

Глава 4

Статические задачи гидроупругости

4.1. Равновесие вертикального стержня в жидкости

Выберем начало координат O в верхней точке вертикального прямолинейного стержня длиной l и направим ось Ox по оси стержня. Уравнение равновесия стержня было получено в первой главе:

$$\frac{dN}{dx} + q = 0,$$

где q — распределенная нагрузка, N — продольное усилие в стержне. Предполагается, что верхний конец стержня закреплен, а растягивающее усилие $N > 0$.

В поле силы тяжести

$$q = \gamma_s S,$$

где $\gamma_s = \rho_s g$ — удельный вес материала стержня, ρ_s — плотность материала, S — площадь поперечного сечения стержня. Решение уравнения равновесия в этом случае имеет вид

$$N = -S\gamma_s x + C,$$

где C — произвольная постоянная, величина которой зависит от граничного условия на конце стержня $x = l$.

Нас будет интересовать условие, при котором продольное усилие $N < 0$, так как сжатый стержень может потерять устойчивость при достаточно большом по абсолютной величине значении N . Выражение для N можно записать в виде

$$N = S\gamma_s(x_0 - x), \quad x_0 = \frac{C}{S\gamma_s}.$$

Ввиду того, что $0 \leq x \leq l$, при $x_0 \geq l$ имеем $N \geq 0$, и стержень растянут, при $x_0 \leq 0$ выполняется неравенство $N \leq 0$, и стержень сжат, а при $0 < x_0 < l$ верхняя часть стержня, для которой $x < x_0$, растянута а нижняя часть сжата.

Если стержень не находится в жидкости, то $N(l) = 0$, $C = \gamma_s Sl$, $x_0 = l$, и стержень растянут. Отметим, что $C = P_s$ где P_s — вес стержня.

В случае, когда к концу сухого стержня прикреплено твердое тело весом P_t , граничное условие имеет вид $N(l) = P_t$, $C = N(0) = P_s + P_t$,

$$x_0 = l + \frac{P_t}{S\gamma_s} > l, \quad N > 0.$$

Пусть стержень погружен в идеальную покоящуюся несжимаемую жидкость, причем его верхний конец находится на поверхности жидкости. Тогда на нижний конец стержня действует сила Архимеда $F_s = Sl\gamma$, где γ — удельный вес жидкости. В этом случае $N(l) = -F_s$, $C = P_s - F_s$,

$$x = x_0 = l - l \frac{\gamma}{\gamma_s} \leq l,$$

Если $\gamma < \gamma_s$, то $0 < x_0 < l$ и верхняя часть стержня растянута, а нижняя его часть сжата. При $\gamma > \gamma_s$ справедливы неравенства $x_0 < 0$, $N < 0$, и стержень оказывается полностью сжат.

Предположим теперь, что к нижнему концу погруженного в жидкость стержня прикреплено твердое тело весом $P_t = \gamma_t V_t$, где γ_t — удельный вес тела, V_t — его объем. Тогда $N(l) = P_t - F_t - F_s$

$$C = P_s + P_t - F_s - F_t, \quad ,$$

где $F_t = \gamma V_t$ — сила Архимеда, действующая на тело. Следовательно,

$$x_0 = \frac{V_s \gamma_s + V_t \gamma_t - \gamma(V_s + V_t)}{S\gamma_s},$$

где $V_s = Sl$ — объем стержня. Сжимающие напряжения в стержне возникают при $x_0 < l$.

Если поперечное сечение стержня — круг радиуса r_s , а тело — шар радиуса r_t , то

$$S = \pi r_s^2, \quad V_s = l\pi r_s^2, \quad V_t = \frac{4}{3}\pi r_t^3.$$

В случае, когда поперечное сечение стержня представляет собой кольцо радиусом r_s и толщиной h_s , площадь его сечения S' и объем V' находятся по формулам

$$S' = \pi \left(r_s + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \pi \left(r_s - \frac{h_s}{2} \right)^2 = 2\pi r_s h_s, \quad V'_s = 2\pi r_s h_s l.$$

Объем тела, являющегося тонкой сферической оболочкой радиуса r_t и толщиной h_t равен

$$V'_t = \frac{4}{3}\pi \left[\left(r_t + \frac{h_t}{2} \right)^3 - \left(r_t - \frac{h_t}{2} \right)^3 \right] = 4\pi r_t^2 h_t \left(1 + \frac{h_t^2}{12r_t^2} \right) \simeq 4\pi r_t^2 h_t.$$

Объемы жидкости, вытесняемой тонкостенным стержнем и сферической оболочкой составляют

$$V_s = \pi r_s^2 l, \quad V_t = \frac{4}{3}\pi r_t^3,$$

поэтому

$$N = -S'\gamma_s x + \gamma_s V'_s + \gamma_t V_t - \gamma(V_s + V_t),$$

$$x_0 = \frac{\gamma_s V'_s + \gamma_t V'_t - \gamma(V_s + V_t)}{S'\gamma_s}.$$

Пример 1. Сплошной цилиндр и шар, погруженные в воду, имеют размеры $l = 10$ см, $r_s = 0.4$ см, $r_t = 0.6$ см, причем $\gamma = 1$ г/см³, $\gamma_s = 2.7$ г/см³ (алюминий), $\gamma_t = 0.5$ г/см³ (пластик). В этом случае $x_0 = 6$ см и большая часть стержня растянута.

