым лемма доказана.

Рассмотрим линейный функционал, определенный в пространстве D_1:

$$\int_a^b \phi(x)h'(x)dx.$$

Лемма 2. Если $\psi(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция и

$$\int_a^b \psi(x)h'(x)dx = 0$$

для каждой $h(x) \in D_1$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $\psi(x) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Для любой непрерывной функции $\psi(x)$ можно подобрать постоянную C так, что будет выполняться равенство

$$\int_a^b (\psi(x) - C)dx = 0.$$

Имеем

$$\int_a^b h'(x)dx = h(a) - h(b) = 0.$$

Тогда

$$\int_a^b (\psi(x) - C)h'(x)dx = \int_a^b \psi(x)h'(x)dx - C\int_a^b h'(x)dx = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю по условию. Следовательно, в силу леммы 1 имеем $\psi(x) - C \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $\phi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции и

$$\int_a^b [\phi(x)h(x) + \psi(x)h^{'}(x)]dx = 0$$

для каждой $h(x)$ из D_1 такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $\psi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\phi(x) - \psi^{'}(x) = 0$.

Доказательство. Положим

$$A(x) = \int_a^x \phi(t)dt.$$

Справедливо равенство

$$\int_a^b \phi(x)h(x)dx = -\int_a^b A(x)h^{'}(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b [\phi(x)h(x) + \psi(x)h^{'}(x)]dx = \int_a^b (-A(x) + \psi(x))h^{'}(x)dx.$$

По лемме 2 имеем $\psi(x) - A(x) = \mathrm{const}$. Следовательно, $\psi(x)$ дифференцируема и $\phi(x) - \psi^{'}(x) = 0$. Лемма доказана.

Необходимое условие экстремума

Приращением функционала называется величина

$$\Delta I(y, y_0) = I(y) - I(y_0). \qquad (2)$$

Первой вариацией (или просто вариацией) функционала δI называется линейная часть его приращения, т.е.

$$\Delta I(y, y_0) = A(y_0)h + \alpha||h||, \qquad \delta I(h) = A(y_0)h, \qquad (3)$$

где $h = y - y_0$ и $\alpha||h|| \to 0$ при $||h|| \to 0$.

Вариация функционала $\delta I(h)$ является линейным функционалом, т.е. $\delta I(h_1 + h_2) = \delta I(h_1) + \delta I(h_2)$.

Будем говорить, что функционал достигает минимума (максимума) на элементе $y_0 \in R$, если в некоторой окрестности элемента y_0 приращение (2) удовлетворяет условию:

$$\Delta I(y, y_0) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0), \qquad \forall y: \quad ||y - y_0|| \leqslant \varepsilon.$$

Если рассматривать функционал в пространстве C, то будем говорить о *сильном* минимуме (максимуме).

Если рассматривать функционал в пространстве D_1, то будем говорить о *слабом* минимуме (максимуме).

Очевидно, что слабый минимум (максимум) будет в то же время и сильным минимумом (максимумом). Действительно, если $||y - y_0||_1 < \varepsilon$, то подавно будет $||y - y_0|| < \varepsilon$. Если $I(y_0)$ есть экстремум по отношению ко всем y таким, что $||y - y_0|| < \varepsilon$, то он тем более будет экстремумом по отношению к таким y, для которых $||y - y_0||_1 < \varepsilon$.

Теорема. Для того чтобы функционал $I(y)$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация $\delta I = 0$ при $y = y_0$.

Доказательство. 1°. Покажем, что если $\delta I(h)/||h|| \to 0$ при $||h|| \to 0$, то $\delta I(h) \equiv 0$. Будем доказывать от противного. Пусть $h_0 \neq 0$ таково, что $\delta I(h_0) = \lambda \neq 0$. Положим $h_n = h_0/n$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta I(h_n)}{||h_n||} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\delta I(h_0)}{n||h_0||} = \frac{\lambda}{||h_0||} \neq 0.$$

Получили противоречие.

2°. В приращении функционала (3) $\Delta I = \delta I(h) + \alpha||h||$ для достаточно малых $||h||$ определяющей по величине является вариация функционала $\delta I(h)$. Следовательно, в случае минимума, например, имеем $\Delta I \geqslant 0$, тогда и $\delta I(h) + \alpha||h|| \geqslant 0$, откуда следует, что $\delta I(h) = 0$, так как в противном случае всегда можно заменить h на $-h$, и так как $\delta I(h)$ является линейным функционалом, то $\delta I(-h) = -\delta I(h)$. Теорема доказана.

Простейшие задачи вариационного исчисления

Пусть функция $F(x, y, y^{'})$ имеет частные производные по своим переменным до второго порядка включительно. Среди непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, найти такую, которая доставляет *слабый* экстремум функционалу вида

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y^{'})dx.$$

Рассмотрим функции $y(x) + h(x)$, где $h(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции и $h(a) = h(b) = 0$. Вычислим приращение функционала

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y + h, y' + h')dx - \int_a^b F(x, y, y')dx =$$

$$= \int_a^b [F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h']dx + \dots$$

Здесь и далее через F_y и $F_{y'}$ обозначены производные функции F по y и y' соответственно. Невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно $h(x)$ и $h'(x)$.

