

Глава 1

Основные соотношения гидроупругости

Гидроупругость изучает взаимодействие жидкостей и деформируемых твердых тел, форма которых меняется под действием сил. Абсолютно твердые тела, рассматриваемые в теоретической механике, не меняют свою форму. Исследование взаимодействия жидкости с абсолютно твердыми телами является задачей гидромеханики.

Для описания движения жидкости и деформируемого твердого тела мы будем использовать модель сплошной среды. Пусть в объеме τ заключена масса среды M . Средней плотностью среды называется величина

$$\rho_{cp} = \frac{M}{\tau}.$$

В объеме τ выберем точку A и предположим, что объем уменьшается, стягиваясь в точку A . Если среда неоднородна, то ρ_{cp} сначала будет заметно зависеть от величины τ . Затем, когда среда в объеме τ станет почти однородной, ρ_{cp} практически не будет меняться. Однако при дальнейшем уменьшении τ до величины, сравнимой с расстояниями между молекулами, ρ_{cp} начинает испытывать резкие колебания, связанные с изменением числа молекул внутри объема.

Малый объем $\delta\tau$, средние характеристики которого (плотность, скорость, температура) можно считать постоянными, и содержащий достаточно много молекул, чтобы изменение их числа практически не влияло на средние характеристики, называется физически бесконечно малым объемом. Модель сплошной среды можно использовать в том случае, когда в рассматриваемой среде существует объем $\delta\tau$.

Плотность среды в точке A , принадлежащей физически беско-

нечно малому объему определяется по формуле

$$\rho = \lim_{\tau \rightarrow \delta\tau} \rho_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow \delta\tau} \frac{M}{\tau}, \quad A \in \delta\tau.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что физически бесконечно малый объем существует. Кроме того, мы будем пренебрегать размерами частицы среды, имеющей объем $\delta\tau$, и рассматривать ее как материальную точку, положение которой задается тремя декартовыми или криволинейными координатами. В этом случае плотность среды в точке A определяется по формуле

$$\rho = \lim_{\tau \rightarrow 0} \rho_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{M}{\tau},$$

где условие $\tau \rightarrow 0$ означает, что объем τ стягивается в точку A . Аналогичным образом определяются другие локальные характеристики сплошной среды.

1.1. Переменные Эйлера и Лагранжа

Для постановки задачи гидроупругости нужно записать уравнения движения жидкости и деформируемого твердого тела, а также задать условия на поверхности их контакта. При этом над учитывать, что в уравнениях гидромеханики удобно использовать переменные Эйлера, а в уравнениях теории упругости — переменные Лагранжа.

Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O (рис. 1.1). Пусть в момент времени $t = t_0$ частица сплошной среды находилась в точке A_0 с декартовыми координатами a, b, c , а в момент времени t она переместилась в точку A с координатами x, y, z . Положение точки A можно задать с помощью вектора

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат. Предположим, что известны функции

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t), \quad (1.1)$$

$$\rho = \rho(a, b, c, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(a, b, c, t), \quad (1.2)$$

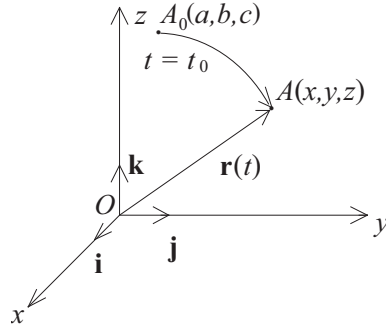


Рис. 1.1. Перемещение точки.

где ρ и \mathbf{v} — плотность и скорость частицы среды. Характеристикой среды является также температура, но в дальнейшем мы будем считать температуру постоянной величиной. Величины a, b, c, t называются переменными Лагранжа, а формулы (1.1) и (1.2) — решением Лагранжа. Формула (1.1) задает траекторию частицы.

В различные моменты времени через точку A проходят различные частицы сплошной среды. Функции

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t), \quad (1.3)$$

дают характеристики частицы, находящейся в данный момент времени в точке A . Переменные x, y, z, t носят название переменных Эйлера, а формулы (1.3) представляют собой решение Эйлера. При $t = t_0$ переменные Лагранжа и Эйлера совпадают: $a = x, b = y, c = z$.

Пусть задача описания движения среды решена в переменных Лагранжа, т. е. известны функции, входящие в формулы (1.1) и (1.2), а между a, b, c и x, y, z имеется взаимно однозначное соответствие. Разрешив систему (1.1) относительно a, b, c , можно выразить переменные Лагранжа через переменные Эйлера:

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t). \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в (1.2) дает решение Эйлера (1.3).

Переход от решения (1.3) к решению (1.2) оказывается более сложной процедурой. Учитывая, что скорость

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k},$$

мы имеем равенства

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad (1.5)$$

Подстановка в них функций $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$ и $v_z(x, y, z)$, заданных формулами (1.3) дает систему дифференциальных уравнений для определения x , y , z , общее решение которой имеет вид

$$x = x(C_1, C_2, C_3, t), \quad y = y(C_1, C_2, C_3, t), \quad z = z(C_1, C_2, C_3, t),$$

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 находятся из условий

$$x(t_0) = a, \quad y(t_0) = b, \quad z(t_0) = c.$$

Подставив $C_i(a, b, c)$ в общее решение, мы получим формулы (1.1), описывающие траекторию движения частицы. Подстановка соотношений (1.1) в (1.3) дает зависимости плотности и скорости частицы среды от переменных Лагранжа.

Производная по времени функции $f(t)$, вычисленная при фиксированных значениях переменных Лагранжа a , b , c , называется индивидуальной, так как она характеризует выбранную точку и обозначается f'_I . Если $f = f(a, b, c, t)$, то

$$f'_I = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Для функции переменных Эйлера $f = f(x(t), y(t), z(t), t)$ получаем

$$f'_I = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Скорость и ускорение является индивидуальными производными от векторов $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и \mathbf{v} . При использовании переменных Эйлера

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{r}'_I &= v_x \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{w} = \mathbf{v}'_I &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Локальная или местная производная функции $f(t)$ по времени f'_L характеризует изменение $f(t)$ в заданной точке пространства и вычисляется при фиксированных x , y , z . Для функции $f = f(x, y, z, t)$ имеем равенство

$$f'_L = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Если функция зависит от переменных Лагранжа a, b, c , то

$$f'_L = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Функции $\dot{a} = da/dt$, $\dot{b} = db/dt$ и $\dot{c} = dc/dt$ находятся после дифференцирования по времени соотношений (1.1) с учетом равенств $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$, $dz/dt = 0$ и решения полученной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial x}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial x}{\partial c} \dot{c} + \frac{\partial x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial y}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial y}{\partial c} \dot{c} + \frac{\partial y}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial z}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial z}{\partial c} \dot{c} + \frac{\partial z}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Движение сплошной среды называется установившимся или стационарным, если в любой ее точке характеристики среды не изменяются. В этом случае локальные производные от всех характеристик среды равны нулю.

При описании движения жидкости мы будем использовать переменные Эйлера и следующие обозначения для индивидуальной и локальной производных

$$f'_I = \frac{df}{dt}, \quad f'_L = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Так, например, для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\rho}{dt} = v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

а движение жидкости будет стационарным, если

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

Уравнения движения деформируемых твердых тел мы будем записывать в переменных Лагранжа. В этих уравнениях встречаются только индивидуальные производные $f'_I = \partial f / \partial t$. Обозначения f'_I и f'_L в дальнейшем не используются.

1.2. Уравнения гидромеханики

Закон сохранения масс.

Рассмотрим некоторое количество жидкости, которое в момент времени t имеет объем τ и массу

$$M = \int_{\tau} \rho d\tau.$$

При перемещении частиц жидкости заполняемый ими объем может измениться, но не изменится масса частиц. Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0.$$

Последнее равенство представляет собой запись закона сохранения масс в интегральной форме. Для записи закона сохранения масс в дифференциальной форме воспользуемся формулой дифференцирования объемного интеграла [1, стр. 37]

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} A d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau. \quad (1.6)$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы появляется благодаря зависимости τ от t . Положив $A = \rho$, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau = 0.$$

Данное равенство имеет место для любого объема τ , поэтому

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Мы получили дифференциальную форму записи закона сохранения масс, которую называют также уравнением неразрывности.

Для установившегося движения $\partial\rho/\partial t = 0$, и уравнение неразрывности принимает вид

$$v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

В случае несжимаемой жидкости $d\rho/dt = 0$, и

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Закон изменения количества движения.