Пример 2. Пусть размеры и плотности такие же, как в примере 1, но стержень и шар являются тонкостенными, причем $h_s = h_t = 0.05$ см. Тогда $x_0 = -7.1$ см и весь стержень сжат.

4.2. Устойчивость горизонтального стержня в жидкости

Пусть прямолинейный стержень длиной l с прямоугольным поперечным сечением шириной a и высотой b находится в идеальной несжимаемой жидкости на глубине H под действием осевой сжимающей силы P . Ось стержня параллельна поверхности жидкости.

Уравнения устойчивости стержня в жидкости

$$M' = Q - Pw', \quad Q' = q$$

отличаются от уравнений устойчивости

$$M' = Q - Pw', \quad Q' = 0,$$

приведенных в разделе 5 первой главы, наличием в правой части второго уравнения распределенной нормальной нагрузки q , возникающей из-за воздействия на стержень давления жидкости.

Для того, чтобы найти q рассмотрим часть стержня между сечениями с координатами x и $x + \Delta x$ (рис. 4.1).

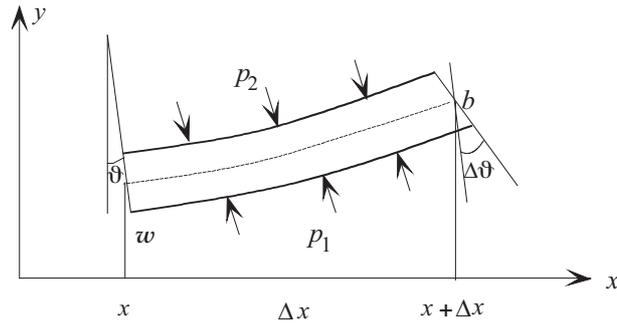


Рис. 4.1. Сечение части стержня.

Принимая во внимание, что прогиб стержня w и угол поворота его сечения ϑ малы, получаем, что проекция на ось y равнодействующей сил, возникающих в результате действия давления жидкости на поверхность рассматриваемого участка стержня равна

$$F = S_1 p_1 - S_2 p_2,$$

где

$$p_1 = \gamma \left(H - w + \frac{b}{2} \right), \quad p_2 = \gamma \left(H - w - \frac{b}{2} \right),$$

γ — удельный вес жидкости, S_1 и S_2 площади верхней и нижней части поверхности участка стержня, причем

$$S_1 = a \left(\Delta x + \frac{b}{2} \Delta \vartheta \right), \quad S_2 = a \left(\Delta x - \frac{b}{2} \Delta \vartheta \right).$$

Подставив в формулу для F выражения для p_1 , p_2 и S_1 , S_2 , получим

$$F = S\gamma[(H - w)\Delta\vartheta + \Delta x],$$

где $S = ab$ — площадь поперечного сечения стержня. Пренебрежем прогибом w по сравнению с глубиной погружения стержня H . Тогда

$$F = Sp_0\Delta\vartheta + S\gamma\Delta x,$$

где $p_0 = \gamma H$ — давление жидкости на глубине H . Нормальная нагрузка определяется по формуле

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta x} = p_0 S \vartheta' + S\gamma.$$

Первое слагаемое в выражении для q возникает благодаря тому, что площадь нижней растянутой части стержня S_1 больше, чем площадь S_2 его верхней сжатой части. Второе слагаемое обусловлено действующей на стержень силой Архимеда.

Мы не включили в q постоянную составляющую распределенной нагрузки $-S\gamma_s$, где γ_s — удельный вес материала стержня, так как она не влияет на величину критической нагрузки (см. конец раздела 1.5). По этой же причине мы исключим из распределенной нагрузки q постоянное слагаемое $S\gamma$ и положим

$$q = p_0 S \vartheta'.$$

Продифференцируем по x первое уравнение устойчивости

$$M' = Q - P\vartheta$$

и подставим в него $Q' = q = p_0 S \vartheta'$. Получим

$$M'' + (P - p_0 S)\vartheta' = 0.$$

Ввиду того, что

$$M = EJ\vartheta', \quad \vartheta = w',$$

при условии $EJ = \text{const}$ последнее уравнение приобретает вид

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + (P - p_0 S) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Предположим, что $P > p_0 S$ и обозначим

$$\alpha^2 = \frac{P - p_0 S}{EJ}.$$

Решение уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

с граничными условиями шарнирного опирания

$$w = w'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = l.$$

получено в разделе 1.5.

Краевая задача имеет нетривиальное решение

$$w_k = C_1 \sin \alpha_k x,$$

если

$$\alpha_k l = \pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, нетривиальное решение существует при

$$P = P_k = \frac{EJ\pi^2 k^2}{l^2} + p_0 S.$$

Наименьшая из этих сил

$$P_1 = P_c = \frac{EJ\pi^2}{l^2} + p_0 S$$

называется критической нагрузкой. При достижении силой P этого значения стержень теряет устойчивость. Если $P < p_0 S$, то нетривиальных решений нет, и потеря устойчивости не происходит.

