Лекция 5

Задача Лагранжа.

1. Связанные задачи вариационного исчисления: сведение задач Лагранжа и Больца к задаче Майера.

1. Принцип Лагранжа – правило сведения задачи с ограничениями к некоторой элементарной задаче.

1. Постановка задачи оптимального управления.

Задача Лагранжа

Пусть n — фиксированное натуральное число, $k, m \geq 0$ — целые, причем $k \leq n$, f_i, $i = \overline{0,m}$, ψ_i, $i = \overline{0,m}$, φ_i, $i = \overline{0,k}$ — известные функции своих аргументов, $\triangle$ — заданный отрезок числовой прямой,

$$t_0, t_1 \in \triangle^\circ, t_0 < t_1, x(\cdot) \equiv (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in C_n^1(\triangle),$$

$$\xi = (x(\cdot), t_0, t_1), ||\xi|| = \max\{||x||_1, |t_0|, |t_1|\}.$$

Зададим функционалы

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),\ i = \overline{0,m}.$$

Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме называется следующая экстремальная задача:

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \to \inf \tag{6.1}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) \leq 0, i = \overline{1, m'}, \tag{6.2}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = 0,\ i = \overline{m' + 1, m}, \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(t, x(t)),\ j = \overline{1, k}, \tag{6.4}$$

(6.4) — называется дифференциальной связью.

Определение 12. *Допустимая точка* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ *в задаче* (*6.1*) *–* (*6.4*) *доставляет* ***слабый локальный минимум (максимум)****, если существует* $\delta > 0$*, что для любой допустимой функции* $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ *для которой*

$$\|\xi - \widehat{\xi}\| < \delta$$

выполняется

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi}) \quad \left(\mathfrak{B}_0(\xi) \leq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi})\right).$$

Алгоритм решения

Выписать ***лагранжиан задачи***:

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=0}^{k} p_j(\cdot)(x_j - \varphi),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$ — вектор множителей; ***терминант*** задачи

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t, x, \dot{x});$$

функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Выписать *необходимые условия*:

   а) *условие стационарности для лагранжиана задачи по* x

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, i = \overline{1, m}; \tag{6.5}$$

   б) *условия трансверсальности*

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{l}_{x_i(t_0)}, i = \overline{1, m},$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\widehat{l}_{x_i(t_1)}, i = \overline{1, m};$$

в) *условие стационарности по подвижным концам*

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_0} = \mathcal{L}_{t_0}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow -f(t_0) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_1} = \mathcal{L}_{t_1}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow f(t_1) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0;$$

Отметим, что условия выписывается только для подвижных концов.

г) *условие дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i \mathfrak{B}_i(\widehat{\xi}) = 0, i = \overline{1, m'};$$

д) *условие неотрицательности*

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m'}, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \neq 0.$$

Условия а)-д) дают множество допустимых экстремалей задачи (6.1)–(6.4) в слабой постановке.

2. Показать, что допустимые экстремали доставляют экстремум функционалу $\mathfrak{B}_0$ или решений нет.

Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$\mathfrak{B}_0(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr,$$

$$\mathfrak{B}_1(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x dt = 0, \ x(1) = 1.$$

Решение

Записываем лагранжиан задачи

$$L(t) = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x;$$

терминант задачи

$$l(t) = \lambda_2(x(1) - 1);$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x dt + \lambda_2(x(1) - 1).$$

1. Выпишем необходимые условия:

   a) для лагранжиана уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0; \tag{6.6}$$

б) трансверсальности по x для терминанта

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(0) = 0$$

$$L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(1) = -\lambda_2.$$

Так как концы фиксированы и нет ограничений типа неравенств, то отсутствуют условия в), г) и д).

2. Если $\lambda_0 = 0$, то из а) $\lambda_1 = 0$, а из б) $\lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Следовательно, решения нет. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\ddot{x} = \lambda_1.$$

Общее решение: $x = C_1t^2 + C_2 + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условия трансверсальности и условий, входящих в постановку задачи. Имеем

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_3 = 1, \\ \frac{C_1}{3} + C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = 0$, $C_3 = -1/2$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль

$$\widehat{x} = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

3. Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\widehat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0,1])$ такую, чтобы $\widehat{x} + h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(1) = 0$ и $\int\limits_0^1 h dt = 0$. Тогда

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x} + h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 (\dot{\widehat{x}} + \dot{h})^2 dt - \int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}^2 dt = 2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h} dt + \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2 dt.$$

Интегрируя первый интеграл по частям с учетом условия на h и условия трансверсальности $\dot{\widehat{x}}(0) = 0$, получим

$$2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h} dt = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \ddot{\widehat{x}} h dt = -6\int\limits_0^1 h dt = 0.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x}+h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2\, dt \geq 0$$

или

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x}+h) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{x})$$

для любой допустимой точки $\widehat{x}+h$, т.е. $\widehat{x} = \frac{3t^2-1}{2}$ доставляет абсолютный минимум в данной задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = \frac{3t^2-1}{2} \in absmin.$

Принцип Лагранжа – правило сведения задачи с ограничениями к некоторой элементарной задаче.

4.1. Задачи с ограничениями-равенствами

Пусть $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — дифференцируемые функции n действительных переменных. *Задачей на условный экстремум* (*с ограничениями-равенствами*) называется задача

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0. \tag{1.2}$$

Точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют равенствам $f_k(\widehat{x}) = 0$, $k = \overline{1, m}$, называются *допустимыми* в задаче (1.2). Допустимая точка $\widehat{x}$ даёт локальный минимум (максимум) задачи (1.2), если существует такое число $\delta > 0$, что для всех допустимых $x \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют условиям $f_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\|x - \widehat{x}\| < \delta$, выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(\widehat{x}) \quad (f(x) \leqslant f(\widehat{x})).$$

Основным методом решения задач на условный экстремум является *метод неопределенных множителей Лагранжа*. Он базируется на том факте, что условный экстремум в задаче (1.2) достигается в точках, которые являются критическими в задаче на *безусловный экстремум*

$$L(x, \lambda, \lambda_0) \to \text{extr},$$

где $L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)$ — *функция Лагранжа*, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множители Лагранжа*.

Теорема 1.15 (Теорема Лагранжа). *Пусть $\widehat{x}$ — точка локального экстремума задачи* (1.2), *функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности U точки $\widehat{x}$. Тогда существуют одновременно не равные нулю множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что выполняется условие стационарности по x функции Лагранжа*

$$L'_x(\widehat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial L(\widehat{x}, \lambda, \lambda_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для того чтобы $\lambda_0 \neq 0$, достаточно, чтобы векторы $f'_1(\widehat{x}), \ldots, f'_m(\widehat{x})$ были линейно независимыми.

Чтобы доказать теорему, используем теорему об обратной функции в конечномерном пространстве.

