Лекция 3

Задача с закрепленными концами в случае нескольких неизвестных функций

Распространение света в неоднородной среде

Задача о геодезических линиях

Принцип наименьшего действия

Примеры

1 Элементарные задачи классического вариационного исчисления

На примерах рассмотрим различные соотношения между решениями простейшей задачи классического вариационного исчисления и экстремалями.

Пример №1. *Допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет глобальный экстремум.*

$$J(x(t)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение:

1. Уравнение Эйлера: $\ddot{x} = 0$.
2. Общее решение: $x = C_1 t + C_2$.
3. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} = t$.
4. Докажем, что эта экстремаль доставляет глобальный минимум в задаче.

Для этого возьмем дополнительную функцию
$h(t) \in C^1([0, 1])$, $h(0) = 0$, $h(1) = 0$ и рассмотрим разность

$$J(\hat{x}(t) + h(t)) - J(\hat{x}(t)) \gtrless 0.$$

$$J(\hat{x}(t) + h(t)) - J(\hat{x}(t)) = \int_0^1 \left(\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right)^2 dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt =$$

$$= 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt = 2\int_0^1 \dot{h}dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt = 2h\,|_0^1 + \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 0$$

Пример №2. *Допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет локальный экстремум.*

$$J\left(x(t)\right) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение:

1. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt} 3\dot{x}^2 = 0 \Leftrightarrow 3\dot{x}^2 = C \Leftrightarrow \dot{x} = C$.
2. Общее решение: $x = C_1 t + C_2$.
3. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} = t$.

4. Докажем, что эта экстремаль доставляет локальный минимум в задаче.

Для этого возьмем дополнительную функцию $h(t) \in C^1([0, 1])$, $h(0) = 0$, $h(1) = 0$ и рассмотрим разность

$$J(\hat{x}(t) + h(t)) - J(\hat{x}(t)) = \int_0^1 \left(\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right)^3 dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^3 dt =$$

$$= 3\int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 \dot{h} dt + 3\int_0^1 \dot{\hat{x}} \dot{h}^2 dt + \int_0^1 \dot{h}^3 dt = 3\int_0^1 \dot{h} dt + \int_0^1 \dot{h}^2 \left(3 + \dot{h}\right) dt$$

$$= 3h \,|_0^1 + \int_0^1 \dot{h}^2 \left(3 + \dot{h}\right) dt.$$

Отсюда видно, что если $||h(t)||_1 < 3$, то $3 + \dot{h} > 0$ и, значит, $J(\hat{x}(t) + h(t)) > J(\hat{x}(t))$, т. е. $\hat{x}(t) \in \text{loc min}$

Пример №3. *Допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет глобальный экстремум, но не является непрерывно дифференцируемой функцией.*

$$J\left(x(t)\right) = \int\limits_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2 dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение:

1. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}\left(2t^{2/3}\dot{x}\right) = 0 \Leftrightarrow t^{2/3}\dot{x} = C \Leftrightarrow \dot{x} = Ct^{-2/3}$.
2. Общее решение: $x = C_1 t^{1/3} + C_2$.
3. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} = t^{1/3} \notin C^1\left([0,\, 1]\right)$.

4. Докажем, что эта экстремаль доставляет глобальный минимум в задаче.

Для этого возьмем дополнительную функцию
$h(t) \in C^1([0, 1])$, $h(0) = 0$, $h(1) = 0$ и рассмотрим разность

$$J(\hat{x}(t) + h(t)) - J(\hat{x}(t)) = \int\limits_0^1 t^{2/3}\left(\dot{\hat{x}} + \dot{h}\right)^2 dt - \int\limits_0^1 t^{2/3}\dot{\hat{x}}^2 dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 t^{2/3}\dot{\hat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^1 t^{2/3}\dot{h}^2 dt = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \dot{h}dt + \int\limits_0^1 t^{2/3}\dot{h}^2 dt \geq 0.$$

Пример №4. *Допустимая экстремаль существует, единственна, но не доставляет экстремума.*

$$J\left(x(t)\right) = \int\limits_0^{3\pi/2} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt \to \inf; \quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Решение:

1. Уравнение Эйлера: $\ddot{x} + x = 0$.
2. Общее решение: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

3. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x} \equiv 0$.

