Лекция 4

- Задача с функционалами, зависящими от производных старших порядков
- Задача с подвижными концами
- Изопериметрические задачи
- Задача Больца

Задача с функционалами, зависящими от производных старших порядков (ЗССП)

Задачей со старшими производными (ЗССП) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \to \text{extr}, \qquad (4.1)$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_j^k, k = 0, 1, \ldots, n-1, j = 0, 1. \qquad (4.2)$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция $n+1$ переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (4.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих условиям (4.2) на концах отрезка $[t_0, t_1]$. Такие функции называют ***допустимыми***.

Введем норму в пространстве $C^n([t_0,t_1])$:

$$\|x\|_n = \|x\|_{C^n([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C, \ldots, \|x^{(n)}\|_C\right\},$$

где

$$\|x\|_C := \max_{t_0\le t\le t_1}\{|x(t)|\}.$$

Определение 9. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (4.1), (4.2) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (4.1)), *если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, для которой

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_n < \delta.$$

Определение 10. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче (4.1), (4.2)* ($\widehat{x} \in wlocmin$ (4.1)), *если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Если в качестве множества допустимых функций выбрать множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, t_1]$ ($x \in KC^1[t_0, t_1]$), удовлетворяющих краевым условиям (4.2), то ЗССП (4.1)–(4.2) исследуют на сильный экстремум с нормой $\|x\|_{n-1}$.

Уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \widehat{f}_{x^{(k)}}(t) = 0$$

называют ***уравнением Эйлера-Пуассона***.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера-Пуассона называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (1.2), называются ***допустимыми экстремалями*** в ЗССП (4.1)–(4.2).

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0,\ \forall t \ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} > 0,\ \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=0}^{n} A_{ij} x^{(i)} x^{(j)} dt, \;\; A_{ij}(t) = \widehat{f}_{x^{(i)} x^{(j)}}(t)$$

называют ***уравнением Якоби*** для задачи (4.1) на экстремали $x(\cdot)$.

Для квадратичного функционала, имеющую "диагональную" форму

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

уравнение Якоби примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(A_k x^{(k)}\right) = 0.$$

Пусть на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h уравнения Якоби, для которого

$$h^{(i)}(t_0) = h^{(i)}(\tau) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — это линейное уравнение $2n$-го порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно старшее производной. Пусть $h_1(\cdot), \ldots, h_n(\cdot)$ — решение уравнения Якоби, для которых $H(t_0) = \mathbf{O}$, а $H^{(n)}(t_0)$ — невырожденная матрица, где

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & \ldots & h_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(n-1)}(t) & \ldots & h_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$H^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(n)}(t) & \ldots & h_n^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(2n-1)}(t) & \ldots & h_n^{(2n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Точка τ является сопряженной к t_0 тогда и только тогда, когда матрица $H(\tau)$ является вырожденной.

Алгоритм решения

1. Записать *необходимое условие экстремума первого порядка* — *уравнение Эйлера-Пуассона*:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k f_{x^{(k)}} = 0.$$

   Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера-Пуассона, удовлетворяющие краевым условиям на концах.

2. Проверить на допустимых экстремалях *необходимые и достаточные условия высших порядков*.

а) Проверить выполнение условия *Лежандра*.

Если не выполнено условия Лежандра, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Лежандра, то перейти к проверке условия Якоби.

б) Проверка *условия Якоби*.

Если не выполнено условия Якоби, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Якоби и при этом интегрант f квазирегулярен, то найденная допустимая экстремаль доставляет сильный минимум в задаче (4.1)–(4.2).

Если не выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то нижняя грань равна $-\infty$.

Если выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

3. Если проверка необходимых и достаточных условий 2-го порядка затруднена, то можно провести исследование при помощи определения экстремума.

Пример

Решить следующую экстремальную задачу

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^{T_0} \left(\ddot{x}^2 - \dot{x}^2\right) dt \to \min,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие — уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\ddot{\ddot{x}} + \ddot{x} = 0.$$

2. Общее решение уравнение Эйлера-Пуассона:

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 t + C_4.$$

Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль $\widehat{x} = 0$.

