Глава 3

Колебания упругих тел, соприкасающихся с жидкостью

3.1. Малые колебания идеальной баротропной жидкости

Уравнение неразрывности или закон сохранения масс

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

в случае безвихревого (потенциального) движения жидкости, для которого $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \Delta \, \varphi = 0. \tag{3.1}$$

Предположим, что движение жидкости является потенциальным, а её плотность

$$\rho = \Psi(p) \tag{3.2}$$

т.е. жидкость является баротропной. Если массовая сила $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} V$, где V — потенциал, то для идеальной баротропной жидкости имеет место интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P(p) = 0 \tag{3.3}$$

где

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{\Psi(p)}$$

Рассмотрим малые колебания жидкости около положения равновесия $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $\mathbf{v} = 0$, $\varphi = 0$. В положении равновесия

$\rho_0 = \Psi(p_0)$, а интеграл Лагранжа принимает вид

$$V + P(p_0) = 0. \tag{3.4}$$

Решение задачи о малых колебаниях ищем в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{3.5}$$

предполагая, что p', ρ', φ и $\mathbf{v}$ являются малыми величинами.

Подставив решение (3.5) в уравнение неразрывности (3.1), получим

$$\frac{d\rho'}{dt} + (\rho_0 + \rho')\,\Delta\,\varphi = 0, \quad \Delta\,\varphi + \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt} = 0.$$

Дифференцирование равенства (3.2) даёт

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\Psi}{dp}\frac{dp}{dt}, \quad \frac{d\rho'}{dt} = \frac{d\Psi}{dp}\,(p_0 + p')\frac{dp'}{dt},$$

$$\frac{d\Psi}{dp}\,(p_0 + p') = \frac{d\Psi}{dp}(p_0) + \frac{d^2\Psi}{dp^2}(p_0)p' + \cdots$$

Следовательно,

$$\frac{d\rho'}{dt} = \frac{d\Psi}{dp}(p_0)\frac{dp'}{dt}, \quad \frac{d\rho'}{dt} = \frac{1}{c_0^2}\frac{dp'}{dt}, \quad c_0^2 = \left[\frac{d\Psi}{dp}(p_0)\right]^{-1},$$

$$\Delta\,\varphi + \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{dp'}{dt} = 0. \tag{3.6}$$

Подставим теперь решение (3.5) в интеграл Лагранжа (3.3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P(p_0 + p') = 0$$

и учтем, что

$$P(p_0 + p') = P(p_0) + \frac{dP}{dp}(p_0)\,p' + \cdots\,, \quad \frac{dP}{dp}\bigg|_{p=p_0} = \frac{1}{\Psi(p_0)} = \frac{1}{\rho_0}.$$

Принимая во внимание равенство (3.4) и отбрасывая в интеграле Лагранжа величину второго порядка малости $v^2/2$, получаем приближенную формулу для давления

$$p' = -\rho_0\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{3.7}$$

Отбрасывание в формуле

$$\frac{dp'}{dt} = -\rho_0 \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial t} v_x + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial t} v_y + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial t} v_z \right)$$

малых слагаемых дает приближенную формулу

$$\frac{dp'}{dt} = -\rho_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{3.8}$$

Подстановка (3.8) в (3.6) показывает, что потенциал φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\,\varphi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{3.9}$$

описывающему распространение возмущений в жидкости со скоростью c_0.

Для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\Psi}{dp} = \frac{d\rho_0}{dp} = 0, \quad c_0 = \infty,$$

и волновое уравнение превращается в уравнение Лапласа $\Delta\,\varphi = 0$.

3.2. Колебания бесконечной пластины на жидком полупространстве

Рассмотрим малые колебания бесконечной пластины, одна сторона которой находится в контакте с идеальной баротропной жидкостью. Введем декартову систему координат (рис. 3.1)

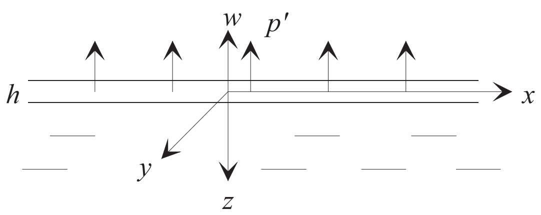

Рис. 3.1. Пластина, находящаяся в контакте с жидкостью.

Колебания пластины в её плоскости происходит так же как при отсутствии идеальной жидкости. Контакт пластины с идеальной жидкостью оказывает влияние только на изгибные колебания пластины, которые описывает уравнение Софи Жермен (1.50)

$$D\Delta_p^2\, w = -\rho\, h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q,$$

где

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

ρ — плотность материала пластины, h — ее толщина.

Условия контакта пластины и жидкости ставятся на деформированной поверхности. Однако эти условия отличаются от условий на недеформированной поверхности малыми нелинейными членами, которыми при малых колебаниях пренебрегают. Подставив динамическое условие на недеформированной поверхности $q = p'|_{z=0}$ в уравнение Софи Жермен, получим

$$D\Delta_p^2 w = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p'|_{z=0}, \tag{3.10}$$

где $m = \rho h$. При отсутствии жидкости $p'|_{z=0} = 0$.

Кинематическое условие (условие непротекания) в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{3.11}$$

Исследуем колебания пластины по формам цилиндрического изгиба, не зависящим от координаты y. Решение ищем в виде:

$$w = w_0\, \sin(\alpha x)\, \sin(\omega t), \quad \varphi = \Phi(z)\, \sin(\alpha x)\, T(t), \tag{3.12}$$

где α — волновое число, ω — частота колебаний.

Из условия (3.11) получаем:

$$\Phi'(0)\, T\, \sin\alpha x = -w_0\, \omega\, \sin\alpha x\, \cos\omega t, \quad T = -\frac{w_0}{\Phi'(0)}\, \omega\, \cos\omega t,$$

$$\varphi = -w_0\, \omega \frac{\Phi(z)}{\Phi'(0)} \sin\alpha x\, \cos\omega t, \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dz}$$

Формула (3.7) для определения давления дает:

$$p'|_{z=0} = -\rho_0\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) = -w_0\omega^2\rho_0 \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}\, \sin\alpha x\, \sin\omega t.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -w_0 \omega^2 \sin \alpha x \sin \omega t,$$

получаем

$$p'|_{z=0} = -m_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.13}$$

где величина

$$m_p = -\rho_0 \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}, \tag{3.14}$$

называется присоединенной массой.