4. Докажем, что эта экстремаль не доставляет экстремума в задаче.

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{2t}{3}$. Очевидно, что x_n — допустимые функции и $x_n(t) \to \hat{x} \equiv 0$ в $C^1\left([0, \frac{3\pi}{2}]\right)$, но при этом

$$J\left(x_n(t)\right) = \frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) = -\frac{5\pi}{12n^2} < 0 = J\left(x(t)\right).$$

Задача с закрепленными концами в случае нескольких неизвестных функций

2 Функционалы, зависящие от нескольких функций.

Постановка задачи: На каких функциях $y_1, y_2, \ldots, y_n$ может достигаться экстремум функционала

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

при заданных граничных условиях:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$
$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \ldots, \quad y_n(x_1) = y_{n1}.$$

Решение: Сначала будем варьировать лишь одну из функций

$$y_j(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

а остальные оставляя неизменными. Поэтому функционал превратиться в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx}F_{y'_j} - F_{y_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как это рассуждение применимо для любой функции y_j, то мы получим систему n дифференциальных уравнений второго порядка, решением которой является $2n$ – параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве $x, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Распространение света в неоднородной среде

1°. *Распространение света в неоднородной среде.* Пусть пространство заполнено оптически неоднородной средой так, что в каждой точке пространства скорость распространения света есть некоторая функция $v(x, y, z)$. Согласно принципу Ферма свет идет из одной точки в другую по кривой, для которой время прохождения будет наименьшим.

Пусть линия, соединяющая две точки A и B, задана уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$. Следует минимизировать функционал

$$I(y, z) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}}=0.$$

Получаем дифференциальные уравнения линий распространения света

Задача о геодезических линиях

2°. *Геодезические линии.* Рассмотрим некоторую поверхность, заданную векторным уравнением в параметрической форме: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Линия минимальной длины, соединяющая две точки заданной поверхности и сама лежащая на поверхности, называется *геодезической.*

Линия, лежащая на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, может быть задана параметрическими уравнениями $u = u(t), v = v(t)$. Чтобы получить уравнение геодезической линии, следует минимизировать функционал

$$I(u, v) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt,$$

где

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\
F &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right), \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0,$$

$$\frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0.$$

В качестве примера рассмотрим круговой цилиндр

$$\mathbf{r} = (a\cos\phi, a\sin\phi, z).$$

и найдем геодезические линии в этом цилиндре. Тут роль параметров u и v играют ϕ и z.

Тогда первая квадратичная форма цилиндра имеет следующие коэффициенты:

Коэффициенты E, F, G равны соответственно: $E = a^2, F = 0, G = 1$. Функционал имеет вид

$$I(\phi, z) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}dt,$$

а система уравнений Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\frac{a^2\dot{\phi}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} = 0.$$