Пусть \mathbf{F} — главный вектор сил, действующих на массу M жидкости, занимающей объем τ . Средней массовой силой называется вектор $\mathbf{F}_{cp} = \mathbf{F}/M$, а массовая сила, действующая в данной точке определяется по формуле

$$\mathbf{f} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{F}_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{M}.$$

На объем $d\tau$ с массой $dm = \rho d\tau$ действует сила $\mathbf{f}dm = \rho \mathbf{f} d\tau$, поэтому

$$\mathbf{F} = \int_{\tau} \rho \mathbf{f} d\tau.$$

В уравнения движения деформируемых твердых тел вместо \mathbf{f} обычно входит распределенная нагрузка $\mathbf{q} = \rho \mathbf{f}$, и главный вектор сил, действующих на тело объемом τ находится по формуле

$$\mathbf{F} = \int_{\tau} \mathbf{q} d\tau.$$

Для силы тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, $\mathbf{q} = \rho \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

Предположим, что объем τ ограничен поверхностью S . Действующие на нее силы называются поверхностными. Выделим на S элемент поверхности ΔS с нормалью \mathbf{n} . Главный вектор поверхностных сил, действующих на ΔS обозначим $\Delta \mathbf{F}_n^S$. Пусть площадка ΔS стягивается в точку. Вектор

$$\tau_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n^S}{\Delta S}$$

называют напряжением поверхностных сил в этой точке. Главный вектор поверхностных сил, действующих на поверхность S

$$\mathbf{F}_S = \int_S \tau_n dS.$$

Формула Коши

$$\tau_n = \tau_x \cos(\hat{n}, x) + \tau_y \cos(\hat{n}, y) + \tau_z \cos(\hat{n}, z)$$

дает возможность вычислить напряжение τ_n , если известны напряжения τ_x , τ_y и τ_z , действующие на площадки, перпендикулярные осям декартовой системы координат.

Количество движения жидкости, заключенной в объеме τ определяется по формуле

$$\mathbf{K} = \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau.$$

Закон изменения количества движения

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{f} d\tau + \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS.$$

Для вычисления производной от объемного интеграла воспользуемся формулой (1.6):

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau.$$

Принимая во внимание формулы Коши и Гаусса-Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S &= \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS = \int_S [\tau_x \cos(n, \hat{x}) + \tau_y \cos(n, \hat{y}) + \tau_z \cos(n, \hat{z})] dS = \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \tag{1.7}$$

С учетом двух последних формул закон изменения количества движения принимает вид

$$\int_{\tau} \left[\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho \mathbf{f} - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right] d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема τ имеем равенство

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z},$$

в котором $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ благодаря закону сохранения масс. Следовательно,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}.$$

Последняя формула представляет собой закон изменения количества движения жидкости в дифференциальной форме.

1.3. Движение и равновесие идеальной жидкости

Для идеальной жидкости $\boldsymbol{\tau}_x = -\mathbf{i}p$, $\boldsymbol{\tau}_y = -\mathbf{j}p$, $\boldsymbol{\tau}_z = -\mathbf{k}p$, где p — давление, и закон изменения количества движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Это уравнение движения идеальной жидкости называется уравнением Эйлера.

Движение жидкости называется безвихревым, если

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0.$$

В этом случае существует функция $\varphi(x, y, z, t)$, называемая потенциалом скоростей и такая, что $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. В дальнейшем рассматривается только безвихревое движение идеальной жидкости, которое называют также потенциальным. Для несжимаемой жидкости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Подстановка в эту формулу $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ дает уравнение Лапласа для потенциала скоростей:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.8)$$

В цилиндрической системе координат r, θ, z оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.9)$$

Жидкость называется баротропной, если ее плотность зависит только от давления: $\rho = \Psi(p)$. Введем функцию

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{\Psi(p)}.$$

Тогда

$$\text{grad } P = \mathbf{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\Psi(p)} \left(\mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Предположим, что жидкость идеальна и баротропна, ее движение является безвихревым, а массовые силы консервативны, т. е. $\mathbf{f} = -\text{grad } V$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } V - \text{grad } P,$$

где

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}.$$

Докажем, что

$$v_x \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} = \text{grad} \frac{v^2}{2} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \frac{v^2}{2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{v^2}{2}. \quad (1.10)$$

Коэффициент при \mathbf{i} в левой части равенства (1.10) имеет вид

$$l_i = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Для безвихревого движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

поэтому

$$l_i = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Коэффициент l_i совпадает с коэффициентом

$$r_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

при \mathbf{i} в правой части равенства (1.10). Нетрудно убедиться в том, что равны и коэффициенты при \mathbf{j} и \mathbf{k} в левой и правой частях равенства (1.10). Принимая во внимание равенство (1.10) и формулу

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

уравнение Эйлера можно записать в виде

$$\text{grad} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P = c(t), \quad (1.11)$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени. Интеграл уравнения Эйлера (1.11) называется интегралом Лагранжа. Если φ — потенциал скоростей, то функция

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \int c(t) dt$$

тоже является потенциалом скоростей. Замена в (1.11) функции φ функцией $\tilde{\varphi}$ дает равенство

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P = 0,$$

поэтому в интеграле Лагранжа (1.11) функцию $c(t)$ можно взять равной нулю.

Для установившегося движения \mathbf{v} и φ не зависят от времени и интеграл Лагранжа (1.11) превращается в интеграл Эйлера-Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + V + P = C,$$

где C — произвольная постоянная. Если жидкость несжимаема, то ее плотность ρ является постоянной величиной, и $P = p/\rho$.

Рассмотрим равновесие идеальной несжимаемой жидкости. Учитывая, что в интеграле Эйлера-Бернулли $v = 0$, получаем

$$V + p/\rho = C, \quad p = -\rho V + C', \quad C' = \rho C.$$

Предположим, что на жидкость действует только сила тяжести. В этом случае $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Направим ось z параллельно вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} в сторону, противоположную, направлению вектора \mathbf{g} . Тогда $\mathbf{f} = -\mathbf{k}g$, $V = gz$, $p = -\rho gz + C'$. Если $p = 0$ при $z = 0$, то $C' = 0$ и

$$p = -\rho gz.$$

Пусть $p = 0$ на поверхности полупространства, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, причем жидкость находится в равновесии. Выберем начало координат на этой поверхности (рис. 1.2) Тогда давление жидкости на глубине $h = -z$ определяется по фор-

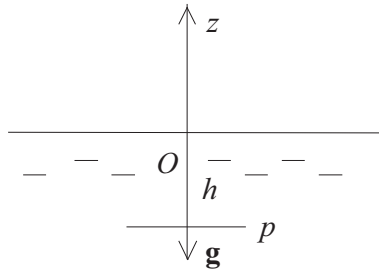


Рис. 1.2. Давление в покоящейся жидкости.

муле

$$p = \rho gh.$$

Закон Архимеда.

Если в рассматриваемую жидкость погружено тело, то на его поверхность S будет действовать давление $p = -\rho gz$. Для вычисления главного вектора сил, действующих со стороны жидкости на тело объемом τ , воспользуемся формулой (1.7):

$$\mathbf{F}_S = \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS = \int_\tau \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) d\tau.$$

Для идеальной жидкости $\boldsymbol{\tau}_x = -\mathbf{i}p$, $\boldsymbol{\tau}_y = -\mathbf{j}p$, $\boldsymbol{\tau}_z = -\mathbf{k}p$, поэтому

$$\mathbf{F}_S = - \int_\tau \text{grad } p d\tau = \mathbf{k}\rho g \int_\tau d\tau = \mathbf{k}\rho g\tau = \mathbf{k}P_\rho,$$

где $P_\rho = \rho g\tau$ — вес жидкости, вытесненной телом.

Главный момент сил, действующих на тело со стороны жидкости

$$\mathbf{L} = \int_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n) dS.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \rho gz [\mathbf{i} \cos(\hat{n}, x) + \mathbf{j} \cos(\hat{n}, y) + \mathbf{k} \cos(\hat{n}, z)],$$

находим проекций вектора \mathbf{L} на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} L_x &= \rho g \int_S [yz \cos(\hat{n}, z) - z^2 \cos(\hat{n}, y)] dS \\ L_y &= \rho g \int_S [z^2 \cos(\hat{n}, x) - xz \cos(\hat{n}, z)] dS \\ L_z &= \rho g \int_S [xz \cos(\hat{n}, y) - yz \cos(\hat{n}, x)] dS. \end{aligned}$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} L_x &= \rho g \int_{\tau} \left(\frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial y} \right) d\tau = \rho g \int_{\tau} y d\tau, \\ L_y &= \rho g \int_{\tau} \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) d\tau = -\rho g \int_{\tau} x d\tau, \\ L_z &= \rho g \int_{\tau} \left(\frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial x} \right) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Координаты центра масс вытесненного телом объема жидкости равны

$$x_c = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x d\tau, \quad y_c = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} y d\tau, \quad z_c = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} z d\tau.$$

Следовательно,

$$L_x = \rho g \tau y_c, \quad L_y = -\rho g \tau x_c.$$

Выберем ось z так, чтобы она проходила через центр масс. Тогда $x_c = y_c = 0$ и главный момент $\mathbf{L} = 0$. Таким образом, система сил, приложенных к телу со стороны жидкости, эквивалентна равнодействующей, линия действия которой проходит через центр масс вытесненного телом объема жидкости. Равнодействующая направлена вертикально вверх, а ее величина равна весу вытесненной телом жидкости. Это утверждение называется законом Архимеда.