Уравнение (3.10) после подстановки в него (3.13) принимает вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -(m + m_p) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

Подставив в последнее уравнение выражение (3.12) для w получим

$$D\alpha^4 = (m + m_p)\omega^2. \tag{3.15}$$

Осталось найти присоединенную массу m_p. Подставляя в волновое уравнение (3.9) выражение для потенциала φ, получаем

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \alpha^2 \Phi + \frac{\omega^2}{c_0^2} \Phi = 0.$$

Предположим, что $\omega^2/c_0^2 - \alpha^2 < 0$. Тогда $\omega < c_0 \alpha$, и уравнение для функции $\Phi(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \beta^2 \Phi = 0, \tag{3.16}$$

где

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2/c_0^2}. \tag{3.17}$$

В общем решении уравнения (3.16) $\Phi = C_1 \, e^{\beta z} + C_2 \, e^{-\beta z}$ положим $C_1 = 0$, так как $e^{\beta z} \to \infty$ при $z \to \infty$. Тогда

$$\Phi = C_2 \, e^{-\beta z},$$

и выражение (3.14) для присоединенной массы принимает вид

$$m_p = -\rho_0 \, \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{\rho_0}{\beta} > 0.$$

Подставив формулу для m_p в уравнение (3.15), получим

$$D\alpha^4 = (m + \rho_0/\beta)\omega^2. \tag{3.18}$$

Для того, чтобы определить зависимость ω от α надо найти величину β. Из формулы (3.17) вытекает равенство $\omega^2 = c_0^2(\alpha^2 - \beta^2)$, подстановка которого в формулу (3.18) дает кубическое уравнение для определения β:

$$a_0\beta^3 + a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3 = 0 \tag{3.19}$$

где

$$a_0 = m > 0, \quad a_1 = \rho_0 > 0, \quad a_2 = D\alpha^4/c_0^2 - m\alpha^2, \quad a_3 = -\rho_0\alpha^2 < 0,$$

Обозначим $f(\beta) = a_0\beta^3 + a_1\beta^2 + a_2\beta$. Ввиду того, что $f(0) = 0$, $f(\beta) \to \infty$ при $\beta \to \infty$, уравнение (3.19)

$$f(\beta) = -a_3$$

имеет по крайней мере один положительный корень β_1.

По правилу Декарта (1637 г.) число положительных корней алгебраического уравнения равно числу перемен знаков его коэффициентов или меньше его на четное число. Не зависимо от величины a_2, уравнение (3.19) имеет не более одной перемены знаков коэффициентов, поэтому β_1 — его единственный положительный корень.

Следовательно, частоты, удовлетворяющие неравенству $\omega < c_0\alpha$, находятся по формуле

$$\omega = \alpha^2\sqrt{\frac{D\beta_1(\alpha)}{m\beta_1(\alpha) + \rho_0}},$$

а потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi = w_0\omega\frac{e^{-\beta_1 z}}{\beta_1}\sin\alpha x\,\cos\omega t$$

и быстро убывает при удалении от поверхности пластины. Таким образом, в колебания вовлекается только тонкий слой жидкости, примыкающий к пластине.

При отсутствии жидкости $\rho_0 = 0$ и частота колебаний

$$\omega = \alpha^2\sqrt{\frac{D}{m}} = h\alpha^2\sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho_p}}$$

пропорциональна толщине пластины h.

В случае $\omega > c_0\alpha$ уравнение для определения Φ

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \gamma^2\Phi = 0, \quad \gamma = \sqrt{\omega^2/c_0^2 - \alpha^2}$$

имеет решение

$$\Phi = C_1 \cos\gamma z + C_2 \sin\gamma z,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, и присоединенная масса

$$m_p = -\rho_0 \frac{C_1}{\gamma C_2}$$

становится неопределенной величиной.

При $\omega = c_0\alpha$ в решении $\Phi = C_1 z + C_2$ уравнения $d^2\Phi/dz^2 = 0$ следует взять $C_1 = 0$, и присоединенная масса оказывается бесконечной.

Эти результаты свидетельствуют о непригодности решения (3.12) в области $\omega \geqslant c_0\alpha$. В этой области, называемой областью излучения, происходит распространение волн в жидкости и решение надо искать в другом виде.

Эффект излучения нельзя обнаружить, используя модель несжимаемой жидкости. При $c_0 = \infty$ уравнение (3.16) принимает вид

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \alpha^2\Phi = 0,$$

Положив $C_1 = 0$ в его общем решении $\Phi = C_1\, e^{\alpha z} + C_2\, e^{-az}$ получим $m_p = \rho_0/\alpha$, и формула

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{\frac{D\alpha}{m\alpha + \rho_0}}$$

справедлива для любого значения частоты.

3.3. Колебания прямоугольной пластины, находящейся в контакте с несжимаемой жидкостью

Рассмотрим прямоугольный сосуд с абсолютно жесткими вертикальными стенками и дном, заполненный идеальной несжимаемой жидкостью и закрытый упругой крышкой, которая моделируется

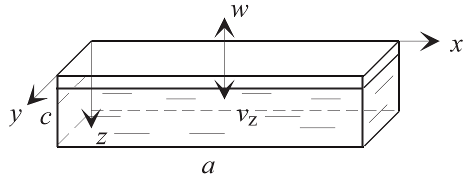

Рис. 3.2. Прямоугольная пластина, находящаяся в контакте с жидкостью.

прямоугольной пластиной толщины h. Введем декартову систему координат (рис. 3.2).

Исследуем колебания пластины по формам цилиндрического изгиба $w = w(x,t)$. В этом случае уравнение колебаний пластины имеет вид

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p'|_{z=0}, \quad m = \rho h. \tag{3.20}$$

Предположим, что края пластины шарнирно оперты:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, \quad x = a. \tag{3.21}$$

Для прогиба w должно быть выполнено условие сохранения объема

$$\Psi = \int_0^a w\,dx = 0, \tag{3.22}$$

которое является уравнением связи.

При отсутствии жидкости уравнение (3.20) принимает вид

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3.23}$$

Подстановка в уравнение (3.23) решения

$$w = w_0 \sin\alpha_n x \sin\omega t, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющего граничным условиям (3.21), дает формулу для определения частот:

$$m\omega_n^2 = \frac{D\pi^4 n^4}{a^4}.$$

Для безразмерного параметра частоты

$$\lambda^2 = \frac{ma^4}{D\pi^4}\omega^2$$

получаем

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Слагаемое $p'|_{z=0}$ в уравнении (3.20) позволяет найти присоединенную массу жидкости. Исследуем сначала влияние связи (3.22) на частоты колебаний пластины без учета присоединенной массы. Для этого будем искать решение уравнения (3.23), удовлетворяющее условию (3.21), в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \alpha_k x. \tag{3.24}$$

Подставим решение (3.24) в формулы для кинетической и потенциальной энергии пластины

$$T = \frac{m}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad \Pi = \frac{D}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx. \tag{3.25}$$

Принимая во внимание, что

$$I_{kn} = \int_0^a \sin \alpha_k x \sin \alpha_n x \, dx = \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\theta \sin n\theta \, d\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{a} x,$$

и, следовательно,

$$I_{kn} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(k-n)\theta - \cos(k+n)\theta] \, d\theta, \quad I_{kk} = \frac{a}{2}, \quad I_{kn} = 0, \quad k \neq n,$$

получим

$$T = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{kk} \dot{q}_k^2 = \frac{am}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k^2, \quad \Pi = \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{kk} \alpha_k^4 q_k^2 = \frac{aD}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^4 q_k^2$$

Подстановка (3.24) в уравнение связи (3.22) дает равенство

$$\Psi = \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \alpha_k x \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k = 0, \tag{3.26}$$

где

$$c_k = \int_0^a \sin \alpha_k x \, dx = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ 2/\alpha_k, & k = 2n-1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Уравнения Лагранжа второго рода при наличии связи

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

содержат множитель Лагранжа Λ. Подставив в эти уравнения выражения для T, Π и Ψ, получим

$$ma\ddot{q}_k + Da\alpha_k^4 q_k = 2\Lambda c_k.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$q_k(t) = u_k \sin\omega t, \quad \Lambda(t) = L \sin\omega t.$$

Неизвестные числа u_k и L удовлетворяют равенствам

$$u_k(D\alpha_k^4 - m\omega^2) = \frac{2Lc_k}{a}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для четных k имеем $c_k = 0$,

$$\omega_k^2 = \frac{D}{m} a_k^4, \quad \lambda_k = k^2$$

и параметры частоты λ_k совпадают с параметрами частоты для сухой пластины. При четных k формы колебаний (3.22) являются антисимметричными относительно $x = a/2$. Занумеруем соответствующие им частоты в порядке возрастания: $\lambda_{a1} < \lambda_{a2} < \cdots$ Тогда $\lambda_{a1} = 4$, $\lambda_{a2} = 16$, ...