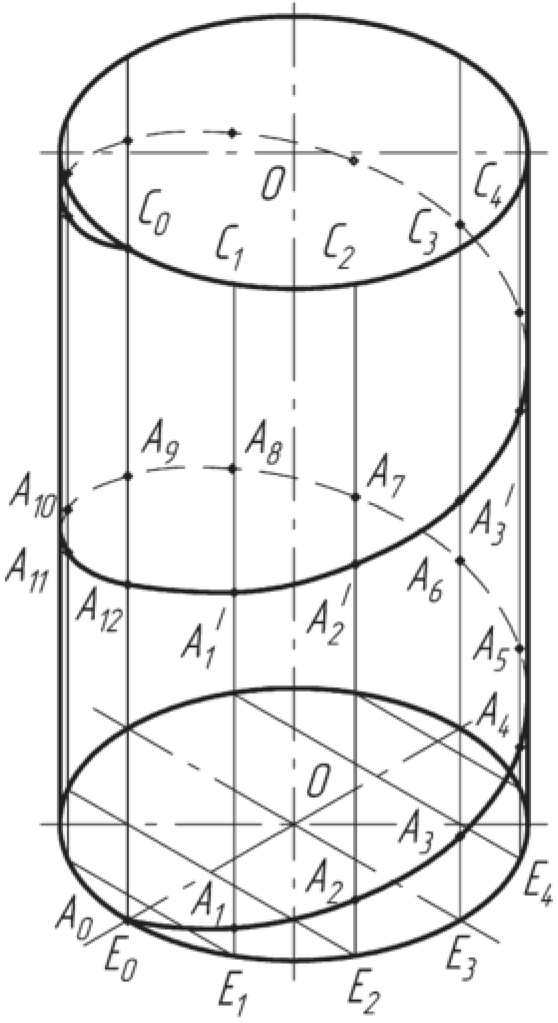
Отсюда

$$\frac{a^2\dot{\phi}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} = C_1, \qquad \frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} = C_2.$$

Окончательно получаем уравнение

$$\frac{dz}{d\phi} = C \qquad \Longrightarrow \qquad z = C\phi + A,$$

т.е. геодезичемкая линия на прямом круговом цилиндре — это винтовая линия.



Принцип наименьшего действия

3°. *Принцип наименьшего действия.* Рассматривается система из n материальных точек с массами m_i, декартовы координаты которых (x_i, y_i, z_i). Пусть система является консервативной и ее потенциальная энергия равна

$$U = U(t, x_i, y_i, z_i).$$

Пусть на систему наложены k голономных связей

$$f_\nu(t, x_i, y_i, z_i) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, k.$$

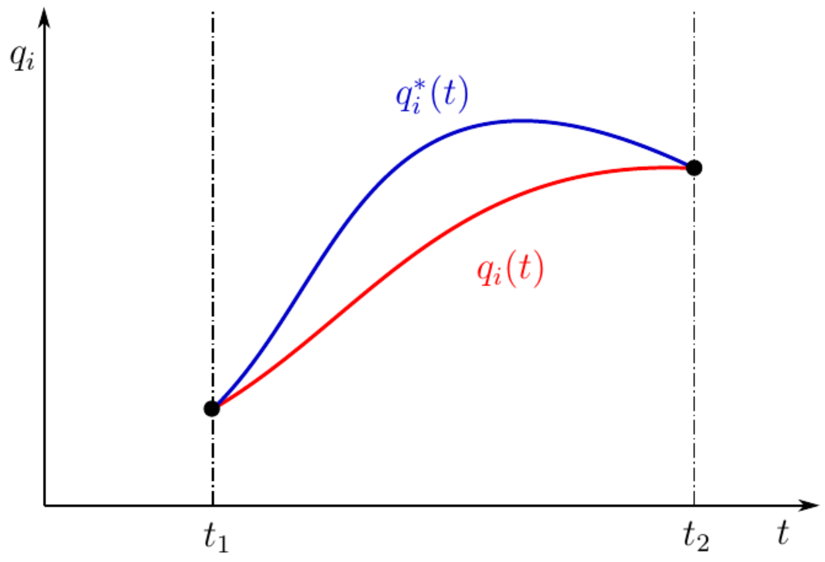
Таким образом, состояние системы можно определить с помощью $m = 3n - k$ обобщенных координат. Выразим $3n$ декартовых координат через m обобщенных:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, \ldots, q_m), \\ y_i &= y_i(q_1, \ldots, q_m), \\ z_i &= z_i(q_1, \ldots, q_m). \end{aligned}$$

Найдем T — кинетическую энергию системы как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей, а также U — потенциальную энергию как функцию обобщенных координат:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2 = T(t, q, \dot{q}), \qquad U = U(t, q)$$

Рассмотрим функцию Лагранжа $L = T - U$, зависящую от обобщенных координат и обобщенных скоростей. Предположим, что вектор $q^0 = q(t_0)$ определяет состояние системы в момент времени t_0.



Принцип наименьшего действия. Движение системы на промежутке времени $[t_1, t_2]$ описывается теми функциями $q_i(t)$, которые доставляют экстремум функционалу

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt.$$

Следовательно, экстремали необходимо должны удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Получили уравнения Лагранжа второго рода.