1.4. Продольная деформация стержней

Во многих конструкциях встречаются узкие тела (стержни, пластины, оболочки) некоторые размеры которых малы по сравнению с другими их размерами. Рассмотрим, например, однородный цилиндр с радиусом основания R и высотой l . Если $R \ll l$, то цилиндр называют стержнем длиной l с круговым поперечным сечением (рис. 1.3 *a*). Ось стержня совпадает с осью цилиндра. Она представляет собой от-

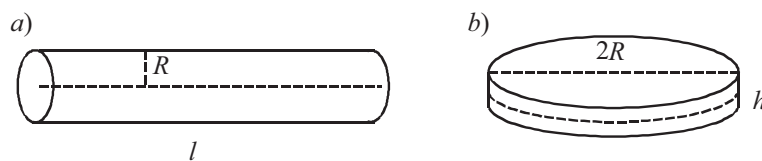


Рис. 1.3. Стержень и пластина.

резок прямой, поэтому рассматриваемый стержень называется прямолинейным. В общем случае тело называется стержнем, если один из его характерных размеров (длина) много больше, двух других характерных размеров (размеров поперечного сечения). Сечениями стержня могут быть любые плоские фигуры. Если кривизна оси стержня отлична от нуля, то стержень называется криволинейным.

Пусть теперь $h \ll R$, где h высота цилиндра, а R по-прежнему радиус его основания (рис. 1.3 *b*). В этом случае цилиндр называют круговой пластиной толщиной h . Срединной поверхностью пластины является круг, параллельный основаниям цилиндра и находящийся на расстоянии $h/2$ от каждого из них.

Оболочка отличается от пластины тем, что ее срединная поверхность имеет ненулевую кривизну. Так, например, сферической оболочкой радиуса R и толщиной h называется тело, границами которого являются две сферы с радиусами $R - h/2$ и $R + h/2$, причем $h \ll R$. Срединной поверхностью такой оболочки является сфера радиуса R .

В общем случае пластиной или оболочкой называется тело один из характерных размеров которого (толщина) мал по сравнению двумя другими характерными размерами (размерами срединной поверхности).

Безразмерные уравнения теории упругости содержат отношения характерных размеров тела. Если эти уравнения описывают равновесие или движение стержней, пластин или оболочек, то в них входят малые параметры. Это позволяет с помощью асимптотических методов получить более простые приближенные уравнения.

Другой исторически более ранний способ получения уравнений движения узких тел состоит в использовании некоторых предположений (гипотез). В дальнейшем с помощью асимптотического анализа уравнений теории упругости была подтверждена справедливость большинства гипотез и определена погрешность полученных на их основе приближенных уравнений.

Рассмотрим в качестве примера уравнения продольной деформации прямолинейного однородного стержня. Направим ось x по оси стержня (рис. 1.4). Тогда поперечное сечение стержня G будет параллельно координатной плоскости yz . Предположим, что при продольной деформации стержня выполняется следующая гипотеза.

Гипотеза. Все точки любого поперечного сечения стержня смещаются в направлении оси стержня на одинаковую величину u (см. рис. 1.4). Асимптотический анализ показывает, что это предположе-

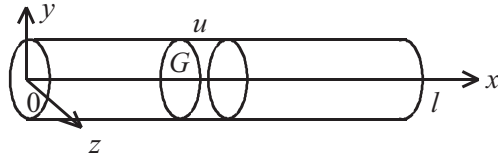


Рис. 1.4. Продольная деформация стержня.

ние тем больше соответствует действительности, чем меньше отношение характерного размера поперечного сечения к длине стержня.

Из сделанного предположения следует, что перемещения точек стержня не зависят от координат y , z и являются функциями только координаты x и времени t : $u = u(x, t)$. Это означает, что для определения перемещений точек стержня достаточно определить перемещения точек оси стержня, так как перемещение любой точки стержня совпадает с перемещением точки оси стержня, лежащей в том же сечении.

Рассмотрим отрезок оси стержня, лежащий между точкам с координатами x и $x + \Delta x$ (рис. 1.5). Предположим, что $u = u(x)$, т. е. будем решать задачу статики.

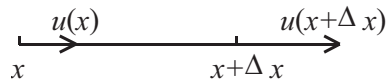


Рис. 1.5. Удлинение стержня.

После деформации, т. е. после перемещений концов отрезка на расстояния $u(x)$ и $u(x + \Delta x)$, первоначальная длина отрезка Δx изменится, если $u(x) \neq u(x + \Delta x)$. В случае $u(x) < u(x + \Delta x)$ отрезок растянется, а в случае $u(x) > u(x + \Delta x)$ — сожмется. Разность $u(x + \Delta x) - u(x)$ характеризует удлинение отрезка, а величина

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

представляет собой его относительное удлинение. Относительным удлинением или деформацией растяжения-сжатия в точке x называется функция

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}.$$

Уравнение

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (1.12)$$

дает выражение деформации через перемещение u , которое называют геометрическим соотношением.

Предположим, что зависимость напряжения от деформации является линейной, т. е. выполняется закон Гука

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x),$$

где E — модуль Юнга, являющийся характеристикой материала стержня. Для всех точек поперечного сечения стержня $G(x)$, проходящего через точку с координатой x , деформация $\varepsilon(x)$ имеет одинаковую величину. Из закона Гука следует, что напряжения $\sigma(x)$ равномерно распределены по сечению G , поэтому продольное усилие в стержне $N(x) = S\sigma(x)$, где S — площадь поперечного сечения. Умножив уравнение закона Гука на S , получим выражение усилия через деформацию:

$$N(x) = SE\varepsilon(x). \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) называется уравнением состояния или соотношением упругости, а величина SE — жесткостью на растяжение-сжатие. В дальнейшем предполагается, что SE не зависит от x

Для определения усилия N следует составить уравнение равновесия стержня под действием приложенных к нему нагрузок. Считая положительными растягивающие усилия, приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на часть стержня, вырезанную из него сечениями $G(x)$ и $G(x + \Delta x)$ (рис. 1.6):

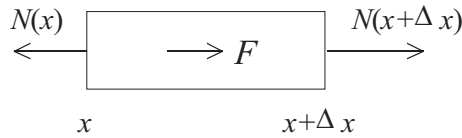


Рис. 1.6. Силы, действующие на часть стержня.

$$N(x + \Delta x) - N(x) + F = 0.$$

Здесь F — равнодействующая внешних сил. Разделив это равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение равновесия:

$$\frac{dN}{dx} + q(x) = 0, \quad (1.14)$$

где функция

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta x}$$

называется внешней распределенной нагрузкой. В частности, в случае действия силы тяжести на вертикально расположенный стержень

$$F = g\Delta m = S\rho g\Delta x, \quad q = S\rho g,$$

где g — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1.12)–(1.14) описывает продольную деформацию стержня. Подстановка (1.12) в (1.13) дает следующее выражение для продольного усилия в стержне

$$N = SE \frac{du}{dx}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.14), получаем уравнение в перемещениях

$$SE \frac{d^2u}{dx^2} + q(x) = 0. \quad (1.16)$$

Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные, которые определяются из двух граничных условий, заданных на концах стержня. В частности, условия закрепления концов стержня длиной l имеют вид $u(0) = u(l) = 0$.

Для получения уравнений динамики из уравнений статики удобно использовать принцип Даламбера. Уравнение, описывающее движение стержня, получается из уравнения (1.16) добавлением к нагрузке q распределенной инерционной нагрузки

$$-\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где ρS — масса поперечного сечения, а также заменами $u(x)$, $q(x)$ на $u(x, t)$, $q(x, t)$ и обыкновенной производной d/dx частной производной $\partial/\partial x$:

$$SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x, t) = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение свободных колебаний получим из (1.17), положив $q = 0$:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.18)$$

где $a^2 = E/\rho$. Такой же вид имеет уравнение колебаний струны, однако для струны параметр a определяется по другой формуле.

1.5. Деформация, колебания и устойчивость балок

При поперечной деформации точки стержня движутся в направлении, перпендикулярном его оси, и ось стержня изгибается. Стержень, работающий на изгиб, принято называть балкой. Так, например, под колебаниями балки понимаются поперечные колебания стержня.

Рассмотрим однородный прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, который имеет плоскость симметрии S , проходящую через ось стержня. Плоскость симметрии есть, в частности, у стержней с прямоугольным и круглым поперечными сечениями. Направим ось Ox по оси стержня, а ось Oy выберем так, чтобы она лежала в плоскости симметрии (рис. 1.7).

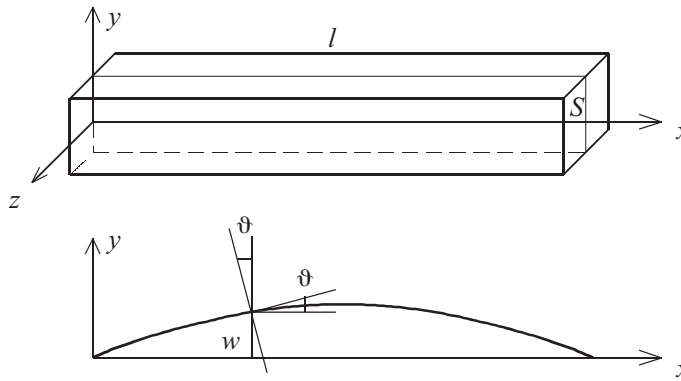


Рис. 1.7. Изгиб балки.