Из уравнения связи (3.26) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} c_k u_k = 0.$$

Учитывая, что при $k = 1, 3, \ldots$

$$c_k u_k = \frac{2Lc_k^2}{a(D\alpha_k^4 - m\omega^2)} = \frac{8L}{a\alpha_k^2(D\alpha_k^4 - m\omega^2)} = \frac{8La^5}{D\pi^6 k^2(k^4 - \lambda^2)},$$

получаем равенство

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^4 - \lambda^2)} = 0, \tag{3.27}$$

которое позволяет найти параметры частоты

$$\lambda_{s1} < \lambda_{s2} < \cdots ,$$

соответствующие симметричным относительно $x = a/2$ формам колебаний.

Оставив в сумме (3.27) два первых слагаемых, находим первое приближение

$$\lambda_{s1}^{(1)} = \sqrt{73} = 8.544$$

для λ_{s1} из уравнения

$$\frac{1}{(1-\lambda^2)} + \frac{1}{9(81-\lambda^2)} = 0.$$

Если сохранить три слагаемых, то для определения λ получим биквадратное уравнение:

$$\frac{1}{(1-\lambda^2)} + \frac{1}{9(81-\lambda^2)} + \frac{1}{25(625-\lambda^2)} = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{s1}^{(2)} = 8.542, \quad \lambda_{s2}^{(2)} = 24.57,$$

представляют собой второе приближение для λ_{s1} и λ_{s2}.

Добавив к найденным параметрам частоты параметры частоты для антисимметричных форм колебаний $\lambda_{a1} = 4$ и $\lambda_{a2} = 16$, получим, что низшую часть спектра пластины при наличии связи составляют

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 8.542, \quad \lambda_3 = 16, \quad \lambda_4 = 24.57.$$

Сравнивая эту последовательность с низшей частью спектра пластины без связи

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9, \quad \lambda_4 = 16, \quad \lambda_5 = 25$$

легко видеть, что при наложении связи частоты увеличились, причем первая частота, соответствующая $\lambda = 1$, пропала, вторая стала первой, а четвертая — третьей. Вторая и четвертая частоты пластины со связью мало отличаются от третьей и пятой частоты пластины без связи.

3.4. Антисимметричные колебания прямоугольной пластины с учетом присоединенной массы

Предположим, что колебания пластины, изображенной на рис. 3.2, происходят по формам цилиндрического изгиба. В этом случае прогиб пластины w и потенциал скоростей жидкости φ не зависят от y, и уравнение Лапласа для потенциала несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{3.28}$$

Потенциал должен удовлетворять условию непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial t}, \quad z=0. \tag{3.29}$$

Кроме того, нормальная составляющая скорости обращается в нуль на дне сосуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0, \quad z=c \tag{3.30}$$

и на его боковых стенках

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad x=a. \tag{3.31}$$

Потенциал φ будет удовлетворять условиям (3.31), если искать его в виде ряда по косинусам:

$$\varphi(t,x,z)=\sum_{i=0}^{\infty}T_i(t)\Phi_i(z)\cos\alpha_i x, \quad \alpha_i=\frac{\pi i}{a}. \tag{3.32}$$

Прогиб w, удовлетворяющий условиям шарнирного опирания (3.21), следует искать в виде ряда (3.24) по синусам. Чтобы найти связь между коэффициентами рядов (3.32) и (3.24) из условия непротекания, разложим функции $\sin\alpha_k x$ в ряды по $\cos\alpha_i x$:

$$\sin\alpha_k x=\sum_{i=0}^{\infty}a_{ki}\cos\alpha_i x, \quad k=1,2,\ldots$$

Для вычисления коэффициентов a_{kj} умножим предыдущее равенство на $\cos\alpha_j x$ и проинтегрируем его по x в интервале от 0 до a. После замены переменной $x=a\theta/\pi$, учитывая, что

$$\int_0^{\pi}\cos i\theta\cos j\theta\,d\theta=0, \quad i\neq j, \quad \int_0^{\pi}\cos^2 j\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}, \quad j>0,$$

получим

$$a_{kj} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin k\theta \cos j\theta \, d\theta, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Если числа j и k оба четные или оба нечетные, то $a_{kj} = 0$. В противном случае

$$a_{k0} = \frac{2}{\pi k}, \quad a_{kj} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(k+j)\theta + \sin(k-j)\theta] \, d\theta = \frac{4k}{\pi(k^2 - j^2)}.$$

Следовательно, для четных $k = 2, 4, \ldots$

$$\sin \alpha_k x = \sum_{i=1,3,\ldots} a_{ki} \cos \alpha_i x, \quad a_{ki} = \frac{4k}{\pi(k^2 - i^2)},$$

а для нечетных $k = 1, 3, \ldots$

$$\sin \alpha_k x = \sum_{i=0,2,\ldots} a_{ki} \cos \alpha_i x, \quad a_{k0} = \frac{2}{\pi k}, \quad a_{ki} = \frac{4k}{\pi(k^2 - i^2)}, \quad i > 0.$$

Найдем формы колебаний

$$w = \sum_{k=2,4,\ldots} q_k(t) \sin \alpha_k x = \sum_{k=2,4,\ldots} \sum_{i=1,3,\ldots} q_k a_{ki} \cos \alpha_i x. \tag{3.33}$$

антисимметричные относительно $x = a/2$ и соответствующие им частоты. Подставим ряды (3.32) и (3.33) в условие непротекания (3.29) и приравняем коэффициенты при $\cos \alpha_i x$. Получим

$$T_i = \frac{-S_i}{\Phi_i'(0)}, \quad S_i = \sum_{k=2,4,\ldots} a_{ki} \dot{q}_k, \quad \varphi = -\sum_{i=1,3,\ldots} \frac{\Phi_i(z)}{\Phi_i'(0)} S_i \cos \alpha_i x. \tag{3.34}$$

Подстановка выражения для φ в уравнение (3.28) дает уравнения

$$\Phi_i'' - \alpha_i^2 \Phi_i = 0, \quad i = 1, 3, \ldots \tag{3.35}$$

Общее решение уравнения (3.35) запишем в виде

$$\Phi_i = C_1 \operatorname{ch} \alpha_i (z - c) + C_2 \operatorname{sh} \alpha_i (z - c).$$

Из условия (3.30) вытекает, что $\Phi_i'(c) = 0$, и, следовательно, $C_2 = 0$,

$$\Phi_i = C_1 \operatorname{ch} \alpha_i (z - c), \quad \Phi_i'(0) = -\alpha_i C_1 \operatorname{sh} \alpha_i c. \tag{3.36}$$

Для вывода уравнений движения, как и в предыдущем разделе, воспользуемся аппаратом уравнений Лагранжа второго рода. Учтем присоединенную массу жидкости, добавив к кинетической энергии пластины кинетическую энергию жидкости

$$T_f = \frac{\rho_0}{2} \int_0^a \int_0^c \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dz,$$

где ρ_0 — плотность жидкости.

