# Лекция 6

Формулировка принципа максимума Понтрагина

1.Принцип Лагранжа в задаче оптимального управления

1.Задачи линейные по фазам координат

1.Задача о быстродействии. Примеры.

# Глава 2. Оптимальное управление

## 2.1. Постановка задачи

Задана динамическая система с управлением, описываемая системой дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u(t)), \\ (i = 1, \dots, n), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — состояние динамической системы,
$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ — управление. Функции $f_i(x, u)$ и их частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u)$ — непрерывны по совокупности переменных, что, в силу теоремы Коши–Пикара, обеспечивает существование и единственность решения системы (2.1). Кроме того, заданы: $x(0) = x^0$ — начальное состояние, $x^1$ — требуемое конечное состояние.

Считается, что управления $u(t)$, рассматриваемые как функции времени, выбираются из *множества допустимых управлений* $D$, которое включает кусочно-непрерывные, непрерывные справа вектор-функции $u(t)$, принимающие значения на заданном *множестве* $V \subseteq R^m$ *допустимых значений управления*. Таким образом, $D = D(V)$ является множеством в функциональном пространстве. Обычно в задачах оптимального управления множество $V$ — ограничено и замкнуто, т.е. является компактом.

Поясним термин «кусочно-непрерывная функция».

**Определение.** Функция $u(t)$ называется *кусочно-непрерывной* на некотором промежутке времени, если на любом конечном подынтервале этого промежутка она имеет не более, чем конечное число точек разрыва.

Пример возможного поведения одной из компонент допустимого управления $u_i(t)$ показан на рис.2.1.

**Определение.** Множество $X_U \subseteq R^n$ называется *множеством управляемости* в целевую точку $x^1$ для динамической системы (2.1) при множестве допустимых управлений $D(V)$, если $\forall x^0 \in X_U$ существует допустимое управление $u \in D(V)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в заданное конечное $x^1$ за некоторое конечное время $T$.

**Определение.** Множество состояний динамической системы $X_N = R^n \backslash X_U$, не принадлежащих множеству управляемости, называется *множеством неуправляемости*.

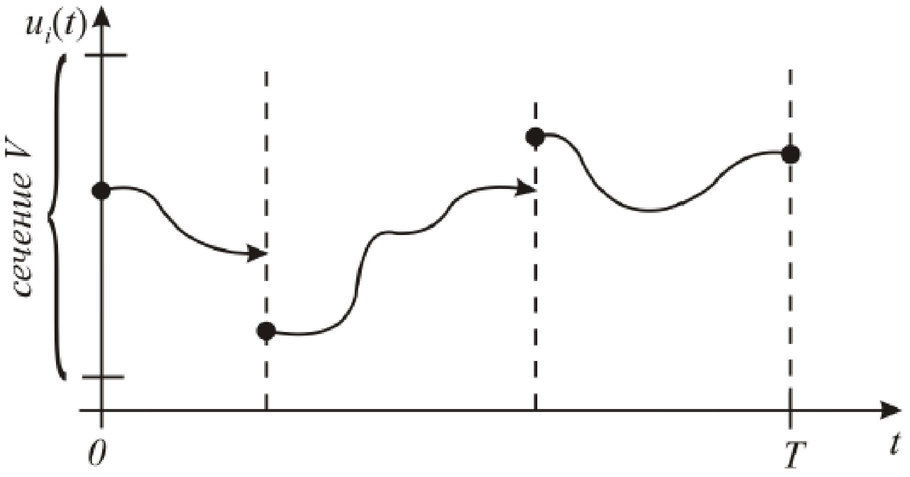


Рис. 2.1. Пример поведения управления $u_i = u_i(t)$ для $u \in D(V)$, $V = [a, b] \subseteq R^m$

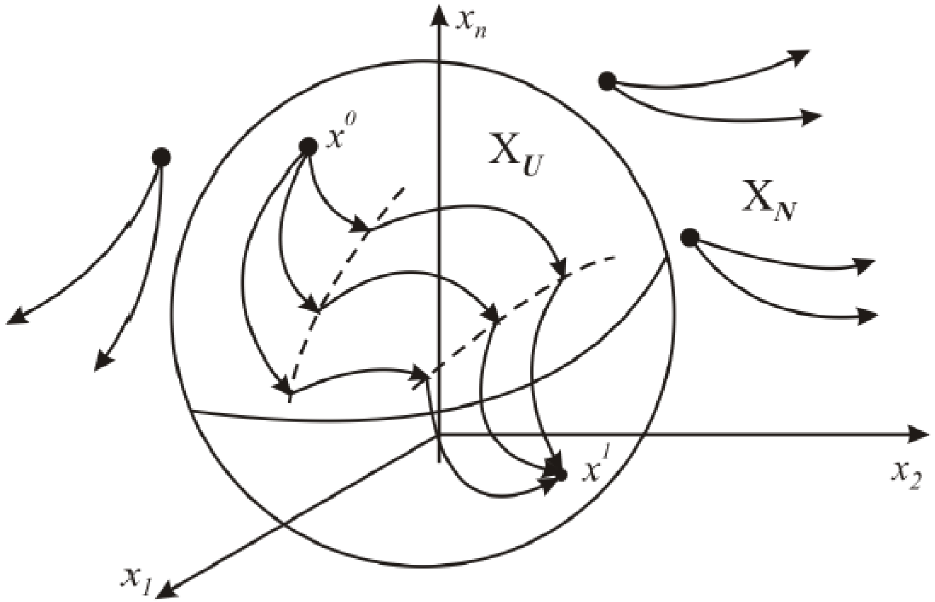


Рис. 2.2. Множества управляемости и неуправляемости

Для начальных точек $x(0) = x^0$ из множества неуправляемости $X_N$ невозможно за конечное время перевести систему в состояние $x^1$, используя допустимые управления из $D(V)$.

Введем функционал качества

$$J[u] = \int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt, \tag{2.2}$$

где $f_0(x, u)$ и $\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x, u)$ — непрерывны по совокупности переменных. Момент времени $T$ не задан, а определяется как момент первого достижения цели: $x(T) = x^1$, а $\forall t \in [0, T)$ $x(t) \neq x^1$. Подынтегральную функцию $f_0(x, u)$ можно трактовать, как функцию мгновенных затрат.

*Задача оптимального управления* заключается в том, чтобы для $x^0 \in$ $\in X_U$ определить допустимое управление $u^* \in D = D(V)$, минимизирующее целевой функционал:

$$J[u^*] = \min_{\substack{u \in D(V) \\ u:\, x^0 \to x^1 \\ \text{за конечное T}}} J[u]. \tag{2.3}$$

*Управление* $u^*(t)$ и соответствующая ему в силу системы (2.1) *траектория* $x^*(t)$, $t \in [0, T]$ называются *оптимальными*.

Математическая теория оптимальных процессов была разработана группой математиков под руководством Л. С. Понтрягина в конце 50-х годов XX столетия [11].