Предположим, что силы, действующие на стержень лежат в плоскости симметрии. В противном случае изгиб балки будет сопровождаться кручением. Смещение точки оси балки в направлении оси Oy обозначим $w(x)$. Будем считать, что при изгибе балки ее сечения не меняют форму и остаются перпендикулярными к оси балки. Эта гипотеза Эйлера-Бернулли подтверждается как экспериментальными данными, так и асимптотическим анализом уравнений теории упругости. Следствием принятой гипотезы является равенство

$$\vartheta = w' = \frac{dw}{dx},$$

где ϑ — угол поворота сечения балки (см. рис. 1.7).

Кривизна оси недеформированной балки $k_0 = 0$. Для деформированной балки

$$k = w'' / (1 + w'^2)^{3/2}.$$

В линейной теории предполагается, что $w' = \vartheta \ll 1$, и для определения кривизны используется приближенная формула $k = w''$. Изменение кривизны балки при ее деформировании

$$\varkappa = k - k_0 = w''. \quad (1.19)$$

Соотношение (1.19) дает связь деформации \varkappa с перемещением w .

На рис. 1.8 изображена часть деформированной балки, вырезанная из нее сечениями $G(x)$ и $G(x + \Delta x)$, пересекающими ось балки в точках с координатами x и $x + \Delta x$. При изгибе балки угол поворота

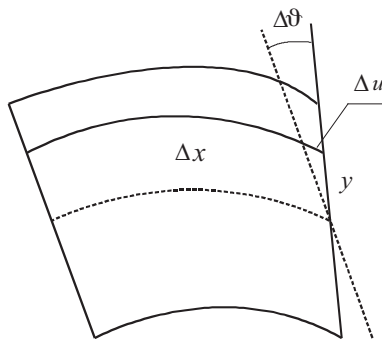


Рис. 1.8. Деформация балки.

$\vartheta(x)$ сечения $G(x)$ отличается от угла поворота $\vartheta(x + \Delta x) = \vartheta(x) + \Delta\vartheta$ сечения $G(x + \Delta x)$. Благодаря этому происходит растяжение-сжатие материала балки в продольном направлении. В случае, изображенном на рис. 1.8, волокна в верхней части балки растягиваются, а в нижней части сжимаются. Ось балки принадлежит нейтральному слою, волокна которого сохраняют свою длину. Нейтральный слой разделяет сжатую и растянутую части балки.

Длина волокна в верхней части балки увеличивается на величину $\Delta u = y\Delta\vartheta$. Деформация этого волокна

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y \frac{d\vartheta}{dx} = y\varkappa.$$

Пусть для материала балки выполняется закон Гука. Тогда в сечении возникают нормальные напряжения $\sigma = E\varepsilon = Ey\varkappa$, создающие

изгибающий момент

$$M = \int_G y \sigma dS = EJ \varkappa = EJ \chi, \quad J = \int_G y^2 dS$$

где J — момент инерции поперечного сечения относительно оси z . Для балки с прямоугольным поперечным сечением шириной a и высотой b

$$J = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz = \frac{ab^3}{12}.$$

Соотношения упругости для балки имеет вид

$$M = EJ \chi. \quad (1.20)$$

Величина EJ называется жесткостью балки на изгиб. В дальнейшем предполагается, что EJ не зависит от x .

Предположим, что на балку действует распределенная нормальная нагрузка $q(x)$. Для вывода уравнения равновесия приравняем нулю сумму проекций на ось y всех сил, действующих на часть балки, вырезанную из нее сечениями $G(x)$ и $G(x + \Delta x)$ (рис. 1.9). При

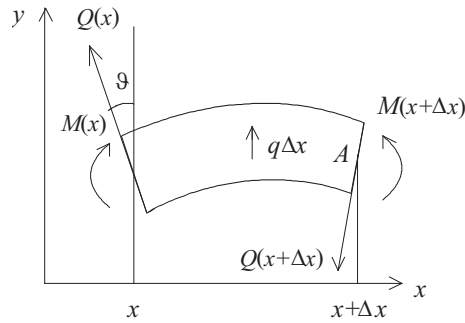


Рис. 1.9. Равновесие балки.

проектировании учитываем малость угла ϑ и считаем, что $\sin \vartheta = 0$, $\cos \vartheta = 1$. Разделив полученное равенство

$$Q(x) + q\Delta x - Q(x + \Delta x) = 0$$

на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим уравнение

$$Q' = q, \quad (1.21)$$

где Q — перерезывающая сила, представляющая собой равнодействующую касательных напряжений в сечении $G(x)$.

Условие равенства моментов сил относительно точки A

$$M(x + \Delta x) - M(x) - Q(x)\Delta x - q(\Delta x)^2/2 = 0$$

после деления его на Δx с последующим переходом к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ дает второе уравнение равновесия:

$$M' = Q. \quad (1.22)$$

Подставив (1.19) в (1.20) и (1.20) в (1.22), находим следующие выражения для усилий

$$M = EJw'', \quad Q = EJw'''. \quad (1.23)$$

После подстановки второй формулы (1.23) в (1.21) получим уравнение изгиба балки в перемещениях:

$$EJw'''' = q. \quad (1.24)$$

Дифференциальное уравнение (1.24) имеет 4-й порядок, поэтому на каждом конце балки должно быть задано по два граничных условия. В литературе чаще всего встречаются следующие варианты однородных граничных условий: заделка $w = \vartheta = 0$, шарнирный край $w = M = 0$ и свободный край $M = Q = 0$.

Уравнение, описывающее свободные колебания балки, получается из уравнения (2.37) заменой распределенной нагрузки q инерционной нагрузкой, а также заменой $w(x)$ на $w(x, t)$:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.25)$$

Будем искать решение уравнения (1.25) в виде

$$w(x, t) = w(x) \sin \omega t.$$

Подставив это решение в уравнение (1.25), получим уравнение для определения частот и форм колебаний

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\rho S}{EJ} \omega^2. \quad (1.26)$$

Граничные условия для уравнения (1.26) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} w = w' = 0 & \quad \text{заделка,} \\ w = w'' = 0 & \quad \text{шарнирный край,} \\ w'' = w''' = 0 & \quad \text{свободный край.} \end{aligned}$$

При любых однородных граничных условиях уравнение (1.26) имеет тривиальное решение, соответствующее положению равновесия.

Подставив в уравнение (1.26) функцию $w = e^{\gamma x}$, получим характеристическое уравнение

$$\gamma^4 - \alpha^4 = 0,$$

четырем корням которого $\gamma_{1,2} = \pm i\alpha$, $\gamma_{3,4} = \pm \alpha$ соответствуют четыре линейно независимых решения уравнения (1.26):

$$w_{1,2} = e^{\pm i\alpha x}, \quad w_{3,4} = e^{\pm \alpha x}.$$

Линейные комбинации этих решений тоже являются решениями, поэтому общее решение уравнения (1.26) можно представить в виде

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x. \quad (1.27)$$

Подстановка общего решения в граничные условия дает систему четырех однородных линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных C_i . Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравняв нулю определитель, получим уравнение для определения α . Частоты колебаний выражаются через корни этого уравнения α_k с помощью формулы

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \alpha_k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Уравнение (1.26) наряду с уравнением колебаний струны относится к числу канонических уравнений, встречающихся в самых разных областях прикладной математики. В дальнейшем мы получим его в одной из задач гидроупругости.

Общее решение уравнения (1.26) можно записать в виде линейной комбинации функций Крылова или балочных функций:

$$w = AS(\alpha x) + BT(\alpha x) + CU(\alpha x) + DV(\alpha x), \quad (1.28)$$

где

$$\begin{aligned} S(z) &= (\operatorname{ch} z + \cos z)/2, & T(z) &= (\operatorname{sh} z + \sin z)/2, \\ U(z) &= (\operatorname{ch} z - \cos z)/2, & V(z) &= (\operatorname{sh} z - \sin z)/2. \end{aligned}$$

Функции S, T, U, V обладают следующим полезным свойством

$$S(0) = 1, \quad T(0) = U(0) = V(0) = 0.$$

Кроме того, при дифференцировании любая балочная функция превращается в другую балочную функцию: $S' = V, V' = U$ и т. д.

Подстановка общего решения (1.28) в граничные условия дает более простые системы для определения произвольных постоянных, чем подстановка в них решения (1.27). Рассмотрим, например, балку с заделанными концами, для которой

$$w = w' = 0, \quad x = 0, \quad x = l.$$

Ввиду того, что

$$w' = \alpha[AV(\alpha x) + BS(\alpha x) + CT(\alpha x) + DU(\alpha x)],$$

из условий на краю $x = 0$ следует, что $A = B = 0$. Подстановка решения (1.28) в граничные условия на краю $x = l$ приводит к системе двух уравнений

$$CU(z) + DV(z) = 0, \quad CT(z) + DU(z) = 0, \quad z = \alpha l.$$

Уравнение для определения α_k имеет вид $U^2(z) - T(z)V(z) = 0$. Использование общего решения (1.27) дает систему из четырех уравнений с определителем 4-го порядка.