Теорема 1.16 (Теорема об обратной функции). *Пусть* $F_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s)$ *— s функций s переменных, непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности точки* $\widehat{x}$*, и якобиан*

$$\det\left\{\frac{\partial F_i(\widehat{x})}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{s}$$

не равен нулю. Тогда существуют числа $\varepsilon > 0$*,* $\delta > 0$*,* $K > 0$ *такие, что для любого* $y = (y_1, \ldots, y_s)$*,* $\|y\| \leqslant \varepsilon$*, можно найти* $x = (x_1, \ldots, x_s)$ *такое, что выполняются условия* $\|x\| < \delta$*,* $F(\widehat{x} + x) = F(\widehat{x}) + y$*,* $\|x\| \leqslant \leqslant K\|y\|$*.*

Доказательство.

Докажем теорему Лагранжа методом от противного. Предположим, что условие стационарности

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0$$

не выполняется и векторы $f_i'(\widehat{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, линейно независимы. Это значит, что ранг матрицы

$$A = \left\{\frac{\partial f_i(\widehat{x})}{\partial x_j}\right\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{0,m}}$$

равен $m+1$. Поэтому существует подматрица матрицы A размерности $(m+1)\times(m+1)$, определитель которой не равен нулю. Пусть это будет матрица, составленная из первых $m+1$ столбцов матрицы A. Построим функцию $F\colon \mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$ при помощи функций $f_k(x)$, $k=0,\ldots,m$. Пусть

$$F_1(x_1,\ldots,x_{m+1}) = f_0(x_1,\ldots,x_{m+1},\widehat{x}_{m+2},\ldots,\widehat{x}_n) - f_0(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n),$$
$$F_k(x_1,\ldots,x_{m+1}) = f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{m+1},\widehat{x}_{m+2},\ldots,\widehat{x}_n), k=2,\ldots,m+1.$$

Здесь $x_1,\ldots,x_{m+1}$ — переменные, а $\widehat{x}_{m+2},\ldots,\widehat{x}_n$ — фиксированные величины. Если $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)$ — решение задачи на условный экстремум, то $F(\widehat{x})=0$. Функции $F_k(x_1,\ldots,x_{m+1})$, $k=1,\ldots,m+1$, удовлетворяют условиям теоремы об обратной функции. Возьмём $y = (\varepsilon,0,\ldots,0)$. Для достаточно малых по модулю значений ε существует вектор $\overline{x}(\varepsilon)=(x_1(\varepsilon),\ \ldots,\ x_{m+1}(\varepsilon))$ такой, что

$$\begin{gathered} F_1(\overline{x}(\varepsilon))=\varepsilon,\\ F_k(\overline{x}(\varepsilon))=0,\\ k=\overline{2,m+1}, \end{gathered}$$

то есть

$$\begin{gathered} f_0(x(\varepsilon))-f_0(\widehat{x})=\varepsilon,\\ f_k(x(\varepsilon))=0,\\ k=\overline{1,m}, \end{gathered}$$

где $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \widehat{x}_{m+2}, \ \ldots, \widehat{x}_n)$ и $\|x(\varepsilon) - \widehat{x}\| < K|\varepsilon|$. А это противоречит тому, что $\widehat{x}$ — решение задачи на условный экстремум (1.2), поскольку как при положительных, так и при отрицательных значениях ε существуют близкие к $\widehat{x}$ векторы, на которых функционал $f_0(x(\varepsilon))$ принимает значения как меньше, так и больше $f_0(\widehat{x})$. Теорема доказана. ■

Таким образом, для определения $m+n+1$ неизвестных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\widehat{x}_1, \ \ldots, \ \widehat{x}_n$ мы получили $n + m$ уравнений

$$f_1(\widehat{x}) = \cdots = f_m(\widehat{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(\widehat{x})\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Множители Лагранжа определены с точностью до пропорциональности. Если известно, что $\lambda_0 \neq 0$, то можно выбрать $\lambda_0 = 1$. Тогда количество уравнений и количество неизвестных одинаковое.

Линейная независимость векторов производных $f_1'(\widehat{x}), \ldots, f_m'(\widehat{x})$ есть то условие регулярности, которое гарантирует выполнение условия $\lambda_0 \neq 0$. Однако проверка этого условия сложнее, нежели непосредственная проверка того, что λ_0 не может быть равным нулю. Со времен Лагранжа, почти целое столетие, правило множителей использовалось с $\lambda_0 = 1$, несмотря на то, что в общем случае оно неверно.

Как и в случае безусловной задачи оптимизации, стационарные точки задачи на условный экстремум не обязательно являются её решением. Для таких задач также существуют необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах вторых производных. Обозначим через

$$L''_{xx}(x,\lambda,\lambda_0)=\left\{\frac{\partial^2 L(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial x_k \partial x_j}\right\}_{j=1,\,\ldots,\,n}^{k=1,\,\ldots,\,n}$$

матрицу вторых производных функции Лагранжа $L(x,\lambda,\lambda_0)$.

Теорема 1.17 (Необходимые условия второго порядка). *Пусть функции $f_i(x)$, $i=0,1,\ldots,m$, дважды дифференцируемы в точке $\widehat{x}$ и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности U точки $\widehat{x}$, причём градиенты $f_i'(\widehat{x}), i=1,\ldots,m$, линейно независимы. Если $\widehat{x}$ — локальный минимум задачи* (1.2), *то*

$$\langle L''_{xx}(\widehat{x},\lambda,\lambda_0)h,h\rangle \geqslant 0$$

для всех λ,λ_0, которые удовлетворяют условию

$$L'_x(\widehat{x},\lambda,\lambda_0)=0,$$

и всех $h\in\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\langle f_i'(\widehat{x}),h\rangle=0,\quad i=1,\ldots,m.$$

Теорема 1.18 (Достаточные условия второго порядка). *Пусть функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, дважды дифференцируемы в точке $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условиям*

$$f_i(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Допустим, что при некоторых λ, λ_0 выполняется условие

$$L'_x(\widehat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0$$

и, кроме того,

$$\langle L''_{xx}(\widehat{x}, \lambda, \lambda_0)h, h\rangle > 0$$

при всех ненулевых $h \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют условию

$$\langle f'_i(\widehat{x}), h\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $\widehat{x}$ — локальный минимум задачи (1.2).

Правило неопределенных множителей Лагранжа решения задач на условный экстремум с ограничениями-равенствами следующее.

1) Составить функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x).$$

2) Выписать необходимые условия экстремума функции $L(x, \lambda, \lambda_0)$ — уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L(x, \lambda, \lambda_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3) Найти стационарные точки, то есть решения этих уравнений при условии, что не все множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны нулю.

4) Найти решение задачи среди стационарных точек или доказать, что задача не имеет решений.