## 2.2. Уравнение Беллмана для задач оптимального управления

Покажем, что при выполнении некоторых дополнительных предположений оптимальное управление, рассматриваемое как функция текущего состояния $u = u^*(x)$, удовлетворяет уравнению специального вида — уравнению Беллмана. Дополнительные предположения сформулируем в форме гипотез.

**Гипотеза 1.** *Для всякого начального состояния $x^0$ из области управляемости $X_u$ существует оптимальное значение стоимости (в смысле значений функционала $J[u]$) перехода из $x^0$ в $x^1$ за конечное время при использовании допустимых управлений.*

*Функцией Беллмана* $S(x^0)$ называют функцию оптимальной стоимости допустимого перехода в зависимости от начального состояния. Это определение полностью согласуется с ранее введенным в разделе «Динамическое программирование» понятием функции Беллмана. Для дальнейшего изложения удобно ввести переобозначение $S(x^0) = (-\omega(x^0))$.

Для вывода уравнения, следуя [12], рассмотрим два способа перехода из $x^0$ в $x^1$, показанные на рис. 2.3: $(a - b - c)$ и $(a - d - e)$. При этом $(a - b - c)$ — оптимальный переход из $x^0$; $t$ — произвольный момент времени из интервала $(0,\ T)$; $(d)$ — переход под воздействием произвольного допустимого управления $\tilde{u}(\xi)$, $\xi \in [t, t_1]$, где $t_1$ — промежуточный момент времени из интервала $(t,\ T)$; $(e)$ — оптимальный переход из $\tilde{x}(t_1)$ в $x^1$.

Используя принцип Беллмана в форме необходимого условия для участков $(b - c)$ и $(c)$, можно утверждать, что затраты на этих участках оптимальны по отношению к состояниям $x^*(t)$ и $x^*(t_1)$ и, следовательно, равны $(-\omega(x^*(t)))$ и $(-\omega(x^*(t_1)))$. Таким образом,

$$(-\omega(x^*(t))) = \int_t^{t_1} f_0(x^*(\xi), u^*(\xi))\, d\xi + (-\omega(x^*(t_1))). \tag{2.4}$$

Поскольку затраты на оптимальном участке $(b-c)$ меньше или равны затрат на неоптимальном пути $(d - e)$, то справедливо неравенство

$$(-\omega(x^*(t))) \leqslant \int_t^{t_1} f_0(\tilde{x}(\xi), \tilde{u}(\xi))\, d\xi + (-\omega(\tilde{x}(t_1))). \tag{2.5}$$

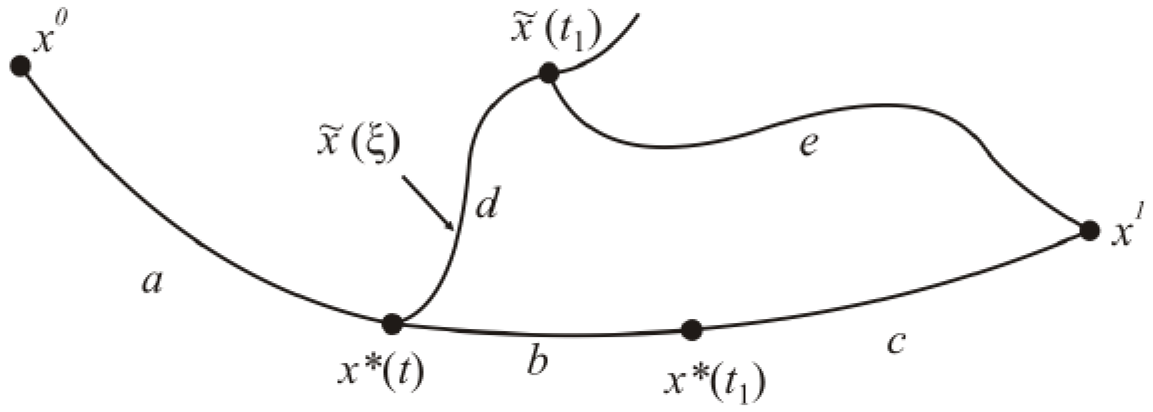


Рис. 2.3. Два способа перехода в $x^1$:$(a - b - c)$ и $(a - d - e)$

После произвольного выбора управления $\tilde{u}(\xi)$ за счет уменьшения значения $t_1$ можно добиться, чтобы на $[t, t_1]$ функция $\tilde{u}(\xi)$ была непрерывна. Тогда по теореме о среднем найдется $\theta_1 \in [t, t_1]$, что

$$\int_t^{t_1} f_0(\tilde{x}(\xi), \tilde{u}(\xi))\, d\xi = f_0(\tilde{x}(\theta_1), \tilde{u}(\theta_1)) \cdot (t_1 - t).$$

Аналогично можно представить интеграл по участку $(b)$. Учитывая, что $x^*(t) = \tilde{x}(t)$, соотношения (2.4)-(2.5) можно представить в виде

$$\frac{\omega(x^*(t_1)) - \omega(x^*(t))}{t_1 - t} = f_0(x^*(\theta_1), u^*(\theta_1)), \tag{2.6}$$

$$\frac{\omega(\tilde{x}(t_1)) - \omega(\tilde{x}(t))}{t_1 - t} \leqslant f_0(\tilde{x}(\theta_2), \tilde{u}(\theta_2)) \tag{2.7}$$

при некоторых $\theta_1, \theta_2 \in [t, t_1]$.

**Гипотеза 2.** *Функция Беллмана $(-\omega(x))$ непрерывно дифференцируема по $x$ в $X_U$.*

Используя непрерывную дифференцируемость функции $\omega(x)$ при $t_1 \to t$ из (2.7) имеем

$$\frac{d}{dt}\omega(\tilde{x}(t)) \leqslant f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)). \tag{2.8}$$

При вычислении полной производной нужно учесть, что в силу (2.1) $\dot{\tilde{x}}_i = f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$. Обозначая $v = \tilde{u}(t)$ — произвольное значение из $V$, а также учитывая, что $\tilde{x}(t) = x^*(t)$, можно записать (2.8) в виде:

$$\forall v \in V: \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x^*(t)) \cdot f_i(x^*(t), v) \leqslant f_0(x^*(t), v). \tag{2.9}$$

Выполняя аналогичные преобразования с равенством (2.6), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x^*(t)) \cdot f_i(x^*(t), u^*(t)) = f_0(x^*(t), u^*(t)). \tag{2.10}$$

Сопоставляя два соотношения, а также учитывая, что всякая точка $x \in$ $\in X_U$ может рассматриваться как точка некоторой оптимальной траектории $x^*(t)$, приходим к уравнению Беллмана:

$$\forall x \in X_U : \max_{u \in V} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)\ f_i(x, u) - f_0(x, u) \right\} = 0. \tag{2.11}$$

Его следует рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции $\omega(x)$. Определив функцию Беллмана, из (2.11) можно для каждого $x$ определить оптимальное значение $u^*(x)$. Тем самым, получено условие, определяющее оптимальный регулятор $u = u^*(x)$, формирующий оптимальное управляющее воздействие в зависимости от текущего состояния $x$ управляемой системы.