В случае отсутствия жидкости $p_0 = 0$, и мы получаем классическую силу Эйлера

$$P_c = \frac{EJ\pi^2}{l^2}.$$

Давление жидкости на боковую поверхность стержня препятствует его изгибу и увеличивает критическую нагрузку.

4.3. Устойчивость вертикального стержня в жидкости

Исследуем устойчивость в жидкости вертикального прямолинейного стержня длиной l с прямоугольным поперечным сечением шириной a и высотой b . К нижнему концу стержня прикреплен груз весом $P_t = \gamma_t V_t$. В разделе 4.1 получено выражение для продольного усилия в таком стержне

$$N(x) = -S\gamma_s x + N(0), \quad N(0) = \gamma_s V_s' + \gamma_t V_t' - \gamma(V_s + V_t).$$

Обозначим $P = -N(0)$ и предположим, что $P > 0$. Тогда стержень будет сжат и может потерять устойчивость.

Уравнения устойчивости вертикального стержня имеют вид

$$M' = Q + N\vartheta, \quad Q' = q.$$

Для определения распределенной нагрузки q , возникающей в результате давления жидкости на стержень рассмотрим часть стержня между сечениями с координатами x и $x + \Delta x$ (рис. 4.2). Давления на

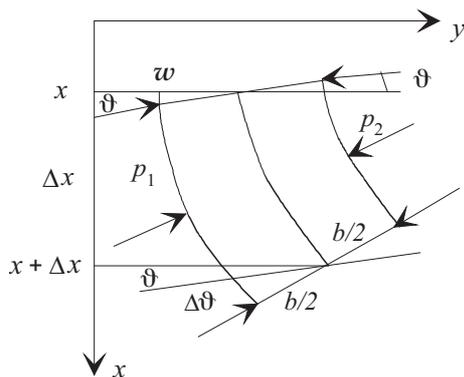


Рис. 4.2. Сечение части вертикального стержня.

левую и правую поверхность стержня находятся по формулам

$$p_1 = \gamma \left(x + \frac{b}{2} \sin \vartheta \right) \simeq \gamma \left(x + \frac{b}{2} \vartheta \right),$$

$$p_2 = \gamma \left(x - \frac{b}{2} \sin \vartheta \right) \simeq \gamma \left(x - \frac{b}{2} \vartheta \right),$$

а проекция на ось y силы, действующей на участок стержня длиной Δx равна

$$F = S_1 p_1 - S_2 p_2,$$

где

$$S_1 = a \left(\Delta x + \frac{b}{2} \Delta \vartheta \right), \quad S_2 = a \left(\Delta x - \frac{b}{2} \Delta \vartheta \right).$$

Следовательно,

$$F = S\gamma x \Delta \vartheta + S\gamma \vartheta \Delta x, \quad q = S\gamma x \vartheta' + S\gamma \vartheta.$$

Первое слагаемое в формуле для q появляется благодаря разности площадей растянутой и сжатой поверхностей стержня. Второе

слагаемое учитывает разность давлений, возникающую из-за поворота сечения стержня на угол ϑ . В отличие от случая горизонтально расположенного стержня второе слагаемое вносит вклад в величину критической нагрузки. Вес стержня входит в выражение для продольного усилия N .

Формулу для q можно записать в виде

$$q = \gamma S(x\vartheta)'$$

Дифференцирование уравнения $M' = Q + N\vartheta$ с последующей подстановкой в него выражения для Q' дает равенство

$$M'' - (N\vartheta)' = q,$$

где

$$N = -S\gamma_s x - P.$$

Учитывая, что $M = EJw''$, получаем

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} [(S\gamma_s x + P)\vartheta] - \gamma S \frac{d}{dx} (x\vartheta) = 0$$

или

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + (\gamma_s - \gamma) S \frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) = 0.$$

В общем случае это уравнение не имеет явного аналитического решения. Пусть величина P достаточно велика для того, чтобы пренебречь последним слагаемым в уравнении. Тогда

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Кроме того, имеют место приближенные равенства $N = -P$, $Q = M' + P\vartheta$. Предположим, что верхний конец стержня жестко заделан, а нижний конец свободен. Тогда

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad M(l) = Q(l) = 0.$$

С учетом приближенных формул и выражения для M граничные условия имеют вид

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad EJw'''(l) + Pw'(l) = 0.$$

Подставив в граничные условия общее решение приближенного уравнения устойчивости стержня

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D,$$

получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} B + D = 0, \quad A\alpha + C = 0, \quad A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0, \\ \alpha^3 A \cos \alpha l - \alpha^3 B \sin \alpha l = \alpha^2 (A\alpha \cos \alpha l - B\alpha \sin \alpha l + C). \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $C = 0$. Следовательно, $A = 0$, $B \cos \alpha l = 0$. Если $B = 0$, то $D = 0$, и уравнение имеет только тривиальное решение. Из условия $B \neq 0$ следует, что

$$\cos \alpha l = 0, \quad \alpha_k l = \frac{\pi}{2} + \pi(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad D = -B.$$

Наименьший корень $\alpha_1 = \frac{\pi}{2l}$ уравнения $\cos \alpha l = 0$ соответствует критической силе

$$P_c = EJ\alpha_1^2 = EJ\frac{\pi^2}{4l^2},$$

которая в 4 раза меньше, чем критическая сила для шарнирно опертого стержня. Учитывая, что $D = -B$, получаем форму потерю устойчивости

$$w = D(1 - \cos \frac{\pi}{2l}x).$$

4.4. Равновесие мембраны под тяжестью жидкости

Предположим, что дно прямоугольного сосуда с абсолютно жесткими вертикальными стенками, заполненного идеальной нежимаемой жидкостью, представляет собой мембрану. Пусть уровень жидкости в сосуде с недеформированной мембраной равен H_0 (рис. 4.3a). Из-за прогиба мембраны уровень жидкости в сосуде уменьшается до величины H (рис. 4.3b).