4.2. Задача с равенствами и неравенствами

Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции n действительных переменных. Задачей *на условный экстремум с равенствами и неравенствами* называется задача

$$\begin{aligned} f_0(x) &\to \inf, \\ f_i(x) &\leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ f_{m+k}(x) &= 0, \quad k = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Сформулируем необходимые условия минимума задачи (1.3).

Теорема 1.19 (Теорема о неопределенных множителях Лагранжа). *Пусть $\widehat{x}$ — точка локального минимума задачи* (1.3), *функции f_i, $i = 0, \ldots, m+s$, непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности U точки $\widehat{x}$. Тогда существуют одновременно не равные нулю множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+s}$ такие, что для функции Лагранжа*

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+s}) = \sum_{i=0}^{m+s} \lambda_i f_i(x)$$

выполняются условия:

1) *стационарности по x*

$$L_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial L(\widehat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

2) *дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

3) *неотрицательности*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Итак, *правило неопределенных множителей Лагранжа* решения задач на условный экстремум с равенствами и неравенствами следующее.

1) Составить функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m+s} \lambda_i f_i(x).$$

2) Записать необходимые условия:

а) стационарности

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

б) дополняющей нежёсткости

$$\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

в) неотрицательности

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

3) Найти критические точки, то есть все допустимые точки, которые удовлетворяют необходимым условиям с множителем Лагранжа $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$.

4) Найти решение задачи среди всех критических точек или показать, что решений нет.

Замечание 1. Пользуясь правилом неопределенных множителей Лагранжа решения задач на условный экстремум с ограничениями-равенствами, можно выбирать число λ_0 как положительное, так и отрицательное. Для задач, где присутствуют ограничения равенства и ограничения неравенства, знак λ_0 существенный.

Пример 1.2. Решить задачу на условный экстремум

$$x_1 \to \inf, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Решение. Единственным очевидным решением этой задачи есть точка $\widehat{x} = (0, 0)$. Решим задачу методом Лагранжа.

1) Составим функцию Лагранжа $L = \lambda_0 x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)$.

2) Запишем уравнения стационарности

$$L'_{x_1} = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda x_1 + \lambda_0 = 0,$$
$$L'_{x_2} = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda x_1 = 0.$$

3) Если $\lambda_0 = 1$, то получим уравнения

$$2\lambda x_1 + 1 = 0,$$
$$2\lambda x_2 = 0.$$

Первое уравнение несовместимо с условием $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Поэтому система уравнений

$$2\lambda x_1 + 1 = 0,$$
$$2\lambda x_2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

решений не имеет. Если $\lambda_0 = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ — решение системы уравнений.

Ответ: $(0, 0) \in \operatorname{absmin}$. $\triangle$

Пример 1.3. Решить экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \to \min, \qquad x_1^3 + x_2^3 = 1,$$

где $a > 0$ и $b > 0$ — заданные числа.

Решение.

1) Выпишем (регулярную) функцию Лагранжа (указанное в теореме 1.15 условие регулярности тут выполнено):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

2) Поскольку

$$L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = ax_1 + 3\lambda x_1^2, \quad L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = bx_2 + 3\lambda x_2^2,$$

то система уравнений для определения стационарных точек будет такой:

$$ax_1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \quad bx_2 + 3\lambda x_2^2 = 0 \quad x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

3) Эта система уравнений имеет три решения:

$$\left(0, 1, -\frac{b}{3}\right), \left(1, 0, -\frac{a}{3}\right), \left(\frac{a}{(a^3 + b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3 + b^3)^{1/3}}, -\frac{(a^3 + b^3)^{1/3}}{3}\right).$$

4) Далее, матрица вторых производных

$$L''_{xx}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Для указанных решений эта матрица примет, соответственно, вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Условие $\langle f_i'(\widehat{x}), h \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$, в данном случае имеет вид $3x_1^2 h_1 + 3x_2^2 h_2 = 0$. Для первых двух решений это означает, что $h_1 = 0$ и $h_2 = 0$ соответственно. Отсюда ясно, что матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют условиям теоремы 1.17 (хотя они не являются положительно определёнными). Поэтому точки $(0, 1)$, $(1, 0)$ — строгие локальные решения задачи. Для матрицы A_3 условие теоремы 1.17 не выполняется. Поэтому точка

$$\left(\frac{a}{(a^3 + b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3 + b^3)^{1/3}} \right)$$

не может быть решением задачи на минимум. Эта точка есть строгим локальным решением задачи максимизации той же функции при тех же ограничениях.

Ответ: $\widehat{x}_1 = (0, 1) \in \text{locmin}$, $\widehat{x}_2 = (1, 0) \in \text{locmin}$ ($\widehat{x}_3 = (a/(a^3 + b^3)^{1/3}, b/(a^3 + b^3)^{1/3}) \in \text{locmax}$). $\triangle$

Пример 1.4. Решить экстремальную задачу

$$\begin{gathered} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \inf; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{gathered}$$

Решение.

1) Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

2) Запишем необходимые условия:

а) стационарности

$$\begin{aligned} L'_{x_1} = 0 &\iff 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2} = 0 &\iff 2\lambda_0 x_2 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0, \\ L'_{x_3} = 0 &\iff 2\lambda_0 x_3 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0; \end{aligned}$$

б) дополняющей нежёсткости

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0;$$

в) неотрицательности $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$.

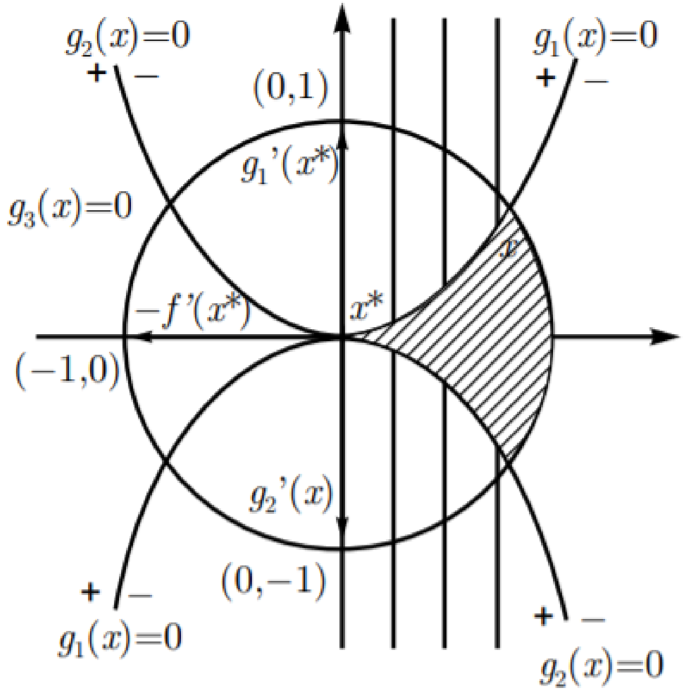

Рис. 1. Пример 1.5

3) Если $\lambda_0 = 0$, то из условия стационарности получим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда все множители Лагранжа — нули. Это противоречит условиям теоремы 1.19. Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то из условия дополняющей нежёсткости следует, что $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$. Выразим x_1, x_2, x_3 через λ_1, λ_2 и подставим в уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5.$$

Получим $\lambda_1 = -9/14 < 0$. А это противоречит условию неотрицательности. Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ — критическая точка.