Подставим в эту формулу выражение (3.34) для потенциала φ. Ввиду равенств

$$\int_0^a \sin \alpha_i x \sin \alpha_j x \, dx = \int_0^a \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x \, dx = 0, \quad i \neq j,$$
$$\int_0^a \sin^2 \alpha_i x \, dx = \int_0^a \cos^2 \alpha_i x \, dx = \frac{a}{2}$$

формула для T_f принимает вид

$$T_f = \frac{a\rho_0}{4} \int_0^c \sum_{i=1,3,\dots} \frac{\alpha_i^2 \Phi_i^2(z) + [\Phi_i'(z)]^2}{[\Phi_i'(0)]^2} S_i^2 \, dz.$$

Учитывая равенства (3.36), получаем

$$\frac{\alpha_i^2 \Phi_i^2(z) + [\Phi_i'(z)]^2}{[\Phi_i'(0)]^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_i(z-c) + \operatorname{sh}^2 \alpha_i(z-c)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i c} = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_i(z-c)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i c},$$
$$\int_0^c \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_i(z-c)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i c} \, dz = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_i c}{2\alpha_i \operatorname{sh}^2 \alpha_i c} = \frac{\operatorname{cth} \alpha_i c}{\alpha_i}.$$

Следовательно,

$$T_f = \frac{a}{4} \sum_{i=1,3,\dots} m_i S_i^2, \quad m_i = \frac{\rho_0}{\alpha_i} \operatorname{cth} \alpha_i c.$$

Кинетическая и потенциальная энергии пластины находятся по формулам

$$T_p = \frac{m}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad \Pi_p = \frac{D}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Подстановка в эти формулы разложения (3.33) дает равенства

$$T_p = \frac{am}{4} \sum_{k=2,4,\dots} \dot{q}_k^2, \quad \Pi_p = \frac{aD}{4} \sum_{k=2,4,\dots} \alpha_k^4 q_k^2$$

и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T_p+T_f)}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial(T_p+T_f)}{\partial q_k}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_k},\quad k=2,4,\ldots$$

принимают вид

$$\frac{ma}{2}\ddot{q}_k+\frac{a}{4}\sum_{i=1,3,\ldots}m_i\frac{d}{dt}\frac{\partial S_i^2}{\partial\dot{q}_k}+\frac{Da}{2}\alpha_k^4q_k=0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial S_i^2}{\partial\dot{q}_k}=2S_i\frac{\partial S_i}{\partial\dot{q}_k}=2S_ia_{ki}=2\sum_{j=2,4,\ldots}a_{ji}a_{ki}\dot{q}_j,$$

получаем уравнения

$$m\ddot{q}_k+\sum_{j=2,4,\ldots}\sum_{i=1,3,\ldots}m_ia_{ki}a_{ji}\ddot{q}_j+D\alpha_k^4q_k=0. \tag{3.37}$$

Представив решение системы (3.37) в виде $q_k=u_k\sin\omega t$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$m\omega^2u_k+\omega^2\sum_{j=2,4,\ldots}\sum_{i=1,3,\ldots}m_ia_{ki}a_{ji}u_j-D\alpha_k^4u_k=0. \tag{3.38}$$

для вычисления частот и форм колебаний. После перехода в системе (3.38) к безразмерному параметру частоты λ по формуле

$$\omega^2=\frac{D\pi^4}{ma^4}\lambda^2$$

и несложных преобразование получим систему

$$\lambda^2u_k+\lambda^2\sum_{j=2,4,\ldots}b_{kj}u_j-k^4u_k=0, \tag{3.39}$$

где

$$b_{kj}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a}{h}\sum_{i=1,3,\ldots}\frac{\operatorname{cth}\alpha_ic}{\pi i}a_{ki}a_{ji},\quad a_{ki}=\frac{4k}{\pi(k^2-i^2)}.$$

Ряды для коэффициентов b_{kj} сходятся быстро. Уже сумма первых три-четыре членов ряда дает малую погрешность по сравнению с точным значением b_{kj}, которое можно вычислить, например, с помощью пакета Matematica.

Найдем первое приближение для параметра частоты, оставив в решении (3.33) только первое слагаемое. В этом случае система (3.39) содержит одно уравнение

$$\lambda^2 u_2 + \lambda^2 b_{22} u_2 - 16 u_2 = 0,$$

где

$$b_{22} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a}{h} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{\operatorname{cth} \alpha_i c}{\pi i} a_{2i}^2, \quad a_{2i} = \frac{8}{\pi(4 - i^2)}.$$

Для первого параметра частоты в первом приближении получаем

$$\lambda_{a1}^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{1 + b_{22}}}.$$

Если $c/a \to \infty$, то $\operatorname{cth} \alpha_i c = \operatorname{cth}(\pi c i/a) \to 1$. Предположим, что $c \geqslant a$. Учитывая, что $\operatorname{cth} \pi = 1.004$, при этом предположении с погрешностью не более 0.4% можно считать, что $\operatorname{cth} \pi \simeq 1$. Тогда

$$b_{22} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a}{h} S_{22}, \quad S_{22} = \frac{64}{\pi^3} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{1}{i(4 - i^2)^2}.$$

Обозначим $S_{22}^{(k)}$ приближенное значение S_{22} полученное при учете в ряду первых k слагаемых. В результате вычислений находим

$$S_{22}^{(1)} = \frac{64}{9\pi^3} = 0.229, \quad S_{22}^{(2)} = 0.257, \quad S_{22}^{(3)} = 0.258, \quad S_{22} = 0.258.$$

В качестве примера рассмотрим колебания стальной пластинки, находящейся в контакте с водой. В этом случае отношение $\rho_0/\rho = 1/7$. Полагая $a/h = 100$, получим

$$b_{22} = 3.68, \quad \lambda_{a1}^{(1)} = 1.85.$$

Учет присоединенной массы привел к снижению параметра частоты $\lambda = 4$ более, чем в 2 раза. При увеличении толщины пластины h влияние присоединенной массы на частоту уменьшается. Так, при $a/h = 20$ имеем

$$b_{22} = 0.736, \quad \lambda_{a1}^{(1)} = 3.04.$$

Отметим, что увеличение толщины пластины приводит к возрастанию погрешности уравнения Софи Жермен.