## 2.3. Запись условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина

Приведем упрощенный вывод принципа максимума Понтрягина Л.С. на основе уравнения Беллмана, приняв две дополнительные гипотезы.

Можно показать, что в действительности в задачах оптимального управления гипотезы о гладкости функции Беллмана могут не выполняться при $V \neq R^m$. Однако это не приводит к тому, что принцип максимума становится неверным. Просто для его строгого обоснования следует использовать другой математический аппарат [11].

Выберем некоторое $\lambda \geqslant 0$ и умножим обе части соотношений (2.9)-(2.10) на $\lambda$. Введем следующие обозначения. Пусть

$$\psi_0^* = -\lambda,\ \psi_i^*(t) = -\lambda \left( \frac{\partial(-\omega(x^*(t)))}{\partial x_i} \right), \tag{2.12}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Тогда вектор $\bar{\psi}^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T$ пропорционален вектору антиградиента функции Беллмана, вычисляемому вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$:

$$\bar{\psi}^*(t) = -\lambda \cdot \nabla_x(-\omega(x)) \Big|_{x=x^*(t)}. \tag{2.13}$$

Введем специальную функцию

$$H(\psi_0, \bar{\psi}, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u), \tag{2.14}$$

которая в задачах оптимального управления выполняет ту же роль, что и функция Лагранжа в задачах математического программирования.

Функцию (2.14) в задачах оптимального управления называют *функцией Гамильтона*. Далее будет показано, что это название действительно отражает её роль в этих задачах.

Для сокращения записи будем использовать расширенный вектор $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)^T$, тогда функцию Гамильтона можно представить в более компактном виде

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u). \tag{2.15}$$

Используя выражение (2.15), а также (2.12), соотношения (2.9)-(2.10) можно представить в виде:

$$\forall v \in V : \; H(\psi^*(t), x^*(t), v) \leqslant 0, \tag{2.16}$$

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \tag{2.17}$$

для $t \in [0, T]$.
Таким образом, $\forall t \in [0, T]$

$$0 \equiv H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in V} H(\psi^*(t), x^*(t), v). \tag{2.18}$$

Однако, в этом соотношении значение вектора $\psi^*(t)$ выражено через неизвестную функцию Беллмана в силу (2.12). Необходимо найти уравнения, позволяющие определять компоненты $\psi^*(t)$ вне зависимости от функции Беллмана.

Рассмотрим функцию

$$B(x,u) = -\lambda f_0(x,u) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} f_j(x,u). \tag{2.19}$$

Поскольку (в силу гипотезы 1) любая точка области управляемости $x \in X_u$ может рассматриваться как точка некоторой оптимальной траектории, то из (2.9) следует, что

$$\forall x \in X_U,\ \forall v \in V:\ B(x,v) \leqslant 0.$$

В частности, если принять $v = u^*(t)$, то

$$\forall x \in X_U:\ B(x,u^*(t)) \leqslant 0.$$

Однако при $x = x^*(t)$ из (2.10) следует, что

$$B(x^*(t),u^*(t)) = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу, что точки $x^*(t)$ оптимальной траектории таковы, что

$$x^*(t) = \arg\max_{x \in X_U} B(x, u^*(t)). \tag{2.20}$$

Примем еще две гипотезы.

**Гипотеза 3.** *Множество управляемости $X_U$ открыто.*

**Гипотеза 4.** *Функция Беллмана $S(x) = -\omega(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой.*

При справедливости этих гипотез из (2.20) следует, что

$$\nabla_x B(x^*(t), u^*(t)) \equiv 0.$$

В явной форме это условие даст:

$$- \lambda \frac{\partial f_0(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_i}(x^*(t))\ f_j(x^*(t), u^*(t)) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x_j}(x^*(t))\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)) = 0,\ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.21}$$

Вычислим полную производную по времени $\dot{\psi}_i^*(t)$ в силу системы (2.1), используя (2.12):

$$\dot{\psi}_i^*(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial^2 \omega(x^*(t))}{\partial x_i \partial x_j} f_j(x^*(t), u^*(t)). \tag{2.22}$$

Замечая, что вторые производные функции $\omega(x)$, вычисляемые в (2.21) и (2.22) в различной последовательности, совпадают в силу гипотезы 4, из (2.21) и (2.12) получим, что

$$\dot{\psi}_i^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)), \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.23}$$

Таким образом, найдена система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $\psi_i^*(t)$.

Собирая вместе ряд установленных соотношений: (2.18), (2.23) приходим к записи условий оптимальности в задачах оптимального управления в форме принципа максимума Понтрягина.

**Теорема** (принцип максимума Л.С. Понтрягина). *Пусть начальное состояние* $x(0) = x^0$ *системы* (2.1) *принадлежит области управляемости, т.е.* $x^0 \in X_U$, *и* $u = u^*$ *— допустимое управление* ($u^* \in D(V)$), *переводящее систему из состояния* $x^0$ *в заданное конечное состояние* $x^1$ *за конечное время (обозначим его* $T$*). Тогда для того, чтобы управление* $u = u^*(t)$ *и соответствующая ему траектория* $x = x^*(t)$ *были оптимальными, необходимо, чтобы:*

1. $\exists \psi^*(t) = (\psi_0^*(t), \psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T \neq 0$ *— нетривиальный вектор сопряженных переменных,* $t \in [0, T]$, *где* $\psi_0^*(t) = const = \psi_0^* \leqslant 0$, *а компоненты* $\psi_i = \psi_i^*(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ *вектора* $\bar{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T$ *являются решением сопряженной системы, соответствующей* $u^*(t), x^*(t)$*:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\psi_0^*, \bar{\psi}, x^*(t), u^*(t)), \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2.24}$$

2. $\forall t \in [0, T]$ *выполнялось условие максимума*

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in V} H(\psi^*(t), x^*(t), v). \tag{2.25}$$

*2.* $\forall t \in [0,T]$ *выполнялось условие максимума*

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in V} H(\psi^*(t), x^*(t), v). \qquad (2.25)$$

*3. В конечный момент времени* $T$

$$H(\psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = 0. \qquad (2.26)$$

*Оказывается также, что для* $t \in [0,T]$

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = const, \qquad (2.27)$$

*что позволяет выполнить проверку условия* (2.26) *не обязательно в момент времени* $T$*, а в любой момент* $t \in [0,T]$.

Рассуждения, приведенные перед формулировкой теоремы, показывают связь условий принципа максимума с уравнением Беллмана.