4) Функция $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Согласно следствию из теоремы Вейерштрасса решение задачи существует. Поскольку критическая точка единственная, то решением задачи может быть только она.

Ответ: $\widehat{x} = (1, 1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 3$. $\triangle$

Пример 1.5. Пример нерегулярной задачи. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to \min, \qquad g_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 \leqslant 0,$$
$$g_2(x_1, x_2) = -x_1^3 - x_2 \leqslant 0, \qquad g_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0.$$

На рисунке изображены допустимое множество задачи и линии уровня целевой функции. Решением задачи является точка $\widehat{x} = (0, 0)$. Активными в этой точке являются первое и второе ограничения. При этом

$$f'(\widehat{x}) = f'(0, 0) = (1, 0),$$
$$g_1'(\widehat{x}) = g_1'(0, 0) = (0, 1),$$
$$g_2'(\widehat{x}) = g_2'(0, 0) = (0, -1).$$

Вектор $f'(\widehat{x}) = f'(0, 0) = (1, 0)$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $g_1'(\widehat{x}) = g_1'(0, 0) = (0, 1)$, $g_2'(\widehat{x}) = g_2'(0, 0) = (0, -1)$.

Соотношение

$$\lambda_0 f'(\widehat{x}) + \lambda_1 g_1'(\widehat{x}) + \lambda_2 g_2'(\widehat{x}) + \lambda_3 g_3'(\widehat{x}) = 0$$

в точке $\widehat{x} = (0,0)$ может выполняться лишь при

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda, \lambda_3 = 0.$$

Градиенты $g_1'(\widehat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\widehat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$ в данном случае линейно зависимы.

Ответ: $\widehat{x} = (0,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$. $\triangle$

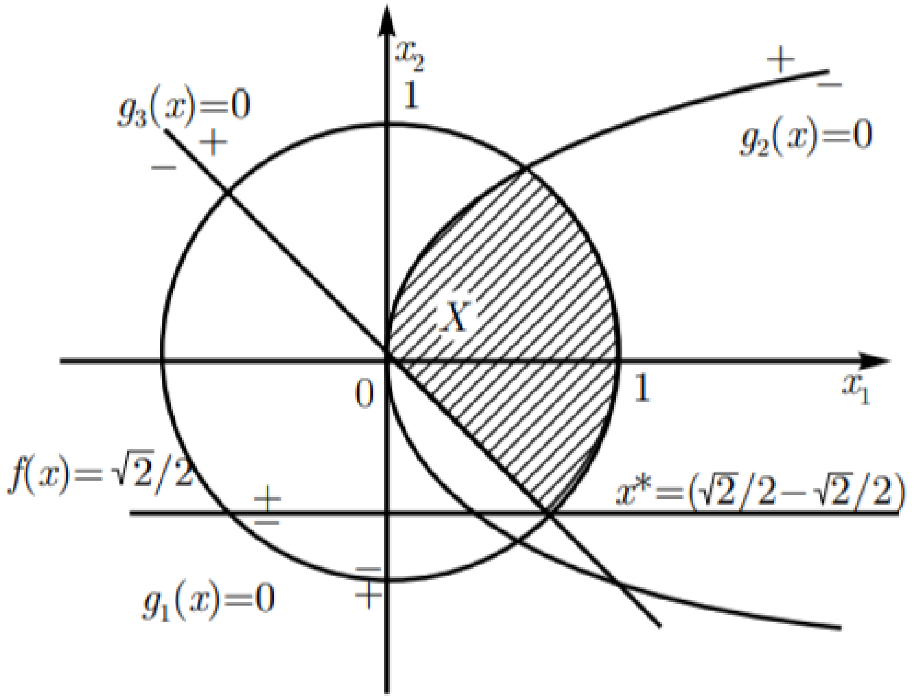

Рис. 2. Пример 1.6

Пример 1.6. Решить экстремальную задачу

$$f(x_1, x_2) = x_2 \to \min,$$
$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0,$$
$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2^2 \leqslant 0,$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Запишем регулярную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2^2) + \lambda_3(-x_1 - x_2).$$

Необходимые условия экстремума (стационарности, дополняющей нежёсткости, неотрицательности) дают следующую систему соотношений для определения стационарных точек:

$$\begin{gathered} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0, \quad \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2 \geqslant 0, \quad -x_1 + x_2^2 \leqslant 0, \quad \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0, \\ \lambda_3 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3(x_1 + x_2) = 0. \end{gathered}$$

Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ является решением системы. В этой точке первое и третье соотношения активные: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, а второе — пассивное: $-x_1 + x_2^2 < 0$. Поэтому здесь $\lambda_2 = 0$. В результате получим такую систему для определения λ_1 и λ_3:

$$\sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0.$$

Эта система имеет решение $\lambda_1 = \sqrt{2}/4$, $\lambda_3 = 1/2$. Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ есть решение задачи. Убедитесь в том, что других стационарных точек и, следовательно, решений задачи нет.

Ответ: $\widehat{x} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\sqrt{2}/2$. $\triangle$

Пример 1.7. Пусть числа $a > 0$, $b > 0$, причем $a < b$. Найти точку локального минимума и максимума функции

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2$$

на множестве решений системы

$$x_1^3 + x_2^3 \leqslant 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1.$$

Обозначим это множество через X. Выпишем функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left(\frac{1}{2}ax_1^2+\frac{1}{2}bx_2^2\right)+\lambda_1\left(x_1^3+x_2^3-1\right)+\lambda_2\left(-x_1^2-x_2^2+1\right).$$

Система для определения стационарных точек имеет вид:

$$\begin{gathered}
a\lambda_0x_1+3\lambda_1x_1^2-2\lambda_2x_1=0;\\
b\lambda_0x_2+3\lambda_1x_2^2-2\lambda_2x_2=0;\\
\lambda_1\geqslant 0,\quad x_1^3+x_2^3\leqslant 1,\quad \lambda_1\left(x_1^3+x_2^3-1\right)=0,\\
\lambda_2\geqslant 0,\quad x_1^2+x_2^2\geqslant 1,\quad \lambda_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)=0,\\
(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0.
\end{gathered}$$

Пусть $x_1=0$. Тогда из системы следует, что $x_2\leqslant 1, x_2^2\geqslant 1$. Отсюда или $x_2=1$, или $x_2\leqslant -1$. В противном случае $\lambda_1=0$. Если при этом $x_2<-1$, то $\lambda_2=0$. Но тогда $\lambda_1=0$, что противоречит условиям задачи.