При построении второго приближения оставим в решении (3.33) два первых слагаемых. В этом случае система (3.39) примет вид

$$\begin{gathered}\lambda^2 u_2 + \lambda^2 (b_{22} u_2 + b_{24} u_4) - 16 u_2 = 0,\\ \lambda^2 u_4 + \lambda^2 (b_{42} u_2 + b_{44} u_4) - 16^2 u_4 = 0.\end{gathered}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим биквадратное уравнение для определения λ:

$$[\lambda^2(1 + b_{22} - 16][\lambda^2(1 + b_{44} - 16^2] - \lambda^4 b_{24} b_{42} = 0.$$

Здесь при $c \geqslant a$

$$\begin{gathered}b_{kj} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{a}{h} S_{kj}, \quad S_{44} = \frac{256}{\pi^3} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{1}{i(16 - i^2)^2} = 0.115,\\ S_{24} = S_{42} = \frac{128}{\pi^3} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{1}{i(4 - i^2)(16 - i^2)} = 0.0573.\end{gathered}$$

При $\rho_0/\rho = 1/7$ и $a/h = 20$ корни биквадратного уравнения $\lambda_{a1}^{(2)} = 3.03$ и $\lambda_{a2}^{(2)} = 13.89$ представляют собой второе приближение для первой и второй частот антисимметричных колебаний. Близость первого приближения $\lambda_{a1}^{(1)} = 3.04$ ко второму для первой частоты свидетельствует о достаточно высокой точности определения этой частоты из первого приближения.

3.5. Симметричные колебания прямоугольной пластины с учетом присоединенной массы

Антисимметричные формы колебаний (3.33) удовлетворяют условию сохранения объема (3.22). Построение симметричных относительно $x = a/2$ форм колебаний

$$w = \sum_{k=1,3,\dots} q_k(t) \sin \alpha_k x = \sum_{k=1,3,\dots} \sum_{i=0,2,\dots} q_k a_{ki} \cos \alpha_i x.$$

осложняется необходимостью принимать во внимание уравнение связи (3.22), из которого вытекает равенство

$$\int_0^a w\, dx = \int_0^a \sum_{i=0,2,\dots} \sum_{k=1,3,\dots} q_k a_{ki} \cos \alpha_i x\, dx = a \sum_{k=1,3,\dots} q_k a_{k0} = 0,$$

так как
$$\int_0^a \cos\alpha_i x\,dx = 0$$
при $i = 2, 4, \ldots$. Ввиду того, что $aa_{k0} = c_k$, выполняется условие (3.26) и, кроме того
$$w = \sum_{i=2,4,\ldots}\sum_{k=1,3,\ldots} q_k a_{ki}\cos\alpha_i x. \tag{3.40}$$

Из условия непротекания (3.29), с учетом разложений (3.32) и (3.40) получим
$$T_i = -\frac{S_i}{\Phi_i'(0)}, \quad S_i = \sum_{k=1,3,\ldots} a_{ki}\dot{q}_k, \quad \varphi = -\sum_{i=2,4,\ldots}\frac{\Phi_i(z)}{\Phi_i'(0)}S_i\cos\alpha_i x, \tag{3.41}$$
где $\Phi_i(z)$ и $\Phi_i'(0)$ находятся по формулам (3.36).

Подстановка ряда (3.40) в выражения для кинетической и потенциальной энергий пластины, а ряда (3.41) в выражение для кинетической энергии жидкости дает формулы
$$T_p = \frac{am}{4}\sum_{k=1,3,\ldots}\dot{q}_k^2, \quad \Pi_p = \frac{aD}{4}\sum_{k=1,3,\ldots}\alpha_k^4 q_k^2,$$
$$T_f = \frac{a}{4}\sum_{i=2,4,\ldots} m_i S_i^2, \quad m_i = \frac{\rho_0}{\alpha_i}\operatorname{cth}\alpha_i c.$$

Уравнения Лагранжа второго рода
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T_p+T_f)}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial(T_p+T_f)}{\partial q_k} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_k} + \Lambda\frac{\partial\Psi}{\partial q_k}, \quad k = 1, 3\ldots, \tag{3.42}$$
где Λ — множитель Лагранжа, после подстановки в них формул для T_p, Π_p, T_f и Ψ принимают вид
$$\frac{ma}{2}\ddot{q}_k + \frac{a}{4}\sum_{i=2,4,\ldots} m_i\frac{d}{dt}\frac{\partial S_i^2}{\partial\dot{q}_k} + \frac{Da}{2}\alpha_k^4 q_k = \Lambda c_k. \tag{3.43}$$

Умножив уравнения (3.43) на $2/a$, с учетом выражения (3.41) для S_i получим
$$m\ddot{q}_k + \sum_{j=1,3,\ldots}\sum_{i=2,4,\ldots} m_i a_{ki} a_{ji}\ddot{q}_j + D\alpha_k^4 q_k = \frac{2\Lambda c_k}{a}.$$

Подстановка $q_k = u_k \sin \omega t$ и $\Lambda = L \sin \omega t$ в эту систему уравнений и соотношение (3.26) дает систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными u_k и L:

$$\begin{aligned} m\omega^2 u_k + \omega^2 \sum_{j=1,3,\ldots} \sum_{i=2,4,\ldots} m_i a_{ki} a_{ji} u_j - D\alpha_k^4 u_k + \frac{2Lc_k}{a} = 0, \\ \sum_{j=1,3,\ldots} c_j u_j = 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

После перехода к безразмерным переменным система (3.44) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 u_k + \lambda^2 \sum_{j=1,3,\ldots} b_{kj} u_j - k^4 u_k + lc_k = 0, \quad k = 1, 3, \ldots, \\ \sum_{j=1,3,\ldots} c_j u_j = 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

где

$$b_{kj} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a}{h} \sum_{i=2,4,\ldots} \frac{\operatorname{cth} \alpha_i c}{\pi i} a_{ki} a_{ji}, \quad l = \frac{2a^3 L}{\pi^4 D}.$$

По сравнению с системой (3.39) для антисимметричных форм система (3.45) содержит одно дополнительное уравнение и одно дополнительное неизвестное l. Параметры частоты находятся из уравнения $D(\lambda) = 0$, где $D(\lambda)$ — определитель системы, полученной исключением l из системы (3.45).

Найдем первое приближение $\lambda_{s1}^{(1)}$ к параметру частоты λ_{s1}. Для этого нам понадобятся три первых уравнения системы (3.45):

$$\begin{gathered} \lambda^2 u_1 + \lambda^2 (b_{11} u_1 + b_{13} u_3) - u_1 + lc_1 = 0, \\ \lambda^2 u_3 + \lambda^2 (b_{31} u_1 + b_{33} u_3) - 81 u_3 + lc_3 = 0, \\ c_1 u_1 + c_3 u_3 = 0. \end{gathered}$$

Исключив l из первых двух уравнений, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, определитель которой

$$D(\lambda) = 730 - \lambda^2 (10 + b_{11} + 9b_{33} - 3b_{13} - 3b_{31}).$$

Величина

$$\lambda_{s1}^{(1)} = \sqrt{\frac{730}{10 + b_{11} + 9b_{33} - 6b_{13}}}$$

является корнем уравнения $D(\lambda) = 0$.