Рассмотрим деформацию балки при действии на нее сжимающей силы P , направленной вдоль оси стержня. В этом случае уравнения равновесия (1.21) и (1.22) принимают вид

$$M' = Q - Pw', \quad Q' = 0. \quad (1.29)$$

Из уравнений (1.20), (1.29) вытекает следующее уравнение для прогиба w

$$w'''' + \beta^2 w'' = 0, \quad \beta^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (1.30)$$

При любых однородных граничных условиях уравнение (1.30) имеет тривиальное решение $w = 0$, соответствующее положению равновесия, при котором стержень остается прямолинейным. Наличие

нетривиального решения уравнения (1.30) свидетельствует о потере устойчивости этого положения равновесия. Пусть β_c — наименьшее положительное значение β , при котором уравнение (1.30) имеет нетривиальное решение. Тогда сила $P_c = EJ\beta_c^2$ называется критической нагрузкой или силой Эйлера. При достижении силой P величины P_c стержень теряет устойчивость.

Предположим, что на краях балки длиной l заданы условия шарнирного опирания

$$w = w'' = 0, \quad x = 0, \quad x = l. \quad (1.31)$$

Подставив в граничные условия (1.31) общее решение уравнения (1.30)

$$w = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 x + C_4,$$

получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных C_k :

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta^2 \sin \beta l & \beta^2 \cos \beta l & 0 & 0 \\ \sin \beta l & \cos \beta l & l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.32)$$

Система уравнений (1.32) имеет нетривиальное решение, если ее определитель $\Delta = 0$. Из условия $\Delta = 0$ следует, что $\beta^4 \sin \beta l = 0$. Легко проверить, что при $\beta = 0$ уравнение (1.30) с граничными условиями (1.31) имеет только тривиальное решение. Следовательно, нетривиальное решение системы уравнений (1.32) существует при $\sin \beta l = 0$. Наименьшим положительным корнем уравнения $\sin \beta l = 0$ является $\beta_c = \pi/l$. Сила Эйлера для шарнирно опертой балки определяется по формуле

$$P_c = EJ \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Если $\sin \beta l = 0$, то из уравнений (1.32) вытекает, что $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ и нетривиальное решение уравнения (1.30) имеет вид $w = C_1 \sin \beta_c x$. Это решение определяется с точностью до произвольного множителя и называется формой потери устойчивости. Ввиду того, что C_1 является произвольной постоянной, форма потери устойчивости не дает возможности определить прогиб стержня после потери устойчивости. Найти закритическое положение равновесия стержня при $P > P_c$ можно путем решения задачи в нелинейной постановке.

При решении задачи об устойчивости балки мы не учитывали ее собственный вес. С учетом силы тяжести уравнения (1.29) принимают вид

$$M' = Q - Pw', \quad Q' = q, \quad q = \rho Sg,$$

где ρ — плотность, S — площадь поперечного сечения балки, g — ускорение свободного падения, а уравнение (1.29) для прогиба w становится неоднородным:

$$w'''' + \beta^2 w'' = \frac{q}{EJ}.$$

После подстановки в граничные условия (1.31) общего решения этого уравнения

$$w = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 x + C_4 + Gx^2, \quad G = \frac{q}{2\beta^2 EJ}$$

мы получаем следующую систему уравнений для определения произвольных постоянных C_k

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta^2 \sin \beta l & \beta^2 \cos \beta l & 0 & 0 \\ \sin \beta l & \cos \beta l & l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G \\ 0 \\ 2G \\ -Gl^2 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Определитель системы (1.33) совпадает с определителем Δ системы (1.32). Если $\Delta = 0$, то система (1.33) не имеет решений, что свидетельствует о потере устойчивости в случае $\sin \beta l = 0$. Таким образом, учет веса балки в задаче устойчивости дает результат, совпадающий с результатом решения задачи без учета веса.

1.6. Деформация и колебания струн, мембран и пластин

Струна.

Начнем с задачи о равновесии струны, которая представляет собой сильно растянутую балку, изгибной жесткостью которой можно пренебречь. Уравнение равновесия балки, растянутой продольной силой F имеет вид

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - F \frac{d^2 w}{dx^2} = q_n, \quad (1.34)$$

где EJ — изгибная жесткость, w — прогиб, x — продольная координата, q_n — нормальная нагрузка. Если растягивающая сила достаточно велика, то первым слагаемым в левой части уравнения (1.34)

можно пренебречь, и мы получим уравнение равновесия струны:

$$F \frac{d^2 w}{dx^2} + q_n = 0. \quad (1.35)$$

Замена q_n силой инерции дает уравнение свободных колебаний струны:

$$F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Обозначив

$$a^2 = \frac{F}{\rho S},$$

запишем уравнение в виде

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) совпадает с уравнением продольных колебаний стержня (1.18). Если струна имеет конечную длину, то на ее концах надо задать граничные условия. После этого можно найти частоты колебаний струны.

Рассмотрим распространение волн по бесконечной струне. Решение уравнения (1.36) будем искать в виде

$$w = w_0 \sin(\alpha x - \omega t), \quad (1.37)$$

При фиксированном x решение (1.37) описывает вертикальные колебания точки струны с частотой ω , а при фиксированном значении t — форму струны, которая имеет вид синусоиды. Период этой синусоиды $\lambda = 2\pi/\alpha$ называется длиной волны, а α волновым числом. С увеличением t синусоида меняет свое положение в пространстве, двигаясь вдоль оси Ox . Координаты x точек, в которых $w = w_0$ находятся из условия

$$\alpha x - \omega t = \pi/2 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти точки движутся со скоростью

$$v = \dot{x} = \omega/\alpha,$$

которая называется скоростью распространения волны.

Подставив решение (1.37) в уравнение (1.36), мы получим равенство

$$\omega = \pm \alpha a,$$

которое связывает частоту ω и волновое число α . Скорость распространения волны по струне

$$v = \omega/\alpha = \pm a$$

Для струны зависимость ω от α является линейной функцией, поэтому v не зависит от α . В общем случае $\omega = f(\alpha)$ и $v = f(\alpha)/\alpha$ зависит от волнового числа α и, следовательно, от длины волны λ . Различие скоростей распространения волн с разной длиной волны называется дисперсией а зависимость ω от α дисперсионным уравнением.

Мембрана.

Мембрана это сильно растянутая пластина. Уравнение

$$T\Delta w + q = 0, \quad (1.38)$$

описывает деформацию мембраны под действием нормальной нагрузки q . Здесь T — растягивающее усилие равное силе, деленной на единицу длины контура мембраны, w — прогиб, Δ — оператор Лапласа. В прямоугольной декартовой системе координат Oxy

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Уравнение свободных колебаний мембраны

$$T\Delta w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

можно записать в виде

$$a^2 \Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{T}{\rho h}. \quad (1.39)$$

Решение $w = w(x, t)$ уравнения (1.39), описывающее цилиндрический изгиб мембраны, удовлетворяет уравнению колебаний струны (1.36), так как для него $\Delta w = \partial^2 w / \partial x^2$. В связи с этим можно сказать, что мембрана это "двухмерная струна".

Подставив в уравнение (1.39) решение в виде

$$w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t,$$

получим уравнение для определения частот колебаний мембраны:

$$a^2 \Delta w + \omega^2 w = 0. \quad (1.40)$$

Рассмотрим колебания круглой мембраны радиуса R . В этом случае целесообразно ввести полярные координаты r и φ , для которых

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Условие закрепления края мембраны имеет вид $w(R, \varphi) = 0$.

Проведем разделение переменных

$$w(r, \varphi) = w(r) \cos m\varphi,$$

где m – число волн по окружности. Подставив это решение в уравнение колебаний, получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} w + \alpha^2 w = 0,$$

где $\alpha = \omega/a$. После несложных преобразований это уравнение принимает вид

$$r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + r \frac{dw}{dr} + (\alpha^2 r^2 - m^2) w = 0,$$

а после замены переменной $x = \alpha r$ оно превращается в уравнение Бесселя

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x \frac{\partial w}{\partial x} + (x^2 - m^2) w = 0, \quad (1.41)$$

Его общее решение можно представить в виде линейной комбинации двух функций

$$w = C J_m(x) + D N_m(x),$$

де J_m – функция Бесселя, а N_m – функция Неймана. Функция Неймана равна бесконечности в центре пластины, поэтому следует выбрать $D = 0$. Решение уравнения принимает вид

$$w = C J_m(x).$$

Подставляя $w(r) = C J_m(\alpha r)$, в граничное условие $w(R) = 0$, получаем уравнение для определения α :

$$J_m(\alpha R) = 0.$$

Частоты колебаний выражаются через корни этого уравнения α_k по формуле

$$\omega_k = a \alpha_k.$$

Пластина.