Дополнительно покажем, что использование функции $H(\cdot)$ позволяет записать расширенную систему уравнений динамики, а также систему для сопряженных переменных $\psi_i$ в форме гамильтоновой системы, что и определяет название функции $H(\cdot)$

Действительно, введем дополнительную переменную $x_0$ таким образом, чтобы

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u(t)) \tag{2.28}$$

при начальном условии $x_0(0) = 0$. Тогда значение функционала (2.2) примет вид $J[u] = x_0(T)$.

Если ввести расширенный вектор $x \in R^{n+1}$:

$$x^T := (x_0, x^T_{\text{стар.}}),$$

и определить граничные условия для этого расширенного вектора:

$$x^T(0) = (0, x^0_{\text{стар.}})^T;\ x^T(T) \in \left\{(z, (x^1_{\text{стар.}})^T) :\ z \in R^1\right\},$$

то систему уравнений для $x \in R^{n+1}$, $\psi \in R^{n+1}$ можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = +\dfrac{\partial H(\psi, x, u(t))}{\partial \psi_i},\ (i = 0, 1, \ldots, n), \\ \dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H(\psi, x, u(t))}{\partial x_i},\ (i = 0, 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{2.29}$$

При постоянстве значений управления из вида системы (2.29) непосредственно следовало бы постоянство функции Гамильтона вдоль любой фазовой траектории $(x(t), \psi(t))$ этой системы. Оказывается, что это свойство сохраняется и для значений $u(t) = u^*(t)$ изменяющихся во времени при условии, что $u^*(t)$ удовлетворяет условию максимума (2.25).

# 2.4. Линейные задачи на оптимальное быстродействие

## 2.4.1. Постановка

Рассмотрим линейную динамическую систему с управлением вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \tag{2.30}$$

где $A$ и $B$ — постоянные матрицы $(n \times n)$ и $(n \times m)$. Управление $u(\cdot)$ принадлежит определенному ранее классу допустимых управлений $D = D(V)$, однако в рассматриваемой постановке множество $V$ возможных значений управления является *выпуклым многогранником* $M$ в $R^m$, т.е. $V = M$. На многогранник $M$ накладываются дополнительные требования: $0 \in M$ и $0$ — не является вершиной $M$.

Далее примем, что $x(0) = x^0$, а целевая точка $x^1$ помещена в начало координат, т.е. $x^1 = 0$, таким образом момент времени $T$ определяется моментом первого попадания фазовой траектории в точку ноль: $x(T) = 0$.

Подынтегральная функция $f_0$ из (2.2) в этих задачах принята равной единице, таким образом

$$J[u] = \int_0^T 1dt = T, \tag{2.31}$$

т.е. значение интегрального функционала совпадает с временем достижения начала координат.

Задача заключается в определении области управляемости $X_U$, а также в выборе допустимого управления, обеспечивающего переход системы из состояния $x^0$, принадлежащего области управляемости, в 0 за минимальное конечное время:

$$\min_{\substack{u\in D(M)\\ x^0\to 0\\ \text{за конечное время}}} T[u]. \tag{2.32}$$

Оказывается, что в задачах такого вида принцип максимума принимает наиболее простую форму. Более того, при выполнении дополнительного *условия общности положения* принцип максимума становится не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления.

**Определение.** Говорят, что задачи (2.30)-(2.32) удовлетворяет *условию общности положения*, если для любого вектора $\omega$, параллельного какому-либо ребру многогранника $M$, система векторов

$$B\omega, AB\omega, \dots, A^{n-1}B\omega \tag{2.33}$$

— линейно независима.

Заметим, что в случае линейной зависимости в одном из наборов (2.33) для некоторого $\omega$ эту зависимость можно разрушить сколь угодно малыми изменениями элементов матриц $A$, $B$ или координат вершин многогранника $M$.

Таким образом, при соответствующем кодировании линейных задач на оптимальное быстродействие точками в многомерном пространстве параметров, можно сказать, что задачи с нарушением общности положения образуют в этом пространстве множество нулевой меры.

### 2.4.2. Принцип максимума и структура оптимального управления

**Теорема** (принцип максимума в линейных задачах на оптимальное быстродействие)**.** *Для того, чтобы в линейной задаче на оптимальное быстродействие* (2.30)-(2.32) *допустимое управление* $u = u^* \in D(M)$, *переводящее* $x^0 \in X_U$ *в точку 0 за конечное время, было оптимальным необходимо и почти всегда (при выполнении условия общности положения) достаточно, чтобы:*

*1.* $\exists$ *нетривиальное решение* $\psi = \psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))^T \neq 0$ *системы*

$$\dot{\psi} = -A^T \psi, \tag{2.34}$$

*при котором выполняется:*

*2.* $\forall t \in [0, T]$

$$(\psi^*(t))^T B u^*(t) = \max_{v \in M} (\psi^*(t))^T B v. \tag{2.35}$$

*Доказательство.* Обоснование достаточности условий 1 и 2 в данном учебном пособии не приводится. Его можно найти в [11]. Необходимость докажем, опираясь на теорему о принципе максимума для задачи общего вида, рассмотренной в разделе 2.3.

Используя вместо ранее введенного в этой теореме обозначения $\bar{\psi}$ обозначение

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T,$$

запишем вид функции Гамильтона:

$$H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 \cdot 1 + \psi^T A x + \psi^T B u. \tag{2.36}$$

Тогда система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных $\psi$ примет вид (2.34), не зависящий от $u^*(t)$ и $x^*(t)$.

Поскольку два первых члена в правой части выражения (2.36) не зависят от управления, то условие максимума в (2.25) примет более простую форму (2.35).

Рассмотрим условие (2.26):

$$\begin{aligned} 0 = H(\psi_0^*, \psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = \\ = \psi_0^* + (\psi^*(T))^T A \underbrace{x^*(T)}_{=0} + (\psi^*(T))^T B u^*(T) = \psi_0^* + \max_{v \in M} (\psi^*(T))^T B v. \end{aligned}$$

Таким образом, константа $\psi_0^*$ должна быть выбрана так:

$$\psi_0^* = -\max_{v \in M} (\psi^*(T))^T B v.$$

Поскольку $0 \in M$, то значение максимума больше или равно нулю, следовательно, будет выполнено требование на знак $\psi_0^* \leqslant 0$.

Таким образом, требование существования константы $\psi_0^*$, имеющей неположительное значение соответствующее остальным требованиям общей теоремы о принципе максимума автоматически выполняется в линейных задачах на оптимальное быстродействие.

Теперь выясним, почему требование $(\psi_0^*, \psi^*(t))^T \neq 0$ общей теоремы оказалось заменено требованием $\psi^*(t) \neq 0$ в рассматриваемой задаче.

Предположим, что в линейной задаче на оптимальное быстродействие для некоторого момента времени $\tilde{t}$ значение $\psi^*(\tilde{t}) = 0$. Поскольку $\psi(t) \equiv 0$ является одним из решений системы (2.34) и при заданных начальных условиях её решение единственно, то при сделанном предположении $\psi^*(t) \equiv 0$. Но тогда из вида (2.36) следет, что

$$H(\psi_0^*, \psi^*(T), x^*(T), u^*(T)) = \psi_0^*,$$

и из (2.26) получаем $\psi_0^* = 0$.