Теперь легко находим первые две группы решений системы:

1) $x_1=0, x_2=1, b\lambda_0+3\lambda_1-2\lambda_2=0, \lambda_1\geqslant 0, \lambda_2\geqslant 0, (\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$;

2) $x_1=0, x_2=-1, b\lambda_0-2\lambda_2=0, \lambda_1=0, \lambda_2>0$.

Аналогично, полагая $x_2=0$, находим еще две группы решений системы:

3) $x_1=1, x_2=0, a\lambda_0+3\lambda_1-2\lambda_2=0, \lambda_1\geqslant 0, \lambda_2\geqslant 0, (\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$;

4) $x_1=-1, x_2=0, a\lambda_0-2\lambda_2=0, \lambda_1=0, \lambda_2>0$.

Допустим теперь, что $x_1\neq 0, x_2\neq 0$. Тогда уравнения системы можно записать в виде

$$a\lambda_0 + 3\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad b\lambda_0 + 3\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 = 0.$$

Если здесь $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 = 0$, поскольку $a \neq b$. Но тогда $\lambda_2 = 0$, что противоречит системе условий. Остается предположить, что $\lambda_1 > 0$. Тогда $x_1^3 + x_2^3 = 1$. Учитывая, что $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, получаем $x_1^2 + x_2^2 > 1$, и поэтому $\lambda_2 = 0$. Теперь получаем еще одну группу решений системы

5) $x_1 = a/\sqrt[3]{a^3 + b^3}, x_2 = b/\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $\lambda_0 < 0$, $\lambda_1 = -\lambda_0\sqrt[3]{a^3 + b^3}/3$, $\lambda_2 = 0$.

Заметим, что в 1) и 3) множитель λ_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в 2) и 4) — только положительные, а у 5) — отрицательные. Поэтому $(0,1)$ и $(1,0)$ — стационарные точки как в задаче минимизации, так и в задаче максимизации, $(0,-1)$ и $(-1,0)$ — только в задаче минимизации, а точка из 5) — только в задаче максимизации.

Теперь проведем исследование стационарных точек на оптимальность. Функция f сильно выпукла на R^2. Поэтому она достигает глобального минимума на любом замкнутом множестве X. Вычислим значения f в стационарных точках задачи минимизации:

$$f(0,1) = f(0,-1) = b/2, f(1,0) = f(-1,0) = a/2.$$

Поскольку $a < b$, то отсюда следует, что $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ — точки глобального минимума функции f на X.

Представим f в виде

$$f(x) = \frac{1}{2}a\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}(b-a)x_2^2.$$

Если будем двигаться из точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$, оставаясь на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$, а значит, и в X, то значение f будет уменьшаться. Следовательно, эти точки не являются точками локального минимума f на X. В то же время при любом $\varepsilon > 0$ точка (-ε,1) лежит в X и $f(0, 1) < f(-\varepsilon, 1)$. Поэтому точка $(0, 1)$ не является точкой локального максимума f на X. Итак, стационарные точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ оказались «посторонними».

Рассмотрим теперь матрицу вторых производных функции Лагранжа:

$$L''_{xx} = \begin{bmatrix} a\lambda_0 + 6\lambda_1 x_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & b\lambda_0 + 6\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

При значениях из 5) эта матрица выглядит таким образом:

$$L''_{xx} = \begin{bmatrix} -a\lambda_0 & 0 \\ 0 & -b\lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_0 < 0$, то эта функция положительно определена. Поэтому выполняются достаточные условия экстремума и $(a/\sqrt{3}a^3 + b^3, b/\sqrt{3}a^3 + b^3)$ — точка строгого локального максимума f на X.

Ответ: $\widehat{x} = (a/\sqrt[3]{a^3 + b^3}, b/\sqrt[3]{a^3 + b^3}) \in \mathrm{abs\,min}$. $\triangle$

1. Некоторые задачи оптимального управления

1. Задача об оптимальном быстродействии. Пусть тележка движется прямолинейно без трения по горизонтальным рельсам под действием внешней силы, которую можно менять в заданных границах. Нужно остановить тележку в заданном месте за кратчайший отрезок времени. Эта задача называется *простейшей задачей об оптимальном быстродействии*.

Формализуем задачу. Пусть масса тележки равна m, начальная координата равна x_0, начальная скорость равна v_0. Внешнюю силу (силу тяги) обозначим через u. В соответствии с законом Ньютона уравнение движения — это дифференциальное уравнение

$$mx''(t) = u(t).$$

Ограничение на величину тяги запишем так: $u_1 \leqslant u(t) \leqslant u_2$. Тогда формализованная задача имеет вид

$$\begin{aligned} T \to \inf, \quad mx''(t) &= u(t), \quad u(t) \in [u_1, u_2], \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) &= v_0, \quad x(T) = x'(T) = 0. \end{aligned}$$

2. Навигационная задача управления кораблем. Пусть корабль движется с постоянной по модулю скоростью относительно течения, скорость которого постоянна по модулю и направлению. Необходимо составить программу управления рулем, которая обеспечит перемещение корабля в заданную точку из начальной точки за кратчайший отрезок времени.

Обозначим через $(x(t), y(t))$ положение корабля в момент времени t в прямоугольной системе координат такой, что ось OX параллельна вектору скорости течения $\vec{s}$. Положение рулей корабля в момент времени t будет определять угол $\alpha(t)$ между вектором скорости корабля $\vec{v}$ и вектором скорости течения $\vec{s}$. Обозначим $v = |\vec{v}|$, $s = |\vec{s}|$. Тогда составные вектора скорости корабля $\vec{v}$ по оси OX и по оси OY равняются $s + v\cos(\alpha)$, $v\sin(\alpha)$ соответственно. Движение корабля можно описать системой дифференциальных уравнений

$$x'(t) = s + v\cos(\alpha(t)), \quad y'(t) = v\sin(\alpha(t)),$$

учитывая, что $\sin^2(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t)) = 1$ при всех значениях t. Пусть $u_1(t) = \cos(\alpha(t))$, $u_2(t) = \sin(\alpha(t))$, начальный момент времени t_0. Необходимо определить управляющий вектор $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, $|\vec{u}(t)|^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$ такой, что решение системы дифференциальных уравнений

$$x'(t) = s + vu_1(t), \quad y'(t) = vu_2(t)$$

удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, где (x_0, y_0) — координаты начального положение корабля, (x_1, y_1) — координаты точки, в которую должен приплыть корабль. Разность $t_1 - t_0$ должна быть минимальной. Итак, задача оптимального управления имеет вид

$$T = t_1 - t_0 \to \inf,$$
$$x'(t) = s + vu_1(t),$$
$$y'(t) = vu_2(t),$$
$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1,$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$
$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,$$
$$y(t_0) = y_0,\ y(t_1) = y_1.$$