3. Проверяем достаточное условие:

   а) Усиленное условие Лежандра выполнено:

$$\widehat{f}_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2 > 0, \ \forall t \in [0, T_0].$$

   б) Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби имеет вид

$$h^{(4)} + h^{(2)} = 0.$$

   Положим, что

$$h_1(t) = 1 - \cos t, h_2 = \sin t - t,$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ \dot{h}_1(t) & \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \sin t - t \\ \sin t & \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $H(0) = 0$,

$$\det \ddot{H}(0) = \det \begin{pmatrix} \ddot{h}_1(0) & \ddot{h}_2(0) \\ \dddot{h}_1(0) & \dddot{h}_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Найдем сопряженные точки, решая уравнение $\det H(\tau) = 0$. Имеем

$$2(\cos\tau - 1) + \tau\sin\tau = 0 \Longleftrightarrow \sin\frac{\tau}{2} = 0, \frac{\tau}{2} = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}.$$

Ближайшая к нулю точка: $\tau = 2\pi$.

Ответ: Если $T_0 < 2\pi$, то $\widehat{x}(t) = 0$ — единственная допустимая экстремаль, доставляющая абсолютный минимум, $J_{\min} = J(0) = 0$. Если $T_0 > 2\pi$, точная нижняя грань функционала равна $-\infty$. Можно показать, что при $T_0 = 2\pi$ допустимые экстремали имеют вид $\widehat{x}(t) = C(1 - \cos t)$ и все они доставляют абсолютный минимум.

Задача с подвижными концами

Задачей с подвижными концами называется следующая экстремальная задача:

$$J(\xi) = J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr \tag{5.1}$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0,\ i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $\triangle$ — заданный отрезок, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$.

Элемент $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ называется ***допустимым***, если $x \in C^1(\triangle)$, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$, и выполняется условие (5.2) на концах.

Определение 11. *Допустимый элемент* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *доставляет* ***слабый локальный минимум****, если существует* $\delta > 0$ *такой, что для любого допустимого элемента* $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$*, для которого*

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta,\ |t_0 - \widehat{t}_0| < \delta,\ |t_1 - \widehat{t}_1| < \delta$$

выполняется

$$J(\xi) \geq J(\widehat{\xi}).$$

Алгоритм решения

Выписать: ***интегрант задачи***

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}),$$

терминант **задачи**

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Записать необходимые условия:

   а) *условие стационарности по x — уравнение Эйлера для интегранта L*

   $$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i}(t) + L_{x_i}(t) = 0, \ \forall t \in \triangle;$$

   б) *условия трансверсальности* для l

   $$L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)},$$

   $$L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)};$$

   в) *условие стационарности по подвижным концам*

   $$\mathcal{L}_{t_0} = \mathcal{L}_{t_0}(t_0) = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 f(t_0) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

   $$\mathcal{L}_{t_1} = \mathcal{L}_{t_1}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 f(t_1) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0.$$

   Отметим, что это условие выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования.

Найти допустимые экстремали. Рассмотреть два случая $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$ (за λ_0 можем брать любую константу, при исследовании задачи на минимум берем $\lambda_0>0$). И учитывать, что множители Лагранжа одновременно не могут обращаться в ноль.

2. Показать, что найденные в пункте 1 допустимые экстремали доставляют экстремум или нет.

Примеры

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T \dot{x}^2 - x + 1 dt \to extr,$$

$$x(0) = 0.$$

Решение

Имеем: интегрант задачи $L(t) = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$, терминант задачи $l(t) = \lambda_1 x(0)$, функция Лагранжа $\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)dt + \lambda_1 x(0)$.

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера для лагранжиана

   $$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

   б) трансверсальности по x для терминанта

   $$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1,$$

   $$L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(T) = 0;$$

   в) условие стационарности по подвижному концу T

   $$\mathcal{L}_T(T) = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из б) следует, что $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Значит в этом случае решения нет. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда условия а)-в) записываются следующим образом

$$-2\ddot{x} - 1 = 0,\ \dot{x}(T) = 0, x(T) = 1.$$

Общее решение уравнение Эйлера

$$x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Неизвестные C_1, T находим из условий трансверсальности

$$\begin{cases} -\frac{T}{2} + C_1 = 0, \\ -\frac{T^2}{4} + C_1 T = 1. \end{cases}$$

2. Отсюда $C_1 = 1$, $T = 2$. Таким образом, в задаче имеется единственный допустимый экстремальный элемент $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{T}) = (-\frac{t^2}{4} + t, 2)$.