Таким образом, в рассматриваемых задачах предположение $\psi^*(\tilde{t}) = 0$ влечет $(\psi_0^*, \psi^*(t)) \equiv 0$, что противоречит общей теореме о принципе максимума. Следовательно, $\psi^*(t) \neq 0\ \forall t \in [0, T]$.

Покажем теперь справедливость (2.27), т.е. свойства постоянства функции Гамильтона на оптимальных значениях $x^*(t)$ и $u^*(t)$, выяснив одновременно структуру оптимального управления.

Поскольку $\psi_0^* = const$, то нужно обосновать постоянство по $t$ функции

$$C(t) = (\psi^*(t))^T Ax^*(t) + (\psi^*(t))^T Bu^*(t). \tag{2.37}$$

Введем новую переменную $w = Bu$, которую можно трактовать как управляющее воздействие в (2.30). Пусть $w^*(t) = Bu^*(t)$ и $\tilde{M} = B \cdot M$. Т.е. $\tilde{M}$ является $B$–образом многогранника $M$.

В новых обозначениях условие максимума (2.35) примет вид

$$(\psi^*(t), w^*(t)) = \max_{w \in \tilde{M}} (\psi^*(t), w). \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует, что оптимальному значению $w^*(t)$ соответствует тот вектор из многогранника $\tilde{M}$ (заметим, что $0 \in \tilde{M}$), который имеет максимальную проекцию на направление $\psi^*(t)$ (см. рис. 2.4).

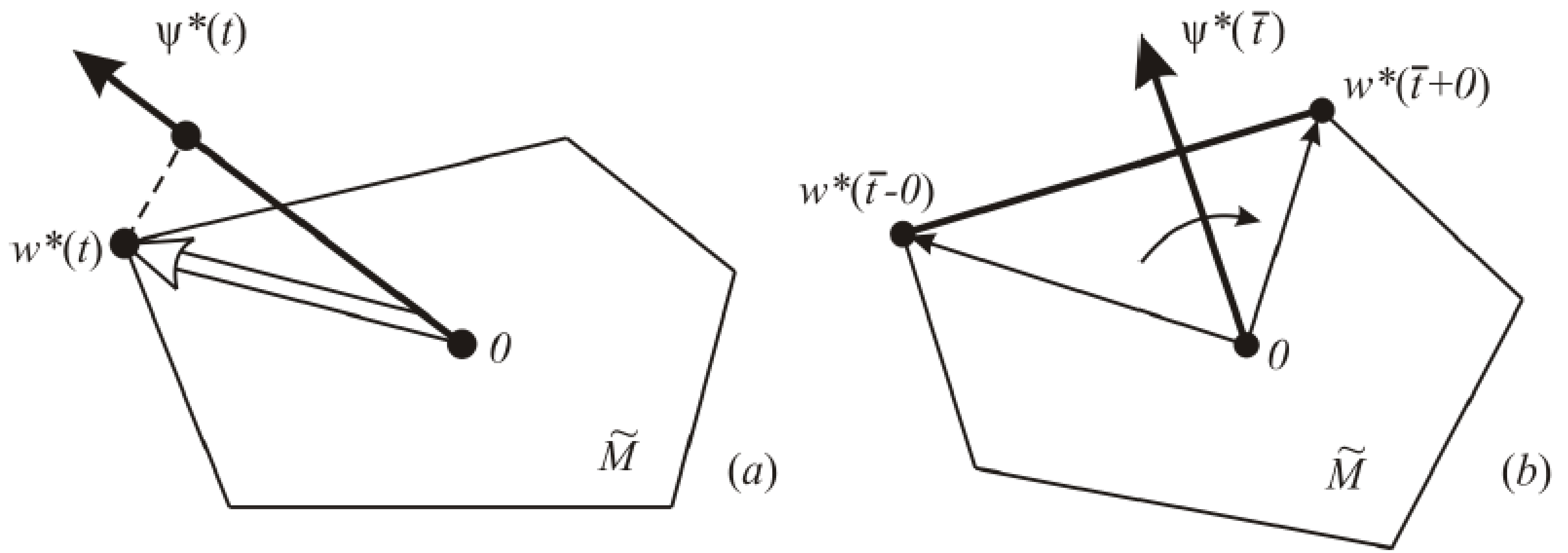


Рис. 2.4. ($a$)–оптимальное управляющее воздействие $w^*(t)$; ($b$)–скачкообразное изменение оптимального значения $w^*$ в момент $\bar{t}$ ортогональности $\psi^*(t)$ грани $\tilde{M}$

Задача (2.38) выбора значения $w^*(t)$ при фиксированном $t$ является задачей линейного программирования. В общем случае, кроме ситуаций ортогональности вектора $\psi^*(t)$ одной из граней $\tilde{M}$, она имеет единственное решение, когда максимум в (2.37) достигается в одной из вершин (рис. 2.4a). В моменты ортогональности $\psi^*(t)$ одной из граней максимум достигается во всех точках $w$, принадлежащих соответствующей грани. В частности, и в этом случае можно выбирать значение $w^*$ в одной из вершин грани, если ортогональность имеет место лишь в отдельные моменты времени, а не на промежутках. Разрывы непрерывности $w^*(t)$ могут происходить лишь в моменты времени $\bar{t}$, соответствующие ортогональности вектора $\psi^*(\bar{t})$ одной из граней.

Таким образом, если ортогональность $\psi^*(t)$ граням многогранника $\tilde{M}$ возможна лишь в отдельные моменты времени, оптимальное управляющее воздействие $w^*(t)$ может быть выбрано в классе кусочно-постоянных функций, принимающих значения на множестве вершин $\tilde{M}$. В этом случае управление $u^*(t)$ также будет кусочно-постоянным. Поскольку в точках $\bar{t}$ разрыва управления скалярное произведение

$$(\psi^*(\bar{t}), w^*(\bar{t}+0) - w^*(\bar{t}-0)) = 0,$$

(см. рис. 2.4b), а функции $x^*(t)$ и $\psi^*(t)$ в (2.37) заведомо непрерывны, выражение $C(t)$ в (2.37) будет принимать одинаковые значения справа и слева от точки разрыва управления:

$$C(\bar{t}+0) = C(\bar{t}-0).$$

Осталось проверить постоянство этого выражения на участках постоянства управления $u^*(t)$. Итак, пусть в окрестности значения $t$ управление $u^*(t)$ постоянно. Тогда $\dot{u}^*(t) = 0$. Следовательно,

$$\dot{C}(t) = (\dot{\psi}^*(t))^T (Ax^*(t) + Bu^*(t)) + (\psi^*(t))^T (A\dot{x}^*(t) + 0) =$$

$$= -(\psi^*(t))^T A\dot{x}^*(t) + (\psi^*(t))^T A\dot{x}^*(t) = 0,$$

что означает постоянство $C(t)$ на участках постоянства $u^*(t)$.