При выводе уравнений пластин используется гипотеза Кирхгофа в соответствии с которой любое волокно пластины перпендикулярное ее срединной поверхности до деформации остается перпендикулярным к срединной поверхности после деформации. На срединной

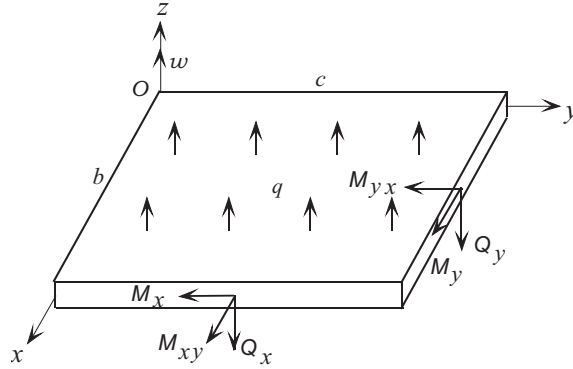


Рис. 1.10. Пластина

поверхности пластины введем декартову систему координат Oxy , а ось Oz направим по нормали к срединной поверхности, как показано на рис. 1.10. На этом же рисунке приведены положительные направления перерезывающих сил Q_x , Q_y изгибающих моментов M_x , M_y и крутящих моментов $M_{xy} = M_{yx}$, возникающих под действием распределенной нормальной нагрузки $q(x, y)$.

Вырезав из пластины прямоугольник, приравняв нулю сумму проекций сил на ось Oz , суммы моментов сил относительно осей Ox , Oy и устремив к нулю размеры прямоугольника, получим три уравнения равновесия пластины:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q(x, y), \quad (1.42)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (1.43)$$

Уравнения состояния (соотношения упругости) имеют вид:

$$M_x = D(\varkappa_x + \nu \varkappa_y), \quad M_y = D(\varkappa_y + \nu \varkappa_x), \quad M_{xy} = D(1-\nu)\varkappa_{xy}, \quad (1.44)$$

где \varkappa_x , \varkappa_y и \varkappa_{xy} — деформации изгиба и кручения. Величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

называется изгибной жесткостью, E — модуль Юнга, h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона, удовлетворяющий неравенству $0 \leq \nu \leq 0.5$.

С помощью кинематических соотношений деформации выражаются через прогиб пластины w :

$$\varkappa_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \varkappa_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \varkappa_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}, \quad \vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1.45)$$

где ϑ_x , ϑ_y — углы поворота нормали.

Подставим (1.43) в (1.42), и (1.45) в (1.44). Тогда

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q(x, y), \quad (1.46)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (1.47)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Подстановка (1.47) в (1.46) дает уравнение статики прямоугольной пластины в перемещениях:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (1.48)$$

Обозначим

$$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Тогда уравнение (1.48) примет вид:

$$D \Delta^2 w = q. \quad (1.49)$$

Это уравнение называют уравнением Софи Жермен.

Уравнение вынужденных колебаний пластины получим добавлением в правую часть уравнения Софи Жермен инерционной нагрузки:

$$D \Delta^2 w = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q. \quad (1.50)$$

1.7. Деформация и колебания цилиндрической оболочки

Будем использовать классическую теорию оболочек, основанную на гипотезах Кирхгофа-Лява:

1) Прямолинейные волокна, нормальные к недеформированной срединной поверхности оболочки, остаются нормальными к деформированной срединной поверхности.

2) Нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку толщиной h . На ее срединной поверхности радиуса R введем криволинейную систему координат z, θ (рис. 1.11). Единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, направленные по касательным к координатным линиям, и единичный вектор $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, направленный по нормали к цилиндру, образуют ортонормированный базис на недеформированной срединной поверхности.

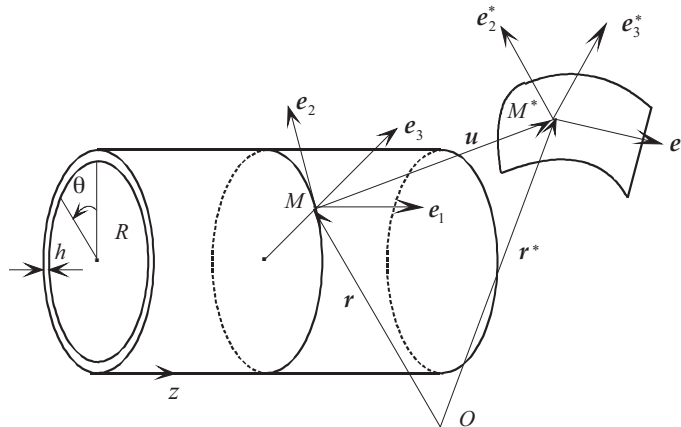


Рис. 1.11. Цилиндрическая оболочка

Пусть положение точки M срединной поверхности относительно начала координат O задано вектором \mathbf{r} . Тогда

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta},$$

где $H_1 = 1, H_2 = R$ — коэффициенты Ламе.

После деформации точка M перейдет в положение M^* , которому соответствует

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}.$$

Вектор

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

называется вектором перемещений.

Единичные векторы

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{1}{H_1^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial z}, \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{1}{H_2^*} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \theta}$$

направлены по касательным к координатным линиям деформированной срединной поверхности, а вектор

$$\mathbf{e}_3^* = \frac{\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*}{|\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*|}$$

представляет собой единичную нормаль к этой поверхности.

Найдем разложение вектора \mathbf{e}_3^* по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, которое понадобится для вывода условий контакта оболочки и жидкости. Для этого продифференцируем вектор

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

по z и ϑ . При изменении координаты z направления векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не меняются, поэтому $\partial \mathbf{e}_k / \partial z = 0, k = 1, 2, 3$ и

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} \mathbf{e}_3.$$

Введем обозначения

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \vartheta_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

где ε_1 — деформация растяжения-сжатия в направлении образующей цилиндра, ϑ_1 — угол поворота нормали. Геометрический смысл величины ω_1 мы выясним позднее. Предположим, что ε_1, ω_1 и ϑ_1 малы по сравнению с единицей. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial z} = (1 + \varepsilon_1) \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 - \vartheta_1 \mathbf{e}_3 \simeq \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 - \vartheta_1 \mathbf{e}_3.$$

Дифференцируя вектор \mathbf{r}^* по ϑ , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \mathbf{e}_3 + u_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \theta} + u_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta}.$$

Вектор \mathbf{e}_1 не меняет направления при изменении переменной θ , поэтому $\partial \mathbf{e}_1 / \partial \theta = 0$. Найдем производные $\partial \mathbf{e}_2 / \partial \theta$ и $\partial \mathbf{e}_3 / \partial \theta$.

По определению частной производной

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_2}{\Delta \theta}.$$

Вектор $\Delta \mathbf{e}_2$ изображен на рис. 1.12. Длина вектора $\partial \mathbf{e}_2 / \partial \theta$ находится

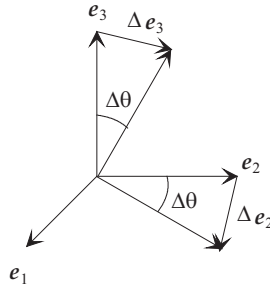


Рис. 1.12. Векторы $\Delta \mathbf{e}_2$ и $\Delta \mathbf{e}_3$

по формуле

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta} \right| = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{e}_2|}{\Delta \theta}$$

и равна 1, так как при $\Delta \theta \rightarrow 0$ длина хорды $|\Delta \mathbf{e}_2|$ стремится к длине дуги $\Delta \theta$, а его направление совпадает с направлением касательной к единичной окружности и, следовательно, с направлением вектора $-\mathbf{e}_3$. Таким образом, $\partial \mathbf{e}_2 / \partial \theta = -\mathbf{e}_3$. С помощью рис. 1.12 нетрудно убедиться в том, что $\partial \mathbf{e}_3 / \partial \theta = \mathbf{e}_2$.

Подставив полученные выражения для производных $\partial \mathbf{e}_2 / \partial \theta$ и $\partial \mathbf{e}_3 / \partial \theta$ в выражение для $\partial \mathbf{r}^* / \partial \theta$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \theta} = [\omega_2 \mathbf{e}_1 + (1 + \varepsilon_2) \mathbf{e}_2 - \vartheta_2 \mathbf{e}_3] R,$$

где

$$\omega_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right), \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \right).$$

Величина ω_2 , деформация растяжения-сжатия в окружном направлении ε_2 и угол поворота ϑ_2 предполагаются малыми по сравнению с единицей, поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \theta} \simeq (\omega_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \vartheta_2 \mathbf{e}_3)R.$$

Принимая во внимание, что

$$H_1^* = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial z} \right| = \sqrt{(1 + \varepsilon_1)^2 + \omega_1^2 + \vartheta_1^2} \simeq 1,$$

$$H_2^* = \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \theta} \right| = R\sqrt{(1 + \varepsilon_2)^2 + \omega_2^2 + \vartheta_2^2} \simeq R,$$

получаем приближенные выражения для \mathbf{e}_1^* и \mathbf{e}_2^* :

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 - \vartheta_1 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2^* = \omega_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \vartheta_2 \mathbf{e}_3. \quad (1.51)$$