Прогиб мембраны удовлетворяет уравнению

$$T\Delta w + q = 0, \tag{4.1}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

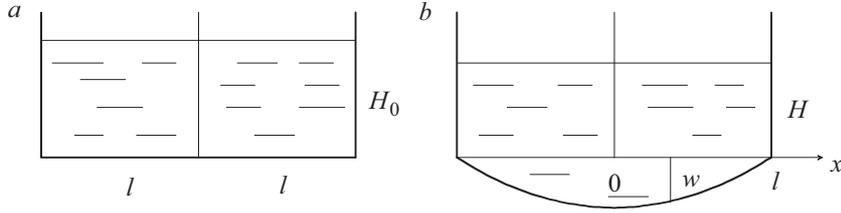


Рис. 4.3. Полость с деформируемым дном, заполненная жидкостью.

T — растягивающее усилие в мембране, $q = \gamma(H + w) + \gamma_m h_m$ — распределенная нагрузка, γ и γ_m — удельные веса жидкости и материала мембраны, h_m — толщина мембраны.

Рассмотрим цилиндрический изгиб, для которого $w = w(x)$. В этом случае уравнение (4.1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2(H + w + h) = 0, \quad -l \leq x \leq l, \quad (4.2)$$

где $\alpha^2 = \gamma/T$, $h = \gamma_m h_m / \gamma$

Общее решение

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - D, \quad D = H + h$$

уравнения (4.2) подставим в граничные условия

$$w(-l) = w(l) = 0.$$

Получим систему линейных уравнений

$$-A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = D, \quad A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = D,$$

решение которой при условиях $\sin \alpha l \neq 0$, $\cos \alpha l \neq 0$ имеет вид

$$A = 0, \quad B = D \cos^{-1} \alpha l.$$

Следовательно,

$$w = D \left(\frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha l} - 1 \right).$$

Предположим, что $H \geq 0$. Тогда из условия несжимаемости жидкости вытекает следующее условие сохранения ее объема:

$$2lH + \int_{-l}^l w dx = 2lH_0.$$

Ввиду того, что $w(x) = w(-x)$, условие сохранения объема дает равенство

$$lH + \int_0^l w dx = lH_0.$$

Подставив в это равенство выражение для $w(x)$, получим

$$H = (H_0 + h)\alpha l \operatorname{ctg} \alpha l - h.$$

Данное решение годится только при значениях αl , для которых $H \geq 0$.

Если пренебречь весом мембраны, полагая $h = 0$, то

$$H = \alpha l H_0 \operatorname{ctg} \alpha l, \quad D = H, \quad w = \frac{\alpha l H_0}{\sin \alpha l} (\cos \alpha x - \cos \alpha l).$$

Условие $H \geq 0$ выполняется при $\alpha l \leq \pi/2$. Если $\alpha l \rightarrow 0$, то $H \rightarrow H_0$, $w \rightarrow 0$.

Если же $\alpha l = \pi/2$, то $H = 0$,

$$w = \frac{\pi}{2} H_0 \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

В этом случае при любом начальном уровне жидкости H_0 вся она оказывается внутри полости, образовавшейся благодаря деформации мембраны.

Этот парадоксальный результат, который подробно обсуждается в книге Ильгамова М.А. Статические задачи гидроупругости, появился из-за того, что в формуле для H мы пренебрегли величиной h по сравнению с первым слагаемым. Однако первое слагаемое стремится к нулю при $\alpha l \rightarrow \pi/2$, поэтому полагать $h = 0$ допустимо лишь при условии, что $|\alpha l - \pi/2|$ является достаточно большой величиной. В частности, из точной формулы для H при $\alpha l = \pi/2$ следует, что $H = -h < 0$. Это означает, что при $\alpha l = \pi/2$ мембрана частично заполнена жидкостью.

4.5. Равновесие мембраны частично заполненной жидкостью

Рассмотрим цилиндрический изгиб невесомой мембраны, частично заполненной жидкостью. В силу симметрии задачи достаточно построить ее решение для $x \in [0, l]$. Обозначим H расстояние от оси

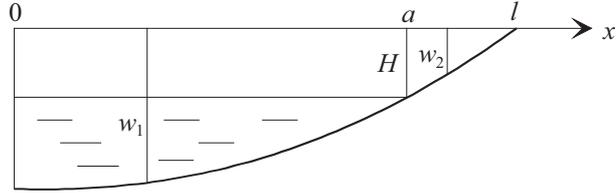


Рис. 4.4. Полость частично заполненная жидкостью.

x до поверхности жидкости. Пусть a — абсцисса границы жидкости, а w_1 и w_2 — прогибы мембраны при $0 \leq x \leq a$ и $a \leq x \leq l$ соответственно (рис. 4.4).