Если $c \geqslant a$, то

$$b_{kj} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{a}{h}S_{kj}, \quad S_{11} = \frac{16}{\pi^3}\sum_{i=2,4,\ldots}\frac{1}{i(1-i^2)^2} = 0.0293,$$
$$S_{13} = S_{31} = \frac{48}{\pi^3}\sum_{i=2,4,\ldots}\frac{1}{i(1-i^2)(9-i^2)} = -0.0475,$$
$$S_{33} = \frac{144}{\pi^3}\sum_{i=2,4,\ldots}\frac{1}{i(9-i^2)^2} = 0.118.$$

Полагая $\rho_0/\rho = 1/7$ и $a/h = 20$, получим $\lambda_{s1}^{(1)} = 7.221$.

Сравнивая результаты раздела 3.3 по определению нижней части спектра частот пластинки без учета присоединенной массы

$$\lambda_1 = \lambda_{a1} = 4, \quad \lambda_2 = \lambda_{s1} = 8.542, \quad \lambda_3 = \lambda_{a2} = 16$$

с результатами разделов 3.4 и 3.5 для $c \geqslant a$, $\rho_0/\rho = 1/7$ и $a/h = 20$

$$\lambda_1 = \lambda_{a1} = 3.04, \quad \lambda_2 = \lambda_{s1} = 7.221, \quad \lambda_3 = \lambda_{a2} = 13.89,$$

можно сделать вывод, что учет присоединенной массы заметно снижает частоты колебаний даже для относительно толстой пластинки. Для тонких пластинок влияние присоединной массы увеличивается. Так, например, при $a/h = 100$ учет присоединенной массы приводит к уменьшению первой частоты более, чем в два раза.

3.6. Уравнения колебаний цилиндрической оболочки в жидкости.

Рассмотрим малые колебания цилиндрической оболочки радиуса R и бесконечной длины, находящейся в контакте с идеальной баротропной жидкостью.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z (рис. 3.3). Для определения давления на поверхности оболочки используем формулу (3.7):

$$p = -\rho_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=R},$$

где потенциал скоростей удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

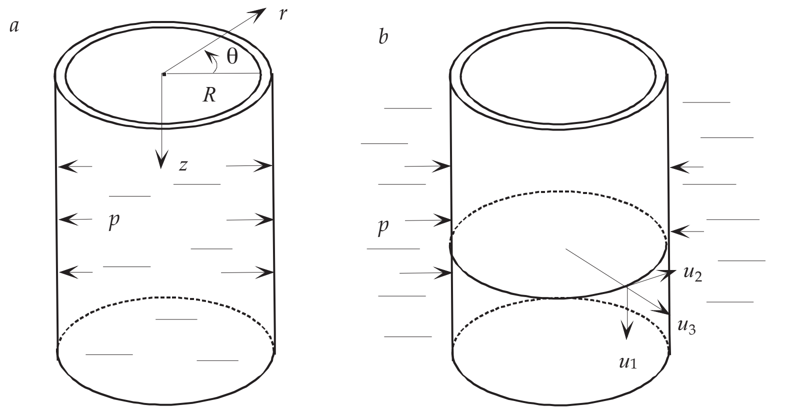

Рис. 3.3. Цилиндрическая оболочка, находящаяся в контакте с жидкостью.

Условие непротекания и динамические условия в линейном приближении приобретают вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \pm p, \quad r = R.$$

Знаки $+$ и $-$ соответствуют внутренней и внешней задаче (см. рис. 3.3*a* и 3.3*b*).

Уравнения колебаний оболочки

$$\begin{aligned}
&L_{11}\,u_1 + L_{12}\,u_2 + L_{13}\,u_3 - \frac{1}{B}\,m\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0,\\
&L_{21}\,u_1 + L_{22}\,u_2 + L_{23}\,u_3 - \frac{1}{B}\,m\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0,\\
&L_{31}\,u_1 + L_{32}\,u_2 + L_{33}\,u_3 - \frac{1}{B}\,m\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \pm \frac{1}{B}\,p\,\Big|_{r=R} = 0,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

где

$$m = \rho h, \quad B = \frac{Eh}{\sigma}, \quad \sigma = 1 - \nu^2,$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2R^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta}, \quad L_{13} = \frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial z},$$

получаем постановкой в уравнения из раздела 1.8 выражений для q_1, q_2 и q_3.

Решение задачи ищем в виде

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0\,\cos\alpha z\,\cos n\theta\,\sin\omega t, \quad u_2 = v_0\,\sin\alpha z\,\sin n\theta\,\sin\omega t,\\
&u_3 = w_0\,\sin\alpha z\,\cos n\theta\,\sin\omega t, \quad \varphi = \Phi(r)\,\sin\alpha z\,\cos n\theta\,T(t),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

где n — число волн по окружности, ω — частота колебаний.

Из условия непротекания

$$T(t)\Phi'(R)\sin\alpha z\cos n\vartheta = w_0\omega\sin\alpha z\cos n\vartheta\cos\omega t,$$

где $\Phi' = d\Phi/dr$, находим функцию T и потенциал скоростей φ:

$$T(t) = \frac{w_0\omega}{\Phi'(R)}\cos\omega t, \quad \varphi = w_0\omega\frac{\Phi(r)}{\Phi'(R)}\sin\alpha z\cos n\theta\cos\omega t.$$

Для давления на поверхности оболочки получаем формулу

$$p(R) = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(R) = \rho_0 w_0\omega^2\frac{\Phi(R)}{\Phi'(R)}\sin\alpha z\cos n\theta\sin\omega t.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -w_0\omega^2\sin\alpha z\cos n\theta\sin\omega t,$$

выражение для давления можно записать в виде

$$p(R) = -\rho_0\frac{\Phi(R)}{\Phi'(R)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \tag{3.48}$$

Величина

$$m_p = \pm\rho_0\frac{\Phi(R)}{\Phi'(R)}, \tag{3.49}$$

где знаки $+$ и $-$ соответствуют внутренней и внешней задачам, называется присоединенной массой. Подстановка выражения (3.48) в третье уравнение (3.46) с учетом формулы (3.49), приводит к уравнению

$$L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}u_3 - \frac{1}{B}(m + m_p)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0. \tag{3.50}$$

Подставив решение (3.47) в 1-ое уравнение (3.46) и сократив его на произведение функций $\cos\alpha z\cos n\theta\sin\omega t$, получим

$$-\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2R^2}n^2\right)u_0 + \frac{1+\nu}{2R}\alpha n v_0 + \frac{\nu}{R}\alpha w_0 + \frac{\sigma}{E}\rho\omega^2 u_0 = 0.$$

Умножим это уравнение на $-R^2$ и введем безразмерные величины

$$\alpha_b = \alpha R, \quad \lambda = \frac{\sigma R^2\rho}{E}\omega^2,$$
$$a_{11} = \alpha_b^2 + \tfrac{1-\nu}{2}n^2, \quad a_{12} = -\tfrac{1+\nu}{2}\alpha_b n, \quad a_{13} = -\nu\alpha_b.$$

Уравнение примет вид

$$(a_{11}-\lambda)u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}w_0 = 0. \tag{3.51}$$

Подстановка решения (3.47) во второе уравнение (3.46) и уравнение (3.50) дает еще два уравнения:

$$\begin{aligned} &a_{21}u_0 + (a_{22}-\lambda)v_0 + a_{23}w_0 = 0,\\ &a_{31}u_0 + a_{32}v_0 + \left[a_{33} - \lambda\left(1 + \frac{m_p}{m}\right)\right] w_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Громоздкие выражения для коэффициентов a_{ij} не приводятся, так как в дальнейшем они не используются.