3. Возьмем элемент $\widehat{\xi} = (-\frac{t^2}{4} + t, T)$. Тогда

$$J(\xi) = \int\limits_0^T \left(\left(-\frac{t}{2}+1\right)^2 - \left(-\frac{t^2}{4}+t\right)+1\right)dt = \int\limits_0^T \left(\frac{t}{2}-1\right)^2 dt,$$

$$J(\widehat{\xi}) = \int\limits_0^2 \left(\frac{t}{2}-1\right)^2 dt.$$

Очевидно, что $J(\xi) > J(\widehat{\xi})$ при $T > \widehat{T}$ и $J(\widehat{\xi}) < J(\xi)$ при $T < \widehat{T}$, поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная величина. Это означает, что в любой окрестности $\widehat{\xi}$ существует другой допустимый элемент, на котором значение функционала J как больше, так и меньше значения функционала J в точке $\widehat{\xi}$, т.е. $\widehat{\xi}$ не доставляет локального экстремума.

Изопериметрические задачи

Изопериметрической задачей (ИЗ) называется следующая экстремальная задача:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \text{extr}, \tag{3.1}$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \gamma_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \tag{3.3}$$

где $f_i = f_i(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данные функции трех переменных. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (3.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих ***изопериметрическим*** условиям (3.2) и ***условиям на концах*** (3.3), такие функции называются ***допустимыми*** в ИЗ.

Определение 7. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* **слабый локальный минимум** *в задаче (3.1) − −(3.3) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (3.1)), если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, для которой

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение 8. *Допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* **слабый абсолютный минимум** *в задаче (3.1)-(3.3) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (3.1)), если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Лагранжианом задачи называется функция

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}).$$

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0, \ \forall t \ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0, \ \forall \ t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i = 0,$$

где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи (3.1) на экстремали $\widehat{x}$.

Пусть на экстремали $\widehat{x}$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h решение неоднородного уравнения Якоби, для которого

$$\int\limits_0^{\tau} g_i(t)h(t)dt = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ h(t_0) = h(\tau) = 0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Если функции

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t), \ i = \overline{1, m}$$

линейно независимы, то говорят, что выполнено условие ***регулярности***.

Алгоритм решения

1. Выписать *необходимое условие экстремума первого порядка* — *уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \qquad (3.4)$$

для *лагранжиана* задачи

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ — вектор, так называемых, множителей Лагранжа, *одновременно не обращающихся в ноль*.

Найти решение $\widehat{x}(t)$ уравнения (3.4), удовлетворяющие условиям (3.2) и (3.3), т.е. допустимые экстремали в данной задаче. При этом необходимо рассмотреть случаи

$$\lambda_0 = 0 \text{ и } \lambda_0 \neq 0.$$

Во втором случае λ_0 выбирается произвольно.

2. Для каждой допустимой экстремали проверить *необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.*

   2.1 Проверить выполнение *условия Лежандра*:

      а) если условие Лежандра не выполнено, не выполнено необходимое условие слабого экстремума, т.е. $\widehat{x}$ не доставляет локального экстремума задачи;

      б) если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке условия Якоби.

2.2 Проверка *условия Якоби.*

Дадим аналитическое средство нахождения сопряженных точек для случая, когда функции g_i, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы на отрезках $[\tau_0, \tau_1]$, $t_0 \le \tau_0 < \tau_1 \le t_1$. Пусть h_0 — решение однородного уравнения Якоби ($\mu_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$) с краевыми условиями

$$h_0(t_0) = 0, \dot{h}_0(t_0) = 1;$$

h_j — решение неоднородного уравнения Якоби ($\mu_i = 0$, $i \ne j$), и краевыми условиями

$$h_j(t_0) = 0, \dot{h}_j(t_0) = 0, \ j = 1, \ldots, m.$$

Точка τ является сопряженной тогда и только тогда, когда матрица

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} h_0(\tau) & \dots & h_m(\tau) \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_1 dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_1 dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_m dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_m dt \end{pmatrix}$$

является вырожденной.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие экстремума, следовательно, $\widehat{x}$ — не доставляет локального экстремума.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то проверяем условие регулярности.

2.3 Проверка *условия регулярности.*

Если условие регулярности выполнено, то на $\widehat{x}$ выполнены достаточное условие слабого минимума.

3. Если проверка достаточных и необходимых условий второго порядка затруднена, то допустимую экстремаль можно исследовать на экстремум с помощью его определения.