Теорема доказана. $\square$

### 2.4.3. Содержательная трактовка условия максимума

Условие максимума (2.35) после введения управляющего воздействия $w(t) = Bu(t)$, с уравнением динамики

$$\dot{x} = Ax + w(t) \tag{2.39}$$

приобретает форму (2.38).

В этом уравнении вектор фазовой скорости собственной динамики объекта (2.39) определяется на оптимальной траектории произведением $Ax^*(t)$, а $w = w^*(t)$ есть управляющее воздействие, обеспечивающее добавочную фазовую скорость.

Вектор $\psi^*(t)$ в (2.38), в силу (2.12), пропорционален вектору антиградиента функции Беллмана (т. е. функции оптимальных затрат), вычисленной в точке текущего состояния динамической системы на оптимальной траектории. Таким образом, в фазовом пространстве для точек $x = x^*(t)$ оптимальной траектории вектор $\psi^*(t)$ определяет направление скорейшего локального убывания функции оптимальных затрат по переходу из текущей точки $x^*(t)$ в заданную целевую точку $x^1 = 0$.

**Вывод.** *Условия* (2.35) *и* (2.38) *показывают, что оптимальное воздействие* $w^*(t)$ *должно выбираться как такое допустимое в пределах* $\tilde{M}$ *приращение фазовой скорости, которое обеспечивает наибольшую проекцию полной фазовой скорости объекта на направление* $\psi^*(t)$, *— направление скорейшего локального убывания оптимальных затрат.*

## 4. Решение задач оптимального управления

Пример 13.1. Исследуем на экстремум функционал задачи об оптимальном быстродействии

$$T \to \inf, \quad mx'' = u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$
$$x(T) = 0, \quad x'(T) = 0.$$

*Решение.* С помощью замены $x = Ay + B(t-T)^2$ задачу можно представить в виде

$$T \to \inf, \quad y'' = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$
$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0.$$

Это задача оптимального управления

$$T = \int\limits_0^T 1\,dt \to \inf, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad u \in [-1, 1],$$
$$x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0,$$

где $x_1 = y$, $x_2 = x_1' = y'$, $x_0 = y_0$.

Применим принцип максимума Понтрягина.

1. Построим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int\limits_0^T (p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) - u(t)))\,dt + \lambda_0 T$$
$$+ \lambda_1(x_1(0) - x_0) + \lambda_2(x_2(0) - v_0) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T).$$

2. Запишем необходимые условия экстремума:

а) уравнение Эйлера лагранжиана

$$L = p_1(x_1' - x_2) + p_2(x_2' - u)$$

$$L_{x_i} = \frac{d}{dt} L_{x_i'}, \quad i = 1,2 \iff p_1' = 0, \quad p_2' = -p_1 \implies p_2(t) = Ct + C_1;$$

б) трансверсальности по $x$

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = \lambda_2, \quad p_1(T) = -\lambda_3, \quad p_2(T) = -\lambda_4;$$

в) оптимальности по $u$ (слагаемые, которые не зависят от $u$ не выписываем)

$$\min_{u \in [-1,1]} [-p_2(t)u] = -p_2(t)\widehat{u}(t) \implies \widehat{u}(t) = \operatorname{sign}(p_2(t))$$

при $p_2(t) \neq 0$;

г) стационарности по $T$

$$\mathscr{L}_T = 0 \iff \lambda_0 + \lambda_3 x_1'(T) + \lambda_4 x_2'(T) = 0.$$

Учитывая, что $x_2'(T) = 0$, $\lambda_4 = -p_2(T)$, $p_2(T)\widehat{u}(T) = |p_2(T)|$, получим

$$\mathscr{L}_T = 0 \iff \lambda_0 = |p_2(T)|.$$

3. Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия стационарности г) вытекает, что $p_2(T) = 0$. Функция $p_2(t)$ не может быть тождественным нулем, поскольку все множители Лагранжа были бы нулями. Итак, из условия а) выводим $p_2 = C(t-T)$, а из условия в) $\widehat{u}(t) = 1$ или $\widehat{u}(t) = -1$. Если $\widehat{u}(t) = 1$, то $x_2(t) = t - T$, $x_1(t) = (t-T)^2/2$, $v_0^2/2 = x_0$. Таким образом, с помощью управления $\widehat{u}(t) = 1$ в точку $(0,0)$ можно переместиться лишь из начальных точек $(x_0, v_0)$, которые удовлетворяют соотношению $x_0 = v_0^2/2$, $v_0 < 0$, а с помощью управления $\widehat{u}(t) = -1$ — в точку $(0,0)$ можно переместиться лишь из начальных точек $(x_0, v_0)$ таких, что $x_0 = -v_0^2/2$, $v_0 > 0$.

Пусть теперь $\lambda_0 = 1$. Тогда из условия г) получим $|p_2(T)| = 1$. Итак, условие удовлетворяют две функции

$$p_2^+(t) = C(t-T) + 1, \quad p_2^-(t) = C(t-T) - 1.$$

Соответствующие управления имеют вид

$$\widehat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ +1, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \widehat{u}^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -1, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Изобразим траекторию движения в фазовой плоскости $(x_1, x_2)$. При тех значениях $t$, при которых $\widehat{u}(t) = 1$, выполняется

$$x_2' = 1 \Longrightarrow x_1' = x_2 = t + C' \Longrightarrow x_1 = t^2/2 + C't + C'' = x_2^2/2 + C.$$

Фазовая траектория, которая отвечает таким значениям $t$, — это часть параболы $x_1 = x_2^2/2 + C$. Направление движения по ней определяется

из условия возрастания $x_2$, поскольку $x_2' = 1$. Аналогично, значениям $t$ таким, что $\widehat{u}(t) = -1$, в фазовой плоскости отвечает парабола $x_1 = -x_2^2/2+C$, а направление движения определяется из условия убывания $x_2$, поскольку $x_2' = -1$.

Итак, фазовые траектории движения в плоскости $(x_1, x_2)$ — это части парабол $x_1 = \pm x_2^2/2+C$. Линия $x_1 = -x_2|x_2|/2$ разделяет плоскость на две части. Если начальная точка $(x_0, v_0)$ лежит по левую сторону от этой линии, то с помощью управления $\widehat{u}(t) = 1$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, точка переместится по параболе $x_1 = x_2^2/2+C$ до пересечения с параболой $x_1 = -x_2^2/2$ в момент $t = \tau$. В этот момент происходит изменение управления $\widehat{u} = +1$ на $\widehat{u} = -1$. Далее точка движется по параболе $x_1 = -x_2^2/2$ в точку $(0, 0)$. Точка, которая лежит по правую сторону от линии $x_1 = -x_2|x_2|/2$, под действием управления $\widehat{u}(t) = -1$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, движется по параболе $x_1 = -x_2^2/2 + C$ до пересечения с линией в момент $t = \tau$, а потом — по параболе $x_1 = x_2^2/2$ под действием управления $\widehat{u}(t) = +1$.