Уравнения равновесия мембраны имеют вид

$$w_1'' + \alpha^2(w_1 - H + h) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$w_2'' + \alpha^2 h = 0, \quad a \leq x \leq l,$$

где $\alpha^2 = \gamma/T$. Решения этих уравнений удовлетворяют граничным условиям

$$w_1'(0) = 0, \quad w_1(a) = w_2(a) = H, \quad w_1'(a) = w_2'(a), \quad w_2(l) = 0. \quad (4.3)$$

и условию несжимаемости жидкости

$$\int_0^a (w_1 - H) dx = lH_0.$$

Подстановка общих решений уравнений

$$w_1 = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + H - h, \quad w_2 = Cx + D - \beta x^2, \quad \beta = \frac{1}{2} \alpha^2 h$$

в граничные условия (4.3) и условие несжимаемости позволяет найти произвольные постоянные A, B, C, D и числа a и H . В рассматриваемой задаче граница жидкости a оказывается неизвестной величиной.

Из последнего условия (4.3) следует, что

$$D = -Cl + \beta l^2, \quad w_2 = C(x - l) + \beta(l^2 - x^2).$$

Учитывая, что $H = w_2(a)$, получаем

$$H = C(a - l) + \beta(l^2 - a^2).$$

Из первого условия (4.3) вытекает, что

$$A = 0, \quad w_1 = B \cos \alpha x + H - h.$$

Осталось найти a , B и C . Ввиду того, что $w_1(a) = H$, имеет место равенство

$$B \cos \alpha a = h.$$

Подставив w_1 в условие несжимаемости, получим

$$B \sin \alpha a = \alpha(lH_0 + ah).$$

Из последних двух равенств следует уравнение для определения a :

$$h \operatorname{tg} \alpha a = \alpha(lH_0 + ah). \quad (4.4)$$

Если a_* — корень уравнения (4.4), то

$$B = \frac{h}{\cos \alpha a_*}.$$

Принимая во внимание, что

$$w_1'(a) = w_2'(a), \quad w_1'(a) = -\alpha B \sin \alpha a, \quad w_2'(a) = C - 2a\beta.$$

находим

$$C = 2a_*\beta - \alpha B \sin \alpha a_*.$$

Решение рассматриваемой задачи находится после подстановки выражения для B и C в формулы для H , w_1 и w_2 .

4.6. Равновесие круглой мембраны под действием гидростатической нагрузки

Рассмотрим задачу о равновесии круглой мембраны радиуса R , являющейся дном цилиндрического сосуда, наполненного идеальной несжимаемой жидкостью. Начальный уровень жидкости H_0 (рис. 4.5) связан с ее объемом V_0 формулой $V_0 = \pi R^2 H_0$.

В полярных координатах r , φ оператор Лапласа в уравнении прогиба мембраны (4.1) имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

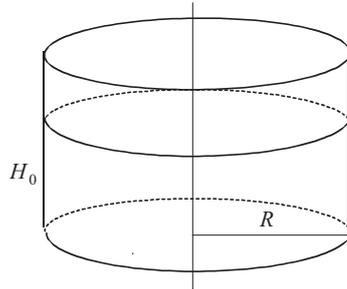


Рис. 4.5. Круглая мембрана, заполненная жидкостью.

Нагрузка $q = \gamma(H+w) + \gamma_m h$ не зависит от φ , поэтому задача является осесимметричной, и $w = w(r)$. Рассмотрим невесомую мембрану, для которой $\gamma_m = 0$. Уравнение изгиба

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \alpha^2 w = -\alpha^2 H, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T} \quad (4.5)$$

и условие сохранения объема

$$\pi R^2 H + 2\pi \int_0^R r w(r) dr = \pi R^2 H_0$$

представляют собой систему уравнений для определения неизвестных w и H , причем прогиб w удовлетворяет граничному условию $w(R) = 0$.

Решение уравнения (4.5) является суммой общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \alpha^2 w = 0$$

и частного решения $w = -H$ неоднородного уравнения.

Умножив однородное уравнение на r^2 и сделав замену переменной $x = \alpha r$, получим уравнение Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + x \frac{dw}{dx} + x^2 w = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w = AJ_0(x) + BY_0(x),$$

где J_0 и Y_0 функции Бесселя и Вебера, причем $Y_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, а $J_0(0) = 1$. Следовательно,

$$w(r) = AJ_0(\alpha r) - H.$$

Подставив это решение в граничное условие $w(R) = 0$, найдем произвольную постоянную A и получим

$$w = H \left[\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right].$$

Из условия сохранения объема жидкости следует, что

$$H = H_0 - \frac{2H}{R^2} \int_0^R \left[\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right] r dr.$$

Учитывая, что

$$xJ_0 = J_1 + xJ_1' = (xJ_1)',$$

где J_1 — решение уравнения Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + x \frac{dw}{dx} + (x^2 - 1)w = 0,$$

получаем

$$H = \frac{z J_0(z)}{2 J_1(z)} H_0, \quad w = \frac{z H_0}{2} \frac{J_0(x) - J_0(z)}{J_1(z)}, \quad z = \alpha R.$$

Величина H обращается в нуль в случае $J_0(z) = 0$. Наименьший положительный корень этого уравнения $z_1 \simeq 2.4$, причем $J_1(z_1) \simeq 0.52$. Если $H = 0$, то

$$w = \frac{z_1 H_0}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(z_1)}.$$

В частности, $w(0) \simeq 2.3H_0$. Ситуация аналогична той, которая описана в конце раздела 4.4: если $\alpha = z_1/R$, то при любом значении H_0 увеличение объема сосуда за счет деформации мембраны равно объему жидкости в нем.