3. Задача о наибольшей дальности полета ракеты с ограниченным ускорением. Нужно определить такое управление тягой двигателя ракеты, которое максимизирует дальность полета ракеты при условии, что значение тяги не может превышать некоторую заданную величину. Будем считать, что ускорение свободного падения не меняется, аэродинамические свойства ракеты такие, что сопротивление воздуха и прочие эффекты малые и ими можно пренебречь. Пусть траектория полета ракеты лежит в одной плоскости. Обозначим через $(x(t), y(t))$ декартовы координаты ракеты, через $v_1(t)$, $v_2(t)$ — компоненты вектора скорости ракеты ($v_1(t) = x'(t)$, $v_2(t) = y'(t)$), $m(t)$ — массу ракеты, $u_1(t)$, $u_2(t)$ — компоненты единичного вектора, коллинеарного вектору тяги, g — ускорение свободного падения, $u_3(t)$ — скорость уменьшение массы ракеты двигателя ($u_3(t) = -m'(t)$). Положение ракеты в момент t описывается вектором $(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t))$. Управляющий процесс в каждый момент времени t — это вектор тяги двигателя $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Пусть модуль тяги пропорциональный с коэффициентом C скорости уменьшения массы $u_3(t)$. Тогда горизонтальная составная силы, которая действует на ракету, равняется $Cu_3(t)u_1(t)$, а вертикальная составная силы $Cu_3(t)u_2(t) - m(t)g$.

Система дифференциальных уравнений, которые описывают изменение вектора положения ракеты, имеет вид

$$x'(t) = v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t),$$
$$v_1'(t) = \frac{C}{m}u_3(t)u_1(t), \quad v_2'(t) = \frac{C}{m}u_3(t)u_2(t) - g,$$
$$m'(t) = -u_3(t).$$

Компоненты вектора управления $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ удовлетворяют ограничениям, обусловленным тем, что вектор $(u_1(t), u_2(t))$ имеет единичную длину, а тяга двигателя не превышает максимального значения $Cu_3^{\max}$: $0 \leqslant Cu_3(t) \leqslant Cu_3^{\max}$. Поэтому множество U допустимых значений вектора (u_1, u_2, u_3) в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется соотношением

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1, \quad 0 \leqslant u_3(t) \leqslant u_3^{\max}.$$

Ракету нужно перевести из известного начального положения в некоторое положение на высоте y_1, использовав заданное количество горючего M, так, чтобы горизонтальная дальность полета была максимальной. Итак, нужно определить управление $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in U$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которое переведет ракету из положения $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ в положение $y(t_1) = y_1$, $m(t_1) = m_1 = m_0 - M$, таким образом, чтобы функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\, dt$$

достиг максимального значения.

4. Задача вывода искусственного спутника Земли на круговую орбиту. Будем считать, что ракета-носитель движется в одной плоскости с фиксированной системой координат. Как и в предшествующей задаче, можно записать уравнения движения ракеты:

$$\begin{aligned} x'(t) &= v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t), \\ v_1'(t) &= \frac{\varphi_1(t) + u_1(t)\cos(u_2(t))}{m(t)}, \\ v_2'(t) &= \frac{\varphi_2(t) + u_1(t)\sin(u_2(t))}{m(t)}, \\ m'(t) &= -F(u_1(t)), \end{aligned}$$

где $x(t), y(t)$ — координаты положения ракеты, $v_1(t)$, $v_2(t)$ — компоненты вектора скорости ракеты, $m(t)$ — масса ракеты, $u_1(t)$ — тяга двигателя ракеты, $u_2(t)$ — угол между направлением тяги и оси OX, $F(u_1)$ — скорость уменьшения массы ракеты, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — проекции на оси OX, OY других сил, которые действуют на ракету (сила тяготения, сопротивления воздуха и т. п.). Будем считать, что известно начальное положение ракеты $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ в момент t_0. Обозначим через t_1 момент выхода ракеты-носителя на круговую орбиту радиуса R. В этот момент должны выполняться условия

$$\begin{aligned} x^2(t_1) + y^2(t_1) &= R^2, \\ v_1(t_1)x(t_1) + v_2(t_1)y(t_1) &= 0, \\ v_1^2(t_1) + v_2^2(t_1) &= v_R^2, \end{aligned} \tag{13.1}$$

где v_R^2 — скорость движения спутника по орбите радиуса R. Первое условие означает, что ракета в момент t_1 находится на окружности радиуса R. Второе условие означает, что вектор скорости ракеты $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$ и вектор положения ракеты $(x(t_1), y(t_1))$ в момент t_1 ортогональны. То есть скорость ракеты направлена по касательной к орбите. Третье условие означает, что при выключении ракеты-носителя в момент t_1 движение будет продолжаться по орбите радиуса R. Вектор управления $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ должен удовлетворять ограничению

$$0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_1^{\max}, \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant 2\pi, \tag{13.2}$$

где $u_1^{\max}$ — наибольшая возможная тяга, которую может развить двигатель ракеты-носителя. Затраты горючего за промежуток времени $t_1 - t_0$

будут определяться интегралом

$$J(\vec{u}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(u_1(t))\, dt. \tag{13.3}$$

Таким образом, цель управления запуском спутника — перевести ракету-носитель из начального положения $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ в положение (13.1) так, чтобы вектор управления $\vec{u}(t)$ удовлетворял условиям (13.2) и интеграл (13.3) приобретал наименьшее значение.

5. Задача о мягкой посадке космического аппарата на поверхность Луны с минимальными затратами горючего. Для упрощения математической модели проследим только за вертикальными компонентами вектора положения и скорости космического аппарата, считая, что в начальный момент он был недалеко от поверхности Луны, и можно считать гравитационное ускорение Луны g_L постоянным во время спуска. Положение аппарата в момент времени t определяется вектором $(h(t), v(t), m(t))$, где $h(t)$ — высота, $v(t)$ — скорость, $m(t)$ — масса аппарата. Управление $u(t)$ — это вертикальная составная тяги двигателя, которая направлена к поверхности Луны и уменьшает вертикальную скорость аппарата. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} h'(t) &= v(t), \\ v'(t) &= -g_L + u(t)m^{-1}(t), \\ m'(t) &= -Cu(t). \end{aligned}$$

Будем считать, что уменьшение массы аппарата пропорционально значению тяги с коэффициентом C. Если h_0, v_0 — начальные высота и скорость аппарата в момент t_0, F — начальный запас горючего, M — масса аппарата без горючего, t_1 — момент посадки, то граничные условия имеют такой вид:

$$h(t_0) = h_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad m(t_0) = F + M, \tag{13.4}$$

$$h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0. \tag{13.5}$$

Запись (13.5) есть условия «мягкости» посадки. При этих условиях аппарат достигает поверхности Луны с нулевой вертикальной скоростью. Если $u^{\max}$ — наибольшая возможная тяга, то управляющая величина $u(t)$ на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ должна удовлетворять условию

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u^{\max}. \tag{13.6}$$

Итак, задача сводится к определению управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющего ограничению (13.6), которое обеспечивает мягкую посадку на поверхность Луны в момент t_1, и величина $m(t_1)$ приобретает максимальное значение.