*Ответ*. Оптимальный управляемый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ определяется соотношениями

$$\widehat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ +1, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \widehat{x}^+(t) = \begin{cases} -t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ (t-T)^2/2, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

$$\widehat{u}^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -1, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \widehat{x}^-(t) = \begin{cases} t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -(t-T)^2/2, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $\tau$, $C_1$, $C_2$ определяются начальными условиями $x_0, v_0$. $\triangle$

Пример 13.2. Исследуем на экстремум функционал задачи о мягкой посадке на поверхность Луны:

$$F + M - m(T) \to \inf, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -g_L + u/m, \quad m' = -u,$$
$$x_1(0) = h_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant U,$$

где $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = v(t) = x_1(t)$, $t_0 = 0$ — начало спуска, $T$ — конец спуска (момент посадки).

*Решение.* Это задача оптимального управления (задача Майера). Применим принцип максимума Понтрягина.

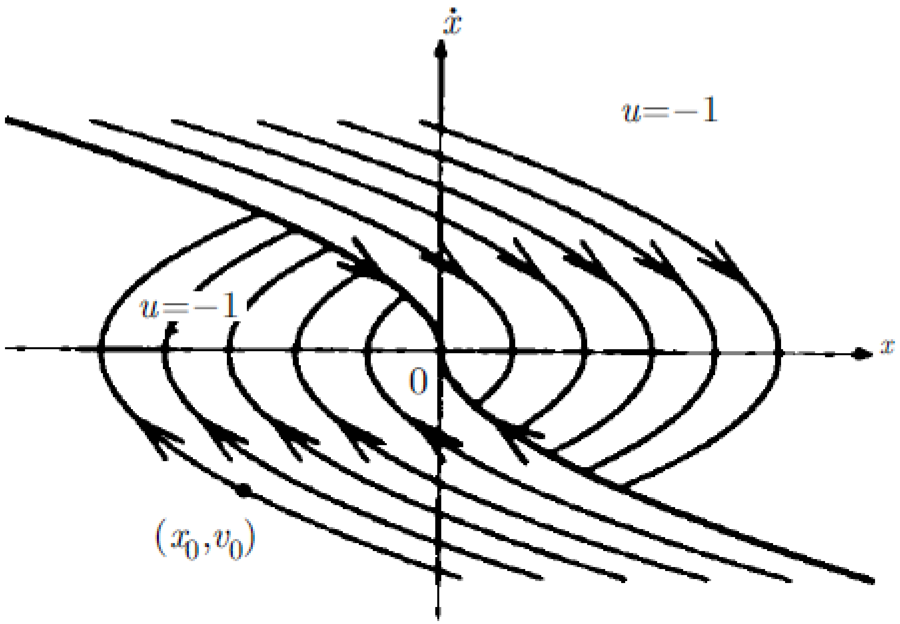


Рис. 12. Задача об оптимальном быстродействии

1. Построим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int_0^T [p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) + g_L - u(t)/m(t))$$
$$+ p_3(t)(m'(t) + u(t))]\, dt + \lambda_0(F + M - m(T)) + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

Здесь нет граничных условий на левом конце, поскольку они не влияют на решение задачи.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

а) уравнение Эйлера

$$-p_1' = 0, \quad -p_2' - p_1 = 0, \quad -p_3' + p_2 u/m^2 = 0;$$

б) трансверсальности по $x$

$$p_1(T) = -\mu_1, \quad p_2(T) = -\mu_2, \quad p_3(T) = \lambda_0;$$

в) оптимальности по $u$

$$\min_{0 \leqslant u \leqslant U} [p_3(t)u - p_2(t)u/m(t)] = p_3(t)\widehat{u}(t) - p_2(t)\widehat{u}(t)/m(t);$$

г) стационарности по $T$

$$-\lambda_0 m'(T) + \mu_1 x_1'(T) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 \widehat{u}(T) + p_2(T)(g_L - \widehat{u}(T)/m(T)) = 0.$$

При условии а) получим, что $p_1(t) = P$, $P = \mathrm{const}$, $p_2(t) = -Pt + Q$, $Q = \mathrm{const}$. Обозначим $\Psi(t) = -p_3(t) + p_2(t)/m(t)$. Тогда из условия а) вытекает, что $\Psi'(t) = -P/m(t)$.

Из условия стационарности по $T$ получаем $\Psi(T)\widehat{u}(T) = p_2(T)g_L$, а из условия оптимальности по $u$ получим

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \Psi(t) < 0, \\ U, & \Psi(t) \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Если $P = 0$, то $\Psi = \Psi_0 = \mathrm{const}$, где $\Psi_0 \neq 0$. Иначе $p_2 = 0$ и все множители Лагранжа становятся нулями. Поэтому $\widehat{u}(t) \equiv 0$ или $\widehat{u}(t) \equiv U$. Если же $P \neq 0$, то функция $\Psi$ строго монотонна и имеет переключение с $\widehat{u} = U$ на $\widehat{u} = 0$ или, наоборот, с $\widehat{u} = 0$ на $\widehat{u} = U$. Первый случай невозможен по техническим причинам. Остаются две возможности: или двигаться с управлением $\widehat{u}(t) \equiv U$, или делать переключение из нуля на $U$. Пусть $\tau$ — момент переключения. Движение аппарата при $t \leqslant \tau$ описывается уравнением свободного падения

$$x_1 = h_0 + v_0 t - g_L t^2/2, \quad x_2 = v_0 - g_L t, m(t) \equiv m_0.$$

В фазовой плоскости $(x_1, x_2)$ эти соотношения определяют параболу

$$x_1 = h_0 + v_0(v_0 - x_2)/g_L - (v_0 - x_2)^2/2g_L.$$

Движение аппарата на отрезке времени $[\tau, T]$ определяется уравнением

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -g_L + u/m, \quad m' = -U$$

с начальными условиями

$$x_1(\tau) = h_1, \quad x_2(\tau) = v_1, \quad m(\tau) = F + M = m_0.$$

Решение соответствующей задачи Коши имеет вид ($\tau + s = t$):

$$x_1(\tau + s) = h_1 + v_1 s - \frac{g_L s^2}{2} + s - \frac{m_0}{U}\left(1 - \frac{Us}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{Us}{m_0}\right),$$

$$x_2(\tau + s) = v_1 - g_L s - \ln\left(1 - \frac{Us}{m_0}\right), \quad m = m_0 - Us.$$

Множество точек $(h_1, v_1)$, из которых можно перейти в начало координат за время работы двигателя на полную мощность, задается в параметрической форме уравнениями $x_1(s) = x_2(s) = 0$. Исключая параметр $s$, получим кривую $\Psi(h_0, v_0)$.