Однородная система линейных алгебраических уравнений (3.51), (3.52) имеет нетривиальное решение, если

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda\left(1 + \dfrac{m_p}{m}\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.53}$$

Для сухой оболочки $m_p = 0$, и уравнение $D(\lambda) = 0$ превращается в кубическое уравнение для определения параметра частоты λ.

3.7. Вычисление присоединенной массы для цилиндрической оболочки

Подставим выражение для потенциала скоростей

$$\varphi = -w_0\omega\frac{\Phi(r)}{\Phi'(R)}\sin\alpha z\cos n\theta\cos\omega t,$$

в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Получим

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\Phi - \alpha^2\Phi = -\frac{\omega^2}{c_0^2}\Phi.$$

Предположим, что $\omega < c_0\alpha$. Обозначим $\beta^2 = \alpha^2 - \omega^2/c_0^2 > 0$. Тогда уравнение для определения Φ принимает вид

$$r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2} + r\frac{d\Phi}{dr} - (n^2 + \beta^2 r^2)\Phi = 0.$$

Замена переменой $x = \beta r$ сводит это уравнение к модифицированному уравнению Бесселя

$$x^2 \frac{d^2\Phi}{dx^2} + x\frac{d\Phi}{dx} - (n^2 + x^2)\Phi = 0. \tag{3.54}$$

Уравнение (3.54) имеет два линейно независимых решения $I_n(x)$ и $K_n(x)$, которые называются модифицированными функциями Бесселя, причем $K_n(x)$ имеет особенность в точке $x = 0$, а $I_n(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ (рис. 3.4)

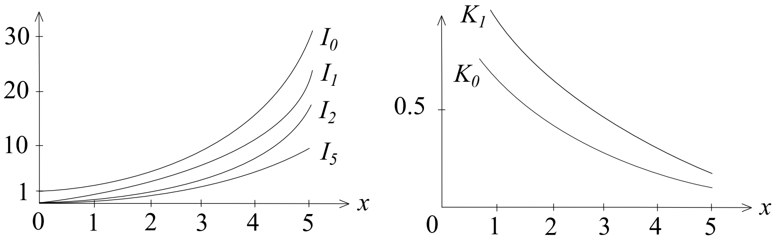

Рис. 3.4. Модифицированные функции Бесселя.

Общее решение уравнения (3.54)

$$\Phi(r) = C_1 I_n(\beta r) + C_2 K_n(\beta r)$$

содержит две произвольных постоянных C_1 и C_2.

Для внутренней задачи $C_2 = 0$, и $\Phi(r) = C_1 I_n(\beta r)$ при $0 \leqslant r \leqslant R$. Функции $I_n(\beta r)$ быстро убывают при $r \to 0$, поэтому колебания происходят в небольшом слое жидкости, примыкающем к поверхности оболочки, а присоединенная масса

$$m_p = \rho_0 \frac{I_n(\beta R)}{\beta I_n'(\beta R)} > 0.$$

Присоединенная масса всегда положительна, так как она представляет собой массу слоя жидкости, который совершает колебания вместе с оболочкой.

Для внешней задачи $C_1 = 0$, $\Phi(r) = C_2 K_n(\beta r)$, $R \leqslant r$. Функции $K_n(\beta r)$ быстро убывают при $r \to \infty$, поэтому в колебание вовлекается тонкий слой жидкости снаружи от оболочки. В этом случае присоединенная масса

$$m_p = -\rho_0 \frac{K_n(\beta R)}{\beta K_n'(\beta R)} > 0.$$

Если $\omega = c_0\alpha$, то $\beta^2 = 0$, и уравнение для определения Φ превращается в уравнение Эйлера

$$r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2} + r\frac{d\Phi}{dr} - n^2\Phi = 0,$$

имеющее при $n \geqslant 1$ общее решение

$$\Phi = C_1 r^n + C_2 r^{-n}.$$

Для внутренней задачи $\Phi = C_1 r^n$, для внешней задачи $\Phi = C_2 r^{-n}$, а присоединенная масса для обеих задач совпадает и равна $m_p = \rho_0 R/n$.

В случае $\omega > c_0\alpha$ уравнение для определения $\Phi(r)$

$$r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2} + r\frac{d\Phi}{dr} - (n^2 - \gamma^2 r^2)\Phi = 0, \quad \gamma^2 = \omega^2/c_0^2 - \alpha^2 > 0$$

заменой переменной $x = \gamma r$ сводится к уравнению Бесселя

$$x^2\frac{d^2\Phi}{dx^2} + x\frac{d\Phi}{dx} - (n^2 - x^2)\Phi = 0.$$

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функция Бесселя $J_n(x)$ и функция Неймана $N_n(x)$ (рис. 3.5), а его общее решение имеет вид

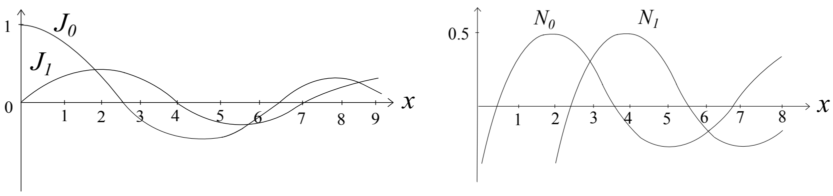

Рис. 3.5. Функции Бесселя.

$$\Phi(r) = C_1 J_n(\gamma r) + C_2 N_n(\gamma r).$$

Для внутренней задачи $C_2 = 0$,

$$\Phi(r) = C_1 J_n(\gamma r), \quad m_p = \rho_0\frac{J_n(\gamma R)}{\gamma J_n'(\gamma R)},$$

причем $J_n'(x)$ имеет бесчисленное множество нулей.

Для внешней задачи

$$\Phi(r) = C_1 J_n(\gamma r) + C_2 N_n(\gamma r), \quad m_p = -\rho_0 \frac{\Phi(R)}{\Phi'(R)}$$

и выражение для m_p становится неопределенным, так как зависит от отношения произвольных постоянных C_1/C_2.

Прискорбное поведение присоединенных масс и отсутствие быстрого затухания решений при удалении от поверхности оболочки позволяет сделать вывод, что решение (3.47) не годится в области $\omega > c_0\alpha$. Область высоких частот, как и для пластины, является областью излучения.

3.8. Приближенные методы определения присоединенной массы.