С точностью до величин второго порядка малости

$$\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^* = (\mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 - \vartheta_1 \mathbf{e}_3) \times (\omega_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \vartheta_2 \mathbf{e}_3) \simeq \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*| \simeq \sqrt{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \simeq 1,$$

находим

$$\mathbf{e}_3^* \simeq \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (1.52)$$

Вернемся к вопросу о геометрическом смысле величин ω_1 и ω_2 . Из равенства $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^* \simeq 1$ следует, что $\mathbf{e}_3 \simeq \mathbf{e}_3^*$, и поэтому векторы \mathbf{e}_1 ,

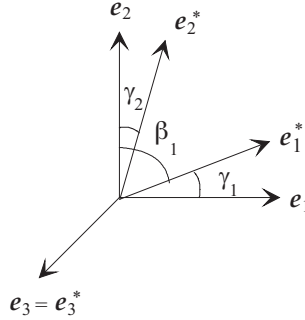


Рис. 1.13. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1^*$ и \mathbf{e}_2^*

\mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_1^* и \mathbf{e}_2^* с точностью до величин второго порядка малости лежат в одной плоскости (рис. 1.13). Из первой формулы (1.51) следует, что

$$\omega_1 \simeq \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 \simeq \cos \beta_1,$$

где β_1 — угол между единичными векторами \mathbf{e}_1^* и \mathbf{e}_2 . Учитывая, что $\beta_1 \simeq \pi/2 - \gamma_1$, где γ_1 — угол между \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_1^* , получаем

$$\omega_1 \simeq \cos \beta_1 \simeq \cos(\pi/2 - \gamma_1) \simeq \sin \gamma_1 \simeq \gamma_1.$$

Аналогичным образом $\omega_2 \simeq \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1 \simeq \sin \gamma_2 \simeq \gamma_2$. Сумма углов γ_1 и γ_2 представляет собой деформацию сдвига

$$\varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}.$$

К полученным формулам для деформаций ε_1 , ε_2 и ε_{12} добавим формулы для деформаций изгиба и кручения \varkappa_1 , \varkappa_2 и \varkappa_{12} , которые находятся подстановкой выражений для углов поворота нормали цилиндрической оболочки ϑ_1 и ϑ_2 в формулы

$$\varkappa_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z},$$

аналогичные формулам (1.45) для пластины. В результате мы получим шесть геометрических условий для цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_3}{R}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \\ \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \\ \varkappa_{12} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = \frac{1-\nu}{2} B \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1), \quad H = D(1-\nu) \varkappa_{12}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где T_1 и T_2 — растягивающие усилия, S — усилие сдвига, M_1 и M_2 — изгибающие моменты, H — крутящий момент,

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Проектирование сил и моментов на оси криволинейной системы координат и добавление в них сил инерции дает пять уравнения вынужденных колебаний оболочки:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + q_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_2 + q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_2 + q_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad Q_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Здесь q_1 , q_2 и q_3 — проекции распределенной нагрузки, Q_1 и Q_2 — перерезывающие силы, ρ — плотность материала. Шестое уравнение выполняется тождественно. Если в уравнениях (1.55) положить $\rho = 0$, то они будут описывать деформацию оболочки. Выбрав $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, мы получим уравнения свободных колебаний.

Система 17-ти уравнений (1.53)–(1.55) содержит 17 неизвестных: u_1 , u_2 , u_3 , ε_1 , ε_2 , ε_{12} , \varkappa_1 , \varkappa_2 , \varkappa_{12} , T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , H , Q_1 , Q_2 . Погрешность этих уравнений по сравнению с уравнениями трехмерной теории упругости пропорциональна отношению h/R .

1.8. Уравнения цилиндрической оболочки в перемещениях

Для вывода уравнений в перемещениях следует подставить геометрические соотношения (1.53) в уравнения состояния (1.54), а те, в свою очередь, в уравнения равновесия (1.55).

Подставив выражения для ε_1 , ε_2 , ε_{12} из (1.53) в формулы для T_1 и S , получим

$$T_1 = B \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \nu \frac{u_3}{R} \right), \quad S = \frac{1-\nu}{2} B \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right).$$

Из первого уравнения равновесия следует, что

$$B \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + q_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

или

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 + \frac{1}{B} \left(q_1 - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = 0,$$

где введены обозначения

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta}, \quad L_{13} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial z}$$

для линейных дифференциальных операторов.

Аналогичным образом можно получить два других уравнения. Система уравнений в перемещениях имеет вид

$$\begin{aligned} L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 + \frac{1}{B} \left(q_1 - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}u_3 + \frac{1}{B} \left(q_2 - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}u_3 + \frac{1}{B} \left(q_3 - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Выражения для дифференциальных операторов из второго и третьего уравнения в общем случае нам не понадобятся. Рассмотрим два важных частных случая.

1) Решения, не зависящие от θ .

Если все неизвестные функции зависят только от переменных z и t , то система уравнений (1.53)–(1.55) распадается на две независимые системы. Первая из них состоит из шести уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_2 + q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad Q_2 = \frac{\partial H}{\partial z}, \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B \varepsilon_{12}, \quad H = (1-\nu) D \varkappa_{12}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \varkappa_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{aligned}$$

и описывает крутильные колебания, при которых нормальные сечения срединной поверхности оболочки, образованные пересечением ее с плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, поворачиваются на разные углы, не меняя формы. Если оболочка находится в контакте с идеальной жидкостью, то величина q_2 мала, и влияние жидкости на крутильные колебания незначительно.

Вторая система содержит 11 уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} + q_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{1}{R} T_2 + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial z}, \\ T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad M_1 = D \varkappa_1, \quad M_2 = D \nu \varkappa_1, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u_3}{R}, \quad \varkappa_1 = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}, \quad \varkappa_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.56}$$

и описывает осесимметричные колебания, при которых нормальные сечения срединной поверхности остаются окружностями, но радиусы этих окружностей могут меняться.

Рассмотрим свободные колебания, для которых $q_1 = q_3 = 0$, и сведем систему (1.56) к системе уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_3}{\partial z} &= (1 - \nu^2) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u_3}{\partial z^4} - \frac{1}{R} \left(\frac{u_3}{R} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &= (1 - \nu^2) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Решение уравнения (1.57) представим в виде

$$u_k(x, t) = u_k(x) \sin \omega t, \quad k = 1, 3.$$

Подставив это решение в уравнения (1.57) и, сделав в них замену переменной по формуле $z = Rs$, получим

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + \nu \frac{du_3}{ds} + \lambda u_1 = 0, \quad -\mu^4 \frac{d^4 u_3}{ds^4} - u_3 - \nu \frac{du_1}{ds} + \lambda u_3 = 0, \quad (1.58)$$

где

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12R^2} \ll 1, \quad \lambda = (1 - \nu^2) \frac{\rho R^2}{E} \omega^2.$$

Пусть оболочка имеет бесконечную длину. Подстановка решения

$$u_1 = C_1 \cos \alpha_b s, \quad u_3 = C_3 \sin \alpha_b s,$$

где $\alpha_b = \alpha R$, α — волновое число, в систему уравнений (1.58) дает систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(a_{11} - \lambda)C_1 + a_{13}C_3 = 0, \quad a_{31}C_1 + (a_{33} - \lambda)C_3 = 0.$$

Здесь

$$a_{11} = \alpha_b^2, \quad a_{13} = a_{31} = -\nu \alpha_b, \quad a_{33} = 1 + \mu^4 \alpha_b^4,$$

Приравняв нулю определитель этой системы, мы получим квадратное уравнение

$$(a_{11} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{13}^2 = 0$$

для определения λ . Выражения корней λ_1 и λ_2 этого квадратного уравнения через безразмерное волновое число α_b представляют собой дисперсионные уравнения.

2) Решения, не зависящие от z .

Если решение уравнений (1.53)–(1.55) не зависит от z , то все нормальные сечения оболочки после деформации имеют одинаковую форму. Для конечной оболочки граничные условия препятствуют деформации такого типа, поэтому точные решения, не зависящие от z , возможны только для бесконечной оболочки.

Приравнивая нулю производные по переменной z в уравнениях (1.53)–(1.55), получим две независимые системы уравнений. Первая система

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + q_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad S = \frac{1-\nu}{2} B \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \\ Q_1 = H = \varkappa_1 = \varkappa_{12} = \varepsilon_1 &= 0 \end{aligned}$$

описывает колебания, при которых образующие оболочки, не изгибаясь и не растягиваясь, смещаются параллельно оси оболочки. Контакт оболочки с идеальной жидкостью почти не оказывает влияния на такие колебания, так как нагрузка q_1 мала.

Вторая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} Q_2 + q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_2 + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ Q_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta}, \quad M_1 = \nu D \varkappa_2, \quad M_2 = D \varkappa_2, \quad T_1 = \nu B \varepsilon_2, \quad T_2 = B \varepsilon_2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_3}{R}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.59)$$

и описывает плоскую деформацию параллели оболочки.

Жесткость оболочки на изгиб D гораздо меньше ее жесткости на растяжение B , поэтому предположение о нерастяжимости параллели

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_3}{R} = 0$$

приводит к системе уравнений, решение которой мало отличается от решения системы (1.59). Равенство $\varepsilon_2 = 0$ является уравнением связи, а усилие T_2 становится неизвестной реакцией связи.