4.7. Жидкость в сосуде, закрытом мембраной

В жидкости, находящейся в закрытом сосуде, под действием внешних сил может возникнуть постоянная составляющая давления

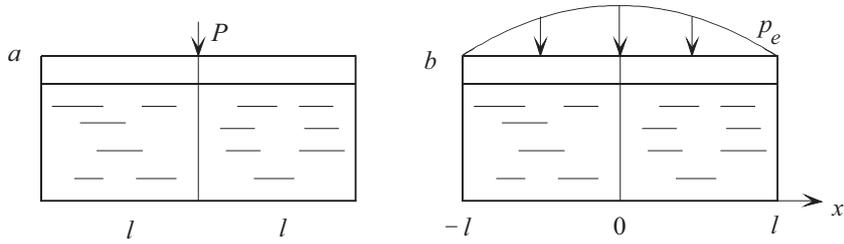


Рис. 4.6. Сечение сосуда, накрытого поршнем.

p_0 . Пусть прямоугольный сосуд с жидкостью длиной $2l$ и шириной b накрыт абсолютно жестким поршнем, свободно скользящим по стенкам сосуда. К поршню приложена вертикальная сила P (рис. 4.6a).

Из условия равновесия поршня получаем $P = Sp_0$, где $S = 2lb$ — площадь поршня, p_0 — давление на поверхности жидкости. Давление на расстоянии z от поверхности жидкости

$$p = p_0 + \gamma z = \frac{P}{S} + \gamma z.$$

Если вместо силы P поршень нагружен давлением

$$p_e = q_e \cos \beta x, \quad \beta = \frac{\pi}{2l},$$

(рис. 4.6b), то главный вектор внешних сил

$$P_e = \int_S p_e dS = bq_e \int_{-l}^l \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{4lb}{\pi} q_e$$

равен главному вектору сил давления жидкости $P_0 = 2lbp'_0$. Следовательно,

$$p'_0 = \frac{2}{\pi} q_e.$$

Заменим жесткий поршень невесомой мембраной, прикрепленной к стенкам сосуда и натянутой усилием T . Нагрузка на мембрану равна

$$q = p_e - (p_0 + \gamma w),$$

где постоянная составляющая давления p_0 и прогиб w являются неизвестными.

Уравнение цилиндрического изгиба мембраны

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha^2 w = -\frac{p_e - p_0}{T}, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T}, \quad p_e = q_e \cos \beta x$$

имеет решение

$$w = w_0 + w_1 + w_2,$$

где

$$w_0 = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x$$

— общее решение однородного уравнения, w_1 и w_2 — частные решения неоднородных уравнений

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha^2 w = \frac{p_0}{T} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha^2 w = -\frac{q_e \cos \beta x}{T},$$

которые ищутся в виде

$$w_1 = C, \quad w_2 = D \cos \beta x.$$

Поставляя в соответствующие уравнения w_1 и w_2 , получаем

$$C = -\frac{p_0}{T\alpha^2}, \quad D = \frac{q_e}{T(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Следовательно

$$w = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x - \frac{p_0}{T\alpha^2} + \frac{q_e}{T(\alpha^2 + \beta^2)} \cos \beta x.$$

После подстановки w в граничные условия

$$w(-l) = w(l) = 0$$

получаем систему уравнений для определения постоянных A и B :

$$-A \operatorname{sh} \alpha l + B \operatorname{ch} \alpha l = \frac{p_0}{T\alpha^2}, \quad A \operatorname{sh} \alpha l + B \operatorname{ch} \alpha l = \frac{p_0}{T\alpha^2},$$

которая имеет решение

$$A = 0, \quad B = \frac{p_0}{T\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha l}.$$

С учетом последних равенств решение уравнения принимает вид

$$w = \frac{p_0}{T\alpha^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l} - 1 \right) + \frac{q_e}{T(\alpha^2 + \beta^2)} \cos \beta x.$$

Для определения постоянной составляющей давления p_0 используем условие несжимаемости жидкости:

$$\int_{-l}^l w dx = 2 \int_0^l w dx = 0$$

из которого следует, что

$$\frac{p_0}{T\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha l} \int_0^l \operatorname{ch} \alpha x dx - l \frac{p_0}{T\alpha^2} + \frac{q_e}{T(\alpha^2 + \beta^2)} \int_0^l \cos \beta x dx = 0,$$

$$\frac{p_0}{T\alpha^3} \operatorname{th} \alpha l - \frac{lp_0}{T\alpha^2} + \frac{q_e}{T\beta(\alpha^2 + \beta^2)} = 0, \quad p_0 = \frac{\alpha^3 q_e}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha l - \operatorname{th} \alpha l)}.$$