Уравнение Эйлера

В силу необходимого условия экстремума функционала вариация

$$\delta I = \int_a^b [F_y h + F_{y'} h^{'}] dx = 0.$$

На основании леммы 3 имеем

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \qquad (5)$$

Теорема 1. Для того, чтобы функционал

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, достигал на данной функции экстремум, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера (5).

Теорема 2. Пусть функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (5) Если функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках (x, y), в которых $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ функция $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Доказательство. Выполним дифференцирование по x в уравнении Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то уравнение Эйлера можно разрешить относительно y''. Следовательно, экстремаль (функция $y = y(x)$, на которой достигается экстремум функционала) может иметь изломы только в точках, где $F_{y'y'} = 0$. Теорема доказана.

Примеры

$$I(y) = \int_{-1}^{1} y^2(1 - y^{'})^2 dx,$$

с граничными условиями

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Минимум этого функционала достигается на функции

$$y = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad F^{''}_{y^{'}y^{'}} = 2y^2 = 0 \quad \text{в точке} \quad (x = 0, y = 0).$$

Частные случаи простейшей задачи вариационного исчисления

1°. Рассмотрим функционал, у которого подынтегральная функция не зависит от y, т.е.

$$I(y) = \int_a^b F(x, y')dx.$$

Тогда уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'} = C$. Если это уравнение можно разрешить относительно y', то из соотношения $y' = f(x, C)$ можно y определить квадратурой.

2°. Рассмотрим функционал, у которого подынтегральная функция не зависит от x, т.е.

$$I(y) = \int_a^b F(y, y^{'})dx.$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = F_y - F_{y'y}y^{'} - F_{y'y'}y^{''} = 0.$$

Умножим последнее равенство на $y^{'}$:

$$F_y y^{'} - F_{y'y}y^{'2} - F_{y'y'}y^{''}y^{'} = 0.$$

На основании этого равенства легко показать, что

$$\frac{d}{dx}\Big(F(y, y^{'}) - y^{'}F_{y'}(y, y^{'})\Big) = 0,$$

и уравнение Эйлера принимает вид $F - y^{'}F_{y'} = C$.

3°. Если F не зависит от $y^{'}$, то вместо дифференциального уравнения получим алгебраическое $F_y(x,y)=0$.

4°. Рассмотрим функционал вида

$$I(y)=\int_a^b v(x,y)\sqrt{1+{y'}^2}dx.$$

Выпишем отдельно каждое слагаемое уравнения Эйлера:

$$F_y=v_y^{'}\sqrt{1+{y'}^2},$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{(v_x^{'}+v_y^{'}y^{'})y^{'}}{\sqrt{1+{y'}^2}}+\frac{vy^{''}}{(1+{y'}^2)\sqrt{1+{y'}^2}}.$$

Окончательно уравнение Эйлера примет вид

$$v_y^{'}-v_x^{'}y^{'}-\frac{vy^{''}}{1+{y'}^2}=0.$$

Примеры

1°. Рассмотрим функционал вида

$$I(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Подынтегральная функция не зависит от y, поэтому уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'} = C$ или

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Разрешим это уравнение относительно y':

$$y' = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}.$$

Проинтегрируем его:

$$y = -\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + C_1,$$

и преобразуем к виду

$$(y-C_1)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Это уравнение окружности. Из граничных условий получим уравнения для определения постоянных C и C_1:

$$C_1^2 + 1 = \frac{1}{C^2}, \qquad (1-C_1)^2 + 4 = \frac{1}{C^2}.$$

Отсюда $C = 1/\sqrt{5}$, $C_1 = 2$.

Примеры

2°. *Задача о брахистохроне.* Как было показано выше, задача о брахистохроне может быть сведена к нахождению минимума функционала

$$I(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx,$$

при следующих граничных условиях $y(0) = 0, \quad y(b) = B$.

Подынтегральная функция не зависит от x, и уравнение Эйлера будет $F - y'F_{y'} = C$. После простых преобразований его можно записать в виде

$$y(1+y'^2) = C^2.$$

Сделаем замену переменных:

$$y' = \mathrm{ctg}\psi \quad \Longrightarrow \quad y = C^2\sin^2\psi.$$

Уравнение для x имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{tg}\psi \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{d\psi} = C^2(1-\cos 2\psi).$$

Проинтегрируем это уравнение при нулевых начальных условиях:

$$x = C^2(\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi),$$
$$y = C^2(1-\cos 2\psi),$$

а значение постоянной C определим из условия $y(b) = B$.

Получили уравнение брахистохроны в параметрической форме, которое является уравнением циклоиды. Таким образом, кривая наискорейшего спуска представляет собой циклоиду.

Решение Ньютона
задачи о брахистохроне