Предположим, что $q_2 = 0$. Это условие приближенно выполняется в задаче о взаимодействии оболочки с идеальной жидкостью. Исключим T_2 из первых двух уравнений системы (1.59), продифференцировав второе уравнение по θ и сложив его с первым уравнением. Получим

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \theta^2} + Q_2 \right) + \frac{\partial q_3}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right).$$

Учитывая, что

$$Q_2 = \frac{D}{R^3} \left(-\frac{\partial^3 u_3}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right), \quad u_3 = -\frac{\partial u_2}{\partial \theta},$$

приходим к уравнению для определения перемещения u_2

$$\frac{D}{R^4} \left(\frac{\partial^6 u_2}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 u_2}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial q_3}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right). \quad (1.60)$$

1.9. Условия контакта цилиндрической оболочки и жидкости

Предположим, что цилиндрическая оболочка находится в пространстве, заполненном идеальной жидкостью (рис. 1.14). Введем в

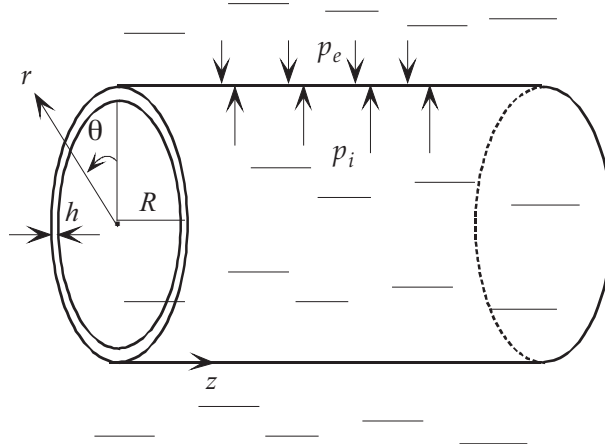


Рис. 1.14. Цилиндрическая оболочка в жидкости

этом пространстве цилиндрическую систему координат z, θ, r так, чтобы на недеформированной поверхности оболочки $r = R$ координаты Эйлера совпадали с координатами Лагранжа z, θ .

Предположим, что жидкость не протекает внутрь оболочки и не отрывается от ее поверхности. Тогда в точке M^* деформированной поверхности (см. рис. 1.11) нормальные составляющие скорости движения жидкости \mathbf{v} и скорости движения срединной поверхности оболочки $\partial \mathbf{u} / \partial t$ совпадают:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}^*) \cdot \mathbf{e}_3^* = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{e}_3^*. \quad (1.61)$$

Равенство (1.61) называется условием непротекания или кинематическим условием.

Динамическое условие при сделанном предположении имеет вид

$$\mathbf{q} = p_r(\mathbf{r}^*)\mathbf{e}_3^*,$$

где \mathbf{q} — распределенная нагрузка, действующая на оболочку со стороны жидкости, $p_r = p_i - p_e$, p_i и p_e — давление жидкости на внутреннюю и внешнюю поверхности оболочки (см. рис. 1.14). Решение задачи с этим динамическим условием сводится к решению внутренней и внешней задач. Если $p_i > p_e$, то можно считать, что жидкость находится только внутри оболочки, а $p_r = p$, где p — давление жидкости на оболочку. В случае $p_i < p_e$ исходная задача эквивалентна внешней задаче, для которой жидкость находится только вне оболочки, причем $p_r = -p$. В дальнейшем без ограничения общности мы будем использовать динамическое условие

$$\mathbf{q} = \pm p(\mathbf{r}^*)\mathbf{e}_3^*, \quad (1.62)$$

где знаки плюс и минус соответствуют внутренней и внешней задачам (рис. 1.15).

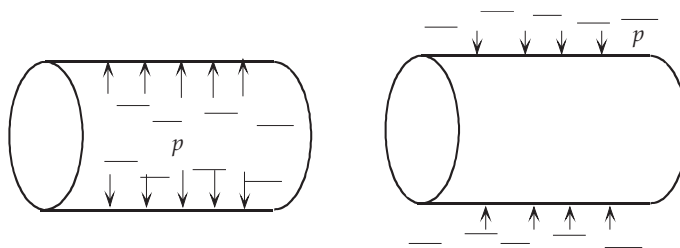


Рис. 1.15. Внутренняя и внешняя задачи

Координаты Лагранжа на недеформированной и деформированной поверхностях совпадают, но координаты Эйлера на этих поверхностях различаются. Для корректной постановки задачи гидроупругости с условиями (1.61) и (1.62) следует перейти к переменным Лагранжа в уравнениях движения жидкости, что приводит к их существенному усложнению. Проще из условий (1.61) и (1.62) получить приближенные условия контакта на недеформированной поверхности оболочки, где совпадают координаты Эйлера и Лагранжа. Для этого разложим в ряд скорость жидкости на деформированной по-

верхности:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}^*) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} u_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} u_2 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} u_3 + \dots$$

Подставим это разложение в условие (1.61) и отбросим величины второго порядка малости. С учетом формулы (1.52) получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} u_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} u_2 - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} u_3 \right) (\vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0 \quad (1.63)$$

Вычислим частные производные от функции $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ по переменным z , r и θ , принимая во внимание правила дифференцирования ортов $\partial \mathbf{e}_2 / \partial \theta = -\mathbf{e}_3$, $\partial \mathbf{e}_3 / \partial \theta = \mathbf{e}_2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \frac{\partial v_1}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial z} \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} &= \frac{\partial v_1}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial r} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial r} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} &= \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \mathbf{e}_3 - v_2 \mathbf{e}_3 + v_3 \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

и подставим полученные выражения для производных в формулу (1.63). Кинематическое условие на недеформированной поверхности $r = R$ примет вид

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial z} u_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} u_2 - \frac{\partial v_1}{\partial r} u_3 \right) \vartheta_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial z} u_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} u_2 - \frac{\partial v_2}{\partial r} u_3 - \frac{1}{R} v_3 u_2 \right) \vartheta_2 + \\ &+ \frac{\partial u_3}{\partial t} - v_3 - \frac{\partial v_3}{\partial z} u_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} u_2 - \frac{\partial v_3}{\partial r} u_3 + \frac{1}{R} v_2 u_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Считая малыми величины u_k и ϑ_k и отбрасывая в условии (1.64) величины второго порядка малости, которые содержат произведения двух малых величин, получаем равенство

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - v_3 - v_1 \vartheta_1 - v_2 \vartheta_2 - \frac{\partial v_3}{\partial z} u_1 - \frac{u_2}{R} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \frac{\partial v_3}{\partial r} u_3 + \frac{u_2}{R} v_2 = 0. \quad (1.65)$$

Подставим в условие непротекания (1.65) выражения для углов поворота

$$\vartheta_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \right).$$

Условие (1.65) примет вид

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = v_3 - \frac{\partial u_3}{\partial z} v_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} v_2 + u_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{u_2}{R} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial r}. \quad (1.66)$$

Для бесконечной оболочки решение не зависит от z , и условие (1.66) упрощается:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = v_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} v_2 + \frac{u_2}{R} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial r}, \quad r = R. \quad (1.67)$$

Для получения динамического условия на недеформированной поверхности разложим в ряд функцию $p(\mathbf{r}^*)$:

$$p(\mathbf{r}^*) = p(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = p(\mathbf{r}) + \frac{\partial p}{\partial z} u_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} u_2 + \frac{\partial p}{\partial r} u_3 + \dots$$

Подставив это разложение в условие (1.62), получим

$$q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 = \pm P (\vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3),$$

где

$$P = p + \frac{\partial p}{\partial z} u_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} u_2 + \frac{\partial p}{\partial r} u_3.$$

Следовательно,

$$q_1 = \pm P \vartheta_1, \quad q_2 = \pm P \vartheta_2, \quad q_3 = \pm P, \quad r = R.$$

В большинстве задач малыми величинами q_1 и q_2 пренебрегают и используют динамические условия

$$q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \pm \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} u_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} u_2 + \frac{\partial p}{\partial r} u_3 \right), \quad r = R.$$

Для бесконечной оболочки

$$q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \pm \left(p + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} u_2 + \frac{\partial p}{\partial r} u_3 \right), \quad r = R. \quad (1.68)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. СПб., 2005.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М., 1976.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., 1967.
4. Филлин А.П. Элементы теории оболочек. Л., 1975.

Оглавление

1 Основные соотношения гидроупругости	1
1.1. Переменные Эйлера и Лагранжа	2
1.2. Уравнения гидромеханики	6
1.3. Движение и равновесие идеальной жидкости	9
1.4. Продольная деформация стержней	13
1.5. Деформация, колебания и устойчивость балок	18
1.6. Деформация и колебания струн, мембран и пластин . .	25
1.7. Деформация и колебания цилиндрической оболочки	31
1.8. Уравнения цилиндрической оболочки в перемещениях	36
1.9. Условия контакта цилиндрической оболочки и жидкости	40