Подставив выражение для p_0 в формулу для w , получаем

$$w = \frac{q_e}{T(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\frac{\alpha}{\beta(\alpha l - \operatorname{th} \alpha l)} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l} - 1 \right) + \cos \beta x \right].$$

Для сильно растянутой мембраны $\alpha l \ll 1$,

$$\operatorname{th} \alpha l = \alpha l - \frac{(\alpha l)^3}{3} + \dots, \quad \alpha l \ll \beta l$$

и приближенное выражение для p_0 можно представить в виде

$$p_0 \simeq \frac{3\alpha^3 q_e}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha l)^3} \simeq \frac{3q_e}{\beta^3 l^3} = \frac{24q_e}{\pi^3}.$$

Сравнивая это давление с давлением $p'_0 = \frac{2}{\pi} q_e$, возникающим под действием жесткого поршня, получаем

$$\frac{p_0}{p'_0} = \frac{24q_e}{\pi^3} \frac{\pi}{2q_e} = \frac{12}{\pi^2} = 1.216.$$

При одинаковом нагружении поршня и мембраны постоянная составляющая давления под ними отличается более, чем на 20%.

Для слабо натянутой мембраны $\alpha l \gg 1$, $\operatorname{th} \alpha l \simeq 1$, $\alpha l \gg \beta l$,

$$p_0 \simeq \frac{\alpha^3 q_e}{\beta \alpha^3 l} = \frac{2}{\pi} q_e = p'_0.$$

С увеличением αl давление p_0 убывает, приближаясь к давлению p'_0 . График функции

$$f(z) = p_0/p'_0 = \frac{4z^3}{(4z^2 + \pi^2)(z - \operatorname{th} z)}, \quad z = \alpha l$$

приведен на рис. 4.7.

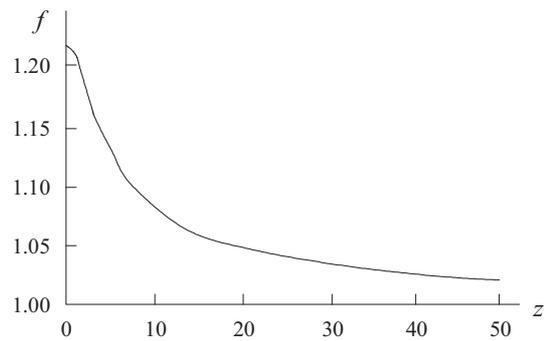


Рис. 4.7. Зависимость отношения p_0/p'_0 от $z = \alpha l$.

4.8. Простейшая модель хрусталика глаза

Хрусталик глаза играет роль линзы, которая меняет свою форму в зависимости от расстояния до рассматриваемого объекта. Лучи света, проходя через хрусталик, фокусируются на задней поверхности сетчатки (рис. 4.8). Полученное изображение поступает в мозг по зрительному нерву. Форма хрусталика меняется благодаря растяжению или сжатию прикрепленных к нему мышц.



Рис. 4.8. Строение глаза.

С механической точки зрения хрусталик глаза представляет собой мягкую оболочку, наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. В качестве простейшей модели хрусталика глаза возьмем

замкнутую цилиндрическую оболочку, находящуюся под давлением жидкости p_0 (рис. 4.9). Весом жидкости пренебрегаем, считая p_0 постоянной величиной.

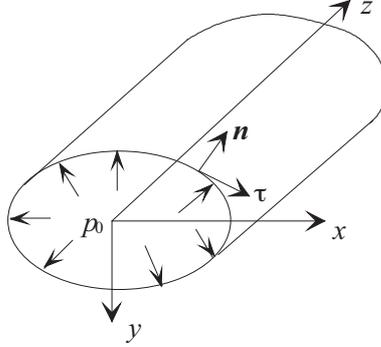


Рис. 4.9. Модель хрусталика.

Найдем решение, не зависящее от координаты z . В этом случае деформация оболочки называется цилиндрическим изгибом, а уравнение равновесия мягкой оболочки имеет такой же вид, как уравнение равновесия нити:

$$\frac{d}{ds}(T\boldsymbol{\tau}) = p_0\mathbf{n}. \quad (4.6)$$

Здесь T — сила натяжения, s — длина дуги параллели оболочки, $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали. Принимая во внимание, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

где R — радиус кривизны параллели, перепишем уравнение (4.6) в виде

$$\frac{dT}{ds}\boldsymbol{\tau} + T\frac{\mathbf{n}}{R} = p_0\mathbf{n}. \quad (4.7)$$

Скалярное умножение уравнения (4.7) на векторы $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} дает равенства

$$\frac{dT}{ds} = 0, \quad \frac{T_0}{R} = p_0.$$

Следовательно, $T = T_0 = \text{const}$, и под действием равномерного внутреннего давления p_0 параллель оболочки принимает форму окружности радиуса $R_0 = T_0/p_0$.

Пусть l_0 — длина нерастянутой параллели. Тогда

$$T_0 = B\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{2\pi R_0 - l_0}{l_0}, \quad B = \frac{Eh}{1 - \nu^2},$$

где ε_0 — относительное удлинение параллели, B — жесткость оболочки на растяжение. Внутреннее давление определяется по формуле

$$p_0 = \frac{T_0}{R_0} = \frac{B}{R_0}\varepsilon_0.$$

Предположим, что к точкам параллели A и B , лежащим на его вертикальном диаметре, приложены усилия \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$. В задаче о деформации хрусталика такие усилия возникают благодаря действию мышц. На рис. 4.10а изображена параллель оболочки до деформации ее силами.