Связанные задачи вариационного исчисления: сведение задач Лагранжа и Больца к задаче Майера.

Основным элементом любой задачи оптимального управления является управляемый объект (управляемая система). Его положение в момент t описывается вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ называются фазовыми переменными, вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — фазовым вектором или положением объекта. Множество U всех возможных фазовых векторов в $\mathbb{R}^n$ называется *фазовым пространством*. Управляемый объект имеет управляющие устройства, положение которых в каждый момент времени t определяется вектором $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, который называется *вектором управления объекта*. Множество всех возможных значений вектора управления в реальных объектах — это собственное подмножество пространства $\mathbb{R}^r$. Как правило, множество U замкнуто и ограничено, поскольку в реальных объектах управления $u(t)$ не могут принимать любые значения, но могут принимать свои «крайние» значения.

При математическом описании задач управления необходимо задавать допустимый характер изменения управляющего вектора. Исследование простейших задач свидетельствует, что требовать непрерывность управления нецелесообразно. Более естественно считать управляющий процесс кусочно-непрерывным, то есть управление $u(t)$ может иметь разрывы первого рода в конечном множестве точек.

Закон движения объекта задается дифференциальным уравнением

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{13.7}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$.

Векторнозначная функция $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по $t, x_1, \ldots, x_n$. Выполнение этих условий обеспечивает существование и единственность решения дифференциального уравнения (13.7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при выбранном допустимом управлении $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. То есть эволюция $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, объекта однозначно определяется выбором допустимого управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Решение $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, уравнения (13.7) называется *фазовой траекторией управляемого объекта*, а пара $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ (где $x(t)$ — траектория, которая отвечает $u(t)$) называется *управляемым процессом*. Управляемый процесс $(x(t), u(t))$, называется допустимым, если удовлетворяет граничным условиям.

Цель управления — перевести управляемый объект из начального положения $x(t_0) \in S_0 \subset \mathbb{R}^n$ в некоторое множество $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ в момент t_1: $x(t_1) \in S_1$. Как правило, существует много управлений $u(t)$ реальными управляемыми объектами. Поэтому возникает вопрос о наилучшем, или оптимальном, управлении. Для этого необходимо определить критерий качества, или оптимальности, управления, который разрешает сравнивать разные способы управления и выбрать наилучшее (оптимальное).

Критерий оптимальности $J(x(\cdot), u(\cdot))$ — это функционал, определенный на множестве допустимых управляемых процессов $(x(t), u(t))$, где $u(t)$ — допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующая траектория. Поскольку функционал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ принимает числовые значения, то каждому управляемому процессу $(x(t), u(t))$ отвечает число, по которому и судят о качестве управления. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы определить допустимое управление $\widehat{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, при котором фазовая траектория удовлетворяет граничным условиям $\widehat{x}(t_0) \in S_0$, $\widehat{x}(t_1) \in S_1$ и критерий оптимальности достигает на управляемом процессе $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, экстремального значения. В зависимости от вида критерия оптимальности и граничных условий различаются следующие задачи оптимального управления.

Задача Лагранжа. Критерий оптимальности имеет вид

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf .$$

Функция $f\colon \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^1$ называется *интегрантом*. Считается, что она непрерывна и непрерывно дифференцируема по t, x.

Задача Майера. Функционал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ имеет вид

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \Psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf.$$

Такой функционал называется *терминальным*. Функция $\Psi\colon \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

Задача Больца. Функционал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ имеет и терминальную, и интегральную части,

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf.$$

Функции $f(t, x, u)$, $\Psi(t_0, x_0, t_1, x_1)$ имеют такие же свойства, как и в задачах Лагранжа и Майера.

Если в задаче Больца $f \equiv 0$, то получим задачу Майера, если же $\Psi \equiv 0$ — задачу Лагранжа.

Если в задаче Лагранжа $f = 1$, то критерий оптимальности — это время $t_1 - t_0$ перехода объекта из начального положения в конечное. Оптимальное управление обеспечивает минимизацию времени, истраченного на переход. Такая задача называется *задачей оптимального быстродействия*.

Если множества S_0, S_1 начальных и конечных положений управляемого объекта не зависят от моментов времени t_0, t_1 и имеют лишь одну точку $S_0 = \{x_0\}$, $S_1 = \{x_1\}$, то *задача* оптимального управления называется *задачей с фиксированными, или закрепленными, концами траектории*.

Если множество S_0 (множество S_1) совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, то имеем задачу со свободным левым (правым) концом траектории.

Если множество S_0 (или S_1) — это некоторое подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ размерности меньшей, чем n, то левый (правый) конец траектории называется подвижным.

В задачах оптимального управления могут встречаться ситуации, когда моменты времени t_0, t_1 не фиксированы. Тогда интервал $[t_0, t_1]$ необходимо включить в определение допустимого управляемого процесса и рассматривать управляемые процессы $(x(t), u(t), t_0, t_1)$.

Допустимый управляемый процесс $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ называется оптимальным, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого другого допустимого управляемого процесса $(x(t), u(t), t_0, t_1)$, удовлетворяющего условиям $|t_0 - \widehat{t}_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \widehat{t}_1| < \varepsilon$, $\|\widehat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1] \cap [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$, выполняется неравенство $J(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1) \leqslant J(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$. По сравнению с задачей Лагранжа здесь не требуется близость производных $x'(t)$, $\widehat{x}'(t)$. В классическом вариационном исчислении это отвечает переходу от слабого к сильному екстремуму.

Постановка задачи оптимального управления.

Задача оптимального управления (в форме Понтрягина) — это экстремальная задача в пространстве $KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times KC(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$B(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf; \tag{13.8}$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t \in T; \tag{13.9}$$

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{13.10}$$

$$B_j(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \ j = \overline{m+1, s}; \tag{13.11}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in \Delta, \tag{13.12}$$

где $T \subset \Delta$ — множество точек непрерывности управления $u(t)$, Δ — заданный отрезок числовой прямой $\mathbb{R}^1$, $x(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in$ $\in KC(\Delta, \mathbb{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta$, $f_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ — функции $n+r+1$ переменных, $\Psi_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции $2n+2$ переменных, $\varphi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция $n+r+1$ переменных, U — заданное подмножество пространства $\mathbb{R}^r$. Вектор-функция $x(\cdot)$ — это фазовая переменная (или траектория), $u(\cdot)$ — управление. Уравнение (13.9) называется *дифференциальной связью*. Это уравнение должно исполняться во всех точках непрерывности $T \subset \Delta$ управления $u(t)$. Элемент $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ пространства $KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times KC(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2$, удовлетворяющий всем условиям и ограничениям задачи, называется *допустимым управляемым процессом*.