Для приближенного вычисления присоединенной массы m_p в случае $\omega < \alpha c_0$ найдем асимптотическое представление модифицированных функций Бесселя I_n и K_n при $n \gg 1$. Решение уравнения (3.54)

$$x^2\Phi'' + x\Phi' - (n^2 + x^2)\Phi = 0, \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dx}$$

ищем в виде

$$\Phi = \Phi_0(x) e^{n\int q(x)dx},$$

где Φ_0 и q неизвестные функции. Учитывая, что

$$\Phi' = \Phi_0' e^{n\int q dx} + nq\Phi_0 e^{n\int q dx} \simeq nq\Phi$$

$$\Phi'' \simeq n^2 q^2 \Phi_0 e^{n\int q dx} = n^2 q^2 \Phi$$

после подстановки в уравнение приближенных выражений для Φ'', Φ', Φ получим квадратное уравнение для определения q

$$q^2 n^2 x^2 + qnx - (n^2 + x^2) = 0,$$

корни которого имеют вид

$$q_{1,2} = \frac{-nx \pm \sqrt{n^2x^2 + 4n^2x^2(n^2 + x^2)}}{2n^2x^2}.$$

Отбрасывая второстепенные члены, получим

$$q_{1,2} \simeq \frac{-nx \pm 2nx\sqrt{n^2 + x^2}}{2n^2x^2} \simeq \pm \frac{\sqrt{n^2 + x^2}}{nx}$$

Ввиду того, что $I_n \underset{x\to\infty}{\to} \infty, K_n \underset{x\to\infty}{\to} 0$

$$I_n(x) \simeq \Phi_0^+ e^{n\int q_1(x)dx}, \qquad K_n(x) \simeq \Phi_0^- e^{n\int q_2(x)dx}$$

причем

$$I_n^{'}(x) \simeq nq_1 I_n = \frac{\sqrt{n^2+x^2}}{x} I_n, \qquad K_n^{'}(x) \simeq nq_2 K_n = -\frac{\sqrt{n^2+x^2}}{x} K_n$$

Функции Φ_0^+ и Φ_0^- определяются из следующего приближения, но выражения для этих функций не нужны для приближенного вычисления m_p. Действительно, для внутренней задачи

$$m_p = \frac{\rho_0}{\beta}\frac{I_n(\beta R)}{I_n'(\beta R)} \simeq \frac{\rho_0 R}{\sqrt{n^2+\beta^2 R^2}}.$$

Для внешней задачи

$$m_p = -\frac{\rho_0}{\beta}\frac{K_n(\beta R)}{K_n'(\beta R)} \simeq \frac{\rho_0 R}{\sqrt{n^2+\beta^2 R^2}}$$

Приближенные выражения присоединенных масс для внутренней и внешней задач совпадают.

Как иногда бывает в подобных случаях, формулы, полученные в предположении, что $n \gg 1$, дают хорошее приближение к точному значению m_p и при небольших значениях n. Сравним точное значение отношения, входящего в выражение для присоединенной массы

$$z_n(x) = \frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = \frac{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)}{2I_n(x)}$$

с его асимптотическим приближением

$$\tilde{z}_n(x) = \frac{\sqrt{n^2+x^2}}{x} \tag{3.55}$$

На рис. 3.6 изображена зависимость от x относительной погрешности асимптотической формулы

$$f_n(x) = \frac{z_n(x) - \tilde{z}_n(x)}{z_n(x)}$$

для $n = 2$ и $n = 3$.

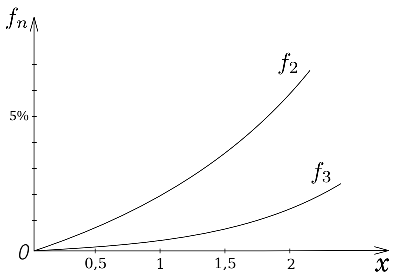

Рис. 3.6. Относительная погрешность асимптотической формулы.

Если $x < 2$, то при $n = 2$ погрешность составляет около 5%, а при $n = 3$ — около 2%. Хорошее совпадение частот, найденных с использованием точной и приближенной формул, отмечается и в книге Попова и Чернышева [2].

В случае $n = 0$ приближенная формула (3.55) не годится, однако уравнение (3.53) упрощается из того, что $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$, и принимает вид

$$D(\lambda) = (a_{22} - \lambda)\{[(a_{11} - \lambda)[(a_{33} - \lambda(1 + m_p/m)] - a_{13}^2\} = 0.$$

Параметр частоты $\lambda = a_{22}$ соответствует частоте крутильных колебаний, на которые не влияет контакт с идеальной жидкостью.

Параметры частоты осесимметричных колебаний являются корнями уравнения

$$(a_{11} - \lambda)[a_{33} - \lambda(1 + m_p/m)] - a_{13}^2 = 0, \tag{3.56}$$

решение которого осложняется зависимостью m_p от λ.

Предположим, что $\omega \ll c_0\alpha$. Тогда $\beta \simeq \alpha$, и при вычислении присоединенных масс можно использовать приближенные формулы

$$m_p \simeq \tilde{m}_p = \frac{\rho_0}{\alpha}\frac{I_0(\alpha_b)}{{I_0}'(\alpha_b)} = \frac{\rho_0}{\alpha}\frac{I_0(\alpha_b)}{I_1(\alpha_b)}$$

для внутренней задачи и

$$m_p \simeq \tilde{m}_p = -\frac{\rho_0}{\alpha}\frac{K_0(\alpha_b)}{{K_0}'(\alpha_b)} = \frac{\rho_0}{\alpha}\frac{K_0(\alpha_b)}{K_1(\alpha_b)}$$

для внешней задачи. Величины $\tilde{m}_p$ соответствуют модели несжимаемой жидкости и не зависят от λ.

Подставим в уравнение (3.56) приближеное выражение для m_p и значения коэффициентов

$$a_{11} = \alpha_b^2, \quad a_{13} = a_{31} = -\nu\alpha_b, \quad a_{33} = 1 + \mu^4\alpha_b^4,$$

найденные в разделе 1.8 первой главы. Получим квадратное уравнение

$$(\alpha_b^2 - \lambda)[1 + \mu^4\alpha_b^4 - \lambda(1 + \tilde{m}_p/m)] - \nu^2\alpha_b^2 = 0.$$

После введения обозначений

$$a = 1 + \tilde{m}_p/m, \quad b = \mu^4\alpha_b^4, \quad c = a\alpha_b^2$$

это уравнение принимает вид

$$a\lambda^2 - \lambda(1 + b + c) + \alpha_b^2(\sigma + b) = 0.$$

Докажем, что его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + b + c \pm \sqrt{(1 + b + c)^2 - 4c(\sigma + b)}}{2a}$$

вещественны и положительны.

Ввиду того, что $\sigma = 1 - \nu^2 \leqslant 1$, дискриминант уравнения

$$(1 + b + c)^2 - 4c\sigma - 4bc \geqslant (1 + b + c)^2 - 4c - 4bc = (1 + b - c)^2 \geqslant 0,$$

а по теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1 + b + c}{a} > 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{\alpha_b^2(\sigma + b)}{a} > 0.$$

Следовательно, λ_1 и λ_2 вещественны и положительны.

Использование приближенной формулы $m_p \simeq \tilde{m}_p$ позволяет в явном виде найти параметры частоты осесимметричных колебаний λ_1 и λ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. СПб., 2005.
2. *Попов А.Л., Чернышев Г.Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М., 1994.
3. *Мнев Е.Н., Перцев А.К.* Гидоупругость оболочек. Л., 1970.
4. *Иванов Д.Н., Наумова Н.В. Сабанеев В.С. Товстик Р.Е. Товстик Т.П.* О спектре частот свободных колебаний мембран и пластин, находящихся в контакте с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1, 2016, №3, 95-104.

Оглавление