4. Если в задаче (3.1) функционал J_0 квадратичен

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(A_0\dot{x}^2 + B_0x^2\right) dt,$$

функционалы J_i линейны

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (a_i\dot{x} + b_ix)dt = \gamma_i,\ i = \overline{1, m},$$

причем функции $A_0, a_1, \ldots, a_m$ непрерывно дифференцируемы, функции $B_0, b_1, \ldots, b_m$ непрерывны и выполнено условие Лежандра и условие регулярности. Тогда, если не выполнено условие Якоби, то нижняя грань в задаче равна $-\infty$. Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

Примеры

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J_0(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt \to \inf,$$

$$J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 xe^{-t}dt = \frac{1-3e^{-2}}{4}, \qquad (3.2')$$

$$x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{e}. \qquad (3.3')$$

Решение

1. Для лагранжиана задачи

$$L = \lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) + \lambda_1 xe^{-t}$$

выпишем необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -2\lambda_0\ddot{x} + 2\lambda_0 x + \lambda_1 e^{-t} = 0. \qquad (3.5)$$

Найдем решение дифференциального уравнение (3.5), удовлетворяющего условиям (3.2′), (3.3′).

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из (3.5) мы получим, что $\lambda_1 = 0$, т.е. все множители Лагранжа одновременно обращаются в ноль. Значит необходимое условие экстремума не выполнено.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Имеем

$$\ddot{x} - x = \lambda_1 e^{-t}.$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 t e^{-t}.$$

Константы C_1, C_2, λ_1 найдем из имеющих условий.

Получим, что имеется допустимая экстремаль

$$\widehat{x}(t) = te^{-t}.$$

2. Проверим необходимые и достаточные условия второго порядка.

2.1 Проверим выполнение условия Лежандра

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(\widehat{x}) = 2 > 0.$$

Выполнено усиленное условие Лежандра и значит, переходим к проверке условий Якоби.

2.2 Уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\widehat{L}_{xx}(t)h(t)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i = 0,$$

где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ в нашем случае примет вид

$$\ddot{h} + h + \mu_1 = 0.$$

Найдем решение h_0 однородного уравнения Якоби

$$\ddot{h} + h = 0$$

с условиями $h_0(0) = 0, \dot{h}_0(0) = 1$. Имеем

$$h_0 = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Найдем решение h_1 неоднородного уравнения Якоби

$$\ddot{h} + h + 1 = 0$$

с условиями $h_1(0) = 0, \dot{h}_1(0) = 0$. Получим

$$h_1(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}.$$

Матрица H имеет вид

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} \\ \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\tau}\right) d\tau & \int\limits_0^t \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2\tau} - \frac{1}{4}\tau e^{-2\tau}\right) d\tau \end{pmatrix}.$$

Сопряженные точки — это решения уравнения

$$\det H(\tau) = 0.$$

Легко получить, что

$$\tau = 0.$$

Следовательно, точек сопряженных к 0 в полуинтервале $(0, 1]$ нет, а значит усиленное Якоби выполнено.

2.3 Очевидно, что условие регулярности выполнено, т.к. в нашем случае $m = 1$ и $g_1 = 1$.

Таким образом, $\widehat{x}(t) \in wlocmin$

4. Поскольку функционал J_0 квадратичен, а J_1 — линеен, то $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный экстремум.

Ответ: $\widehat{x}(t) = te^{-t} \in absmin$.

Задача Больца

Задачей Больца (ЗБ) называется следующая экстремальная задача:

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (2.1)$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция трех переменных, а $\psi = \psi(x_0, x_1)$ — данная функция двух переменных. Функцию f называют ***интегрантом***, функцию ψ — ***терминантом***, функционал $\mathcal{B}$ — ***функционалом Больца***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Задачу Больца рассматриваем в слабой постановке, т.е. экстремум функционала (2.1) ищем среди непрерывно дифференцируемых функций, которые в данной задаче будут ***допустимыми***.

Определение 5. *Функция* $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (2.1) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (2.1)), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$, *для которой*

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение 6. *Функция* $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ *доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче (2.1)* ($\widehat{x} \in wlocmin$ (2.1)), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$.

Алгоритм решения

1. Выписать *необходимые условия экстремума первого порядка*:

   а) *уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}} + \widehat{f}_x = 0;$$

   б) *условия трансверсальности*

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{\psi}_{x(t_0)},$$

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x(t_1)}.$$

Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие условиям трансверсальности.

2. Показать используя определение, что решением является одна из допустимых экстремалей или, что решения нет.