*Ответ*. Оптимальное управление

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ U, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $\tau$ — первый положительный корень уравнения

$$\Psi(h_0 + v_0\tau - \frac{g_L\tau^2}{2}; v_0 - g_L\tau) = 0. \tag{13.25}$$

На промежутке времени $[0, \tau]$ аппарат движется в режиме свободного падения, а на промежутке $[\tau, T]$ двигатель работает на полную мощность. Если при заданных $(h_0, v_0)$ уравнение (13.25) не имеет решений, то мягкая посадка невозможна. $\triangle$

Пример 13.3. Исследовать на экстремум функционал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4 ((x')^2 + x)\, dt \to \inf, \quad |x'| \leqslant 1,\ x(0) = 0.$$

*Решение.* 1. Приведем задачу к задаче оптимального управления в форме Понтрягина:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^4 (u^2 + x)\, dt \to \inf, \quad x' = u,\ u \in [-1, 1],\ x(0) = 0.$$

2. Составим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int_0^4 [\lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u)]\, dt + \lambda x(0).$$

3. Запишем необходимые условия экстремума:
а) уравнение Эйлера лагранжиана

$$L = \lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u): \quad p' = \lambda_0,$$

б) трансверсальности по $x$

$$L_{x'}(t_k) = (-1)^k l_{x(t_k)}, \quad k = 0, 1 \Longleftrightarrow p(0) = \lambda, \quad p(4) = 0,$$

в) оптимальности по $u$

$$\min_{-1\leqslant u\leqslant 1}[\lambda_0 u^2 - p(t)u] = \lambda_0\widehat{u}^2(t) - p(t)\widehat{u}(t).$$

4. Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия а) вытекает, что $p' = 0$, а из условия б) следует, что $p = \lambda = 0$. Все множители Лагранжа стали нулями, что противоречит принципу максимума. Пусть теперь $\lambda_0 = 1$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид $p' = 1$. Такому уравнению и условиям трансверсальности удовлетворяет функция $p = t - 4$. Из условия оптимальности по $u$ получаем

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} p(t), & |p(t)/2| > 1; \\ p(t)/2, & |p(t)/2| \leqslant 1. \end{cases}$$

Итак,

$$\widehat{x}'(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ (t-4)/2, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Пользуясь начальным условием $x(0) = 0$, определяем непрерывную функцию

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ t^2/4 - 2t + 1, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

5. Покажем, что функция $\widehat{x}(t)$ дает абсолютный минимум. Пусть функция $h(\cdot) \in KC^1([0,4])$ такая, что $\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)$ — допустимая функция. Интегрируя частями и учитывая, что $\widehat{x}(0) = 0$, $\widehat{x}'(t) = \frac{t-4}{2}$ при $2 \leqslant t \leqslant 4$, получаем

$$J(\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\widehat{x}(\cdot)) = \int\limits_0^4 ((\widehat{x}' + h')^2 + \widehat{x} + h)\, dt - \int\limits_0^4 ((\widehat{x}')^2 + \widehat{x})\, dt$$

$$= \int\limits_0^4 2\widehat{x}'h'\, dt + \int\limits_0^4 h\, dt + \int\limits_0^4 (h')^2\, dt \geqslant 2\int\limits_0^4 \widehat{x}'\, dh$$

$$+ \int\limits_0^4 h\, dt = 2\widehat{x}'h\Big|_0^4 + \int\limits_0^4 (-2\widehat{x}'' + 1)h\, dt = \int\limits_0^2 h\, dt \geqslant 0$$

вследствие того, что $h(t) \geqslant 0$ при $t \in [0,2]$, поскольку $h(0) = 0$ и $h'(t) > 0$ при $t \in [0,2]$.

*Ответ*. Оптимальный управляемый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ определяется соотношениями

$$\widehat{x}(\cdot) = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t^2/4 - 2t + 1, & 2 \leqslant t \leqslant 4; \end{cases} \quad \widehat{u}(\cdot) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ (t-4)/2, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases} \quad \triangle$$

Пример 13.4. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^{T_0} |x'(t)|\,dt \to \inf, \quad x'(t) \geqslant A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = b, \quad A < 0.$$

*Решение.* 1. Приведем задачу к задаче оптимального управления в форме Понтрягина:

$$\int_0^{T_0} |u(t)|\,dt \to \inf, \quad x' = u, \quad u \geqslant A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = b.$$

2. Составим функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int_0^{T_0} (\lambda_0 |u(t)| + p(t)(x'(t) - u(t))\,dt + \mu_1 x(0) + \mu_2 (x(T_0) - b).$$

3. Запишем необходимые условия экстремума:
а) уравнение Эйлера лагранжиана $L = \lambda_0 u + p(x' - u)$

$$p' = 0 \Longrightarrow p(t) = p_0 = \text{const};$$

б) трансверсальности по $x$

$$p(0) = \mu_1, \quad p(T_0) = -\mu_2;$$

в) оптимальности по $u$

$$\min_{u \geqslant A} [\lambda_0 |u| - p(t) u] = \lambda_0 |\widehat{u}(t)| - p(\widehat{t}) u(t).$$

4. Если $\lambda_0 = 0$, то $p_0 \neq 0$ (иначе все множители Лагранжа — нули). Пусть $p_0 > 0$. Тогда $\min_{u \geqslant A}(-p_0 u) = -\infty$ и условие оптимальности по $u$ не выполняется. Если $p_0 < 0$, то из условия трансверсальности б) вытекает $u \equiv A$, $x(t) = At$. Допустимая экстремаль возможна лишь при $b = AT_0$. Возьмем $\lambda_0 = 1$. Условие оптимальности по $u$ не выполняется при $p_0 > 1$, а при $p_0 = 1$ это условие выполняется для любой неотрицательной функции $\widehat{u}(\cdot)$. Если $-1 < p_0 < 1$, то $\widehat{u} \equiv 0$, если $p_0 = -1$, то $\widehat{u}(\cdot)$ — любая функция, удовлетворяющая неравенству $A \leqslant \widehat{u}(t) \leqslant 0$, если $p_0 < 1$, то $\widehat{u} = A$.

5. Из соотношения

$$\int_0^{T_0} x'(t)\, dt = b$$

выводим

$$|b| \leqslant \int_0^{T_0} |x'(t)|\, dt.$$

Здесь равенство достигается на любой допустимой экстремали. Это означает, что любая допустимая экстремаль дает абсолютный минимум задачи.

*Ответ*. Если $b<AT_0$, то допустимых функций нет. Если $b=AT_0$, то есть одна допустимая функция — экстремаль $\widehat{x}(t) = At$. Если $AT_0<b<0$, то допустимая экстремаль — любая монотонно убывающая допустимая функция. Если $b = 0$, то единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} \equiv 0$. Если $b > 0$, то любая монотонно возрастающая функция есть допустимая экстремаль. Любая допустимая экстремаль дает абсолютный минимум задачи. △