Допустимый управляемый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$ называется (локально) оптимальным, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого управляемого процесса $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, удовлетворяющего условиям

$$\|(x(\cdot), t_0, t_1) - (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)\|_{C(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2} < \varepsilon,$$

выполняется неравенство $B(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \geqslant B(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{t}_1)$.

Функцией Лагранжа экстремальной задачи (13.8)–(13.12) называется функция

$$\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), u(t))\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad (13.13)$$

где $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$,

$$L = L(t, x(t), x'(t), u(t)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)) + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))), \quad (13.14)$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \Psi_j(t_0, x(t_0), x_1, x(t_1)). \quad (13.15)$$

Функция $p(\cdot)\colon\ [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна: $p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Числа λ_i, $i = 0, 1, \ldots, s$, и функция $p(\cdot)$ называются множителями Лагранжа задачи (13.8)–(13.12), функция $L = L(t, x(t), x'(t), u(t))$ (13.4) — лагранжианом, а функция $l = l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ (13.15) — терминантом. Функцию

$$H(t, x, u, p) = p(t)\varphi(t, x(t), u(t)) - \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)) \qquad (13.16)$$

называют функцией Понтрягина. Будем в дальнейшем пользоваться такими обозначениями:

$$\begin{gathered}
\widehat{L}_x(t) = L_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), \widehat{u}(t)), \\
\widehat{L}_{x'}(t) = L_{x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), \widehat{u}(t)), \\
\widehat{\varphi}(t) = \varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)), \\
\widehat{f}_x(t) = f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)), \\
\widehat{l}_{x_k} = l_{x_k}(\widehat{t}_0, \widehat{x}(t_0), \widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1)), \\
k = 0, 1.
\end{gathered}$$

Теорема 13.1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),$ $\widehat{u}(\cdot),\ \widehat{t}_0,\ \widehat{t}_1)$ *— оптимальный управляемый процесс в задаче оптимального управления* (13.8)–(13.12), *функции* $\varphi(t,x,u)$, $f_j(t,x,u), j = 0,1,\ldots,s$, *и их частные производные по* x *непрерывны на множестве* $V \times U$, *где* V *— некоторая окрестность множества* $\{(t,\widehat{x}(t))\colon t \in [\widehat{t}_0,\widehat{t}_1]\}$, *а функции* $\Psi_j(t_0,x_0,t_1,x_1)$, $j = 0,\ldots,s$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\widehat{t}_0,\widehat{x}(\widehat{t}_0),\widehat{t}_1,\widehat{x}(\widehat{t}_1))$ *(условие гладкости). Тогда существуют одновременно не равные нулю множители Лагранжа* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s) \in \mathbb{R}^s$, $p(\cdot) \in KC^1([\widehat{t}_0,\widehat{t}_1],\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющие условиям:*

1) *стационарности по* x *— уравнение Эйлера лагранжиана* L

$$\widehat{L}_x(t) = \frac{d}{dx}\widehat{L}_{x'}(t) \Longleftrightarrow p'(t) = \widehat{f}_x(t) - p(t)\widehat{\varphi}_x(t),$$

где

$$f(t,x,u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t,x,u);$$

2) *трансверсальности по* x

$$\widehat{L}_{x'}(\widehat{t_0}) = \widehat{l}_{x_0} \Longleftrightarrow p(\widehat{t_0}) = \widehat{l}_{x_0},$$
$$\widehat{L}_{x'}(\widehat{t_1}) = \widehat{l}_{x_0} \Longleftrightarrow p(\widehat{t_1}) = -\widehat{l}_{x_1};$$

3) *оптимальности по* u *— принцип минимума в лагранжевой форме*

$$\begin{aligned}\min_{u\in U} \widehat{L}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), u) &= \widehat{L}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), \widehat{u}(t))\\ &\Longleftrightarrow \min_{u\in U} [f(t, \widehat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), u)]\\ &= [f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t))] \quad \forall t \in T\end{aligned}$$

или принцип максимума в форме Гамильтона (Понтрягина)

$$\begin{aligned}&\max_{u\in U} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t))\\ &\Longleftrightarrow \max_{u\in U} [p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), u) - f(t, \widehat{x}(t), u)]\\ &= p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) - f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \quad \forall t \in T,\end{aligned}$$

где $H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t))$ *— функция Понтрягина* (13.16);

4) *стационарности по* t_0, t_1 (*только тогда, когда границы* t_0, t_1 *интервала* $[t_0, t_1]$ *подвижны*)

$$\widehat{\mathscr{L}_{t_0}} = 0 \Longleftrightarrow -\widehat{f}(\widehat{t_0}) + \widehat{l}_{t_0} + \widehat{l}_{x_0}\widehat{x}'(\widehat{t_0}) = 0,$$
$$\widehat{\mathscr{L}_{t_1}} = 0 \Longleftrightarrow \widehat{f}(\widehat{t_1}) + \widehat{l}_{t_1} + \widehat{l}_{x_1}\widehat{x}'(\widehat{t_1}) = 0;$$

5) *дополняющей нежесткости* $\lambda_i B_i(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t}_0, \widehat{T}_1) = 0,\ i = \overline{1, m}$;

6) *неотрицательности* $\lambda_j \geqslant 0, j = \overline{0, m}$.

Это утверждение не противоречит основному принципу Лагранжа. Действительно, функция Лагранжа $\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0)$ (13.13) зависит от трех аргументов $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, (t_0, t_1). Поэтому необходимо рассматривать три задачи:

1) $\mathscr{L}(x(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1}, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) \to \mathrm{extr}$ (по переменной $(x(\cdot))$);

2) $\mathscr{L}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) \to \mathrm{extr}$ (по переменных $\widehat{t_0}, \widehat{t_1}$);

3) $\mathscr{L}(\widehat{x}(\cdot), u(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1}, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) \to \mathrm{extr}$ (по переменной $(u(\cdot))$).

Первая — это задача Больца вариационного исчисления, и условия стационарности 1), 2) записаны в полном соответствии с условиями теоремы классического вариационного исчисления.

Вторая задача элементарна, и условия стационарности 4) — это следствие теоремы Ферма.

Третью задачу можно представить в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, u(t))\, dt \to \inf, \quad u(\cdot) \in KC([\widehat{t}_0, \widehat{t}_1], U),$$

где $g(t, u) = \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \widehat{x}(t), u)$.

Необходимое и достаточное условие экстремума в этой задаче такое. Функция $\widehat{u}(\cdot) \in KC([\widehat{t}_0, \widehat{t}_1], U)$ дает минимум задачи тогда и только тогда, когда везде, за исключением точек разрыва управления $\widehat{u}(\cdot)$, выполняется соотношение

$$\min_{u \in U} L(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), u) = L(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), \widehat{u}(t)),$$

которое равносильно соотношению

$$\max_{u \in U} H(t, \widehat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), p(t)).$$