Замечание. В векторном случае $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, *необходимыми условиями* являются:

а) *система уравнений Эйлера*

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}_i} + f_{x_i} = 0, \;\; i = \overline{1, n};$$

б) *условия трансверсальности*

$$\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{\psi}_{x_i(t_0)}, \;\; i = \overline{1, n},$$

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x_i(t_1)}, \;\; i = \overline{1, n}.$$

Примеры

А) Найти решения следующей экстремальной задачи

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \inf .$$

Отметим, что в нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x, \ \psi(x(0), x(1)) = x^2(1).$$

Решение

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Longleftrightarrow 2\ddot{x}^2 + 1 = 0;$$

б) условия трансверсальности

$$f_{\dot{x}}(0) = \psi_{x(0)} \Longleftrightarrow \dot{x}(0) = 0,$$

$$f_{\dot{x}}(1) = -\psi_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\dot{x}(1) = -2x(1) \Longleftrightarrow \dot{x}(1) + x(1) = 0.$$

Общее решение уравнение Эйлера

$$x(t) = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

Из условий трансверсальности находим, что $C_1 = 0, C_2 = 3/4$. Таким образом имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$.

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$, то $\widehat{x}(t) + h(t)$ — произвольная допустимая точка в ЗБ и

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int\limits_0^1 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt - \int\limits_0^1 h dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$ получим

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2\ddot{\widehat{x}} + 1)hdt +$$

$$+ \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1) = \int\limits_0^1 h^2 dt + h^2(1) \geq 0.$$

В итоге имеем, что

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) \geq 0$$

при любом выборе функции h, т.е. $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x} = (3 - t^2)/4 \in absmin.$

В) Найти решения следующей экстремальной задачи

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x \sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \inf .$$

В нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 4x \sin t,$$

а

$$\psi(x(0), x(1)) = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi).$$

1. Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} 2\dot{x} + 2x - 4 \sin t = 0 \Longleftrightarrow 2\ddot{x}^2 - x = -2 \sin t;$$

б) условия трансверсальности

$$\begin{cases} 2\dot{x}(0) = 4x(0), \\ 2\dot{x}(\pi) = -2 + 2x(\pi), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 2x(0), \\ \dot{x}(\pi) = x(\pi) - 1. \end{cases}$$

Получим допустимую экстремаль

$$\widehat{x}(t) = e^t + \sin t.$$

2. Пусть $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$. Тогда

$$B(\widehat{x}(t) + h(t)) - B(\widehat{x}(t)) =$$

$$= \int\limits_0^\pi (\dot{\widehat{x}} + \dot{h})^2 + (\widehat{x} + h)^2 - 4(\widehat{x} + h)\sin t dt + \int\limits_0^\pi \dot{\widehat{x}}^2 + \widehat{x}^2 - 4\widehat{x}\sin t dt +$$

$$+2(\widehat{x}(0)+h(0))^2+2(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))-(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))^2-2\widehat{x}(0)^2-2\widehat{x}(\pi)+\widehat{x}(\pi)^2 =$$

$$= \int\limits_0^\pi 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^\pi \dot{h}^2 dt + 2\int\limits_0^\pi \widehat{x}hdt + \int\limits_0^\pi h^2 dt - 4\int\limits_0^\pi h\sin t dt +$$

$$+4\widehat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\widehat{x}(\pi)h(\pi) + h^2(\pi) =$$

$$= 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^\pi - 2\int\limits_0^\pi \ddot{\widehat{x}}hdt + \int\limits_0^\pi \dot{h}^2 + 2\int\limits_0^\pi \widehat{x}hdt + \int\limits_0^\pi h^2 dt -$$

$$-4\int\limits_0^\pi h\sin t dt + 4\widehat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\widehat{x}(\pi)h(\pi) + h^2(\pi).$$

Учитывая, что

$$\dot{\widehat{x}} = e^t + \cos t,\ \ddot{\widehat{x}} = e^t - \sin t,$$

имеем

$$-2\int\limits_0^\pi \ddot{\widehat{x}} h dt + 2\int\limits_0^\pi \widehat{x} h dt - 4\int\limits_0^\pi h \sin t dt = 0$$

и

$$2\dot{\widehat{x}}(\pi)h(\pi) - \dot{\widehat{x}}(0)h(0) = -4\widehat{x}(0)h(0) - 2h(\pi) + 2\widehat{x}(\pi)h(\pi).$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int\limits_0^\pi \dot{h}^2 dt + \int\limits_0^\pi h^2 + 2h^2(0) + h^2(\pi) \geq 0$$

для любых допустимых функций $\widehat{x} + h \in C^1[0, \pi]$. Следовательно,

$$\widehat{x}(t) = e^t + \sin t$$

доставляет слабый абсолютный минимум в задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = e^t + \sin t \in absmin.$