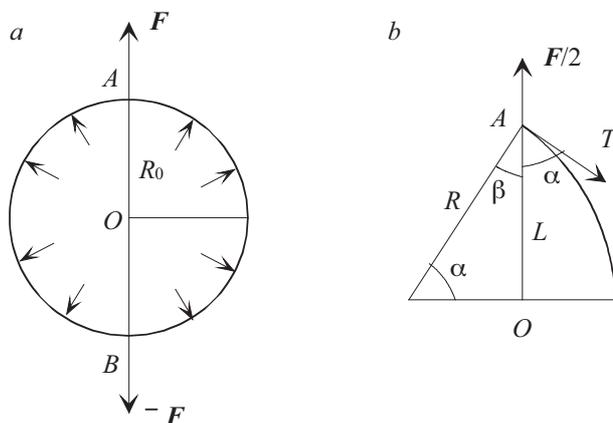


Рис. 4.10. Деформация параллели.

После деформации в точках A и B появляются изломы. Правая и левая части параллели остаются дугами окружности радиуса $R = T/p$, где $T = \text{const}$ — сила натяжения, p — внутреннее давление. Благодаря симметрии задачи достаточно рассмотреть четверть параллели после деформации, изображенную на рис. 4.10б.

Из условия равновесия образующей оболочки, проходящей через точку A , следует, что

$$F = 2T \cos \alpha.$$

При $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$ имеем $F = 0$. Сила натяжения равна

$$T = B\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{4\alpha R - l_0}{l_0} = \frac{T}{B} = \frac{F}{2B \cos \alpha}.$$

В уравнение

$$4\alpha R - l_0 = \frac{Fl_0}{2B \cos \alpha} \quad (4.8)$$

входят две неизвестные величины: α и R .

Вторым уравнением, содержащим α и R , является условие сохранения объема жидкости:

$$\pi R_0^2 = 2\alpha R^2 - 2LR \cos \alpha, \quad L = R \sin \alpha$$

или

$$\pi R_0^2 = R^2(2\alpha - \sin 2\alpha). \quad (4.9)$$

Уравнения (4.8) и (4.9) представляют собой систему для определения α и R . Полученная система не имеет аналитического решения, однако можно найти её приближенное решение для малых значений угла $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Подставим в полученные формулы $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{(2\pi - 4\beta)R - l_0}{l_0} = \frac{F}{2B \sin \beta},$$

$$\frac{\pi R_0^2}{R^2} = \pi - 2\beta - \sin 2\beta, \quad 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Считая, что $\beta \ll 1$, воспользуемся приближенными формулами

$$\sin \beta \simeq \beta, \quad \sin 2\beta \simeq 2\beta$$

и будем искать R в виде

$$R = R_0 + \beta R_1.$$

Из условия сохранения объема

$$\pi R_0^2 \simeq (R_0 + \beta R_1)^2(\pi - 4\beta).$$

Приравняв нулю коэффициент при β в последнем равенстве, получим

$$R_1 = \frac{2R_0}{\pi}, \quad R \simeq R_0(1 + 2\mu), \quad \text{где } \mu = \frac{\beta}{\pi} \ll 1.$$

С точностью до величин, пропорциональных μ^2 имеем

$$\varepsilon \simeq \frac{\pi(2 - 4\mu)R_0(1 + 2\mu) - l_0}{l_0} \simeq \frac{2\pi R_0 - l_0}{l_0} = \varepsilon_0,$$

$$F = 2T \sin \beta \simeq 2B\varepsilon_0\pi\mu, \quad 2\mu = \frac{F}{\pi B\varepsilon_0}, \quad R = R_0 \left(1 + \frac{F}{B\varepsilon_0\pi} \right).$$

Из последней формулы следует, что с увеличением усилия F радиус кривизны хрусталика R увеличивается. Можно показать, что этот результат имеет место при любом $\beta \in [0, \pi/2)$. Он подтверждает общепринятую теорию Гельмгольца, но противоречит гипотезе Шахара (1992), согласно которой радиус кривизны в центре хрусталика уменьшается при увеличении F .

Наряду с радиусом кривизны, важной характеристикой является величина давления жидкости в хрусталике

$$p = \frac{T}{R} = \frac{\varepsilon B}{R} \simeq \frac{\varepsilon_0 B}{R_0 \left(1 + \frac{F}{B\varepsilon_0\pi} \right)}.$$

При малых β с увеличением F давление в хрусталике уменьшается. Поведение давления при $\beta \in [0, \pi/2)$ зависит от величины начальной деформации ε_0 .

4.9. Сжатие мягкой цилиндрической оболочки между двумя плитами

Рассмотрим мягкую цилиндрическую оболочку, наполненную покоящейся идеальной несжимаемой жидкостью. Весом жидкости пренебрегаем по сравнению с постоянной составляющей давления P_0 . Для решения, независящего от координаты z , справедлива формула из предыдущего раздела:

$$T_0 = R_0 P_0.$$

Пусть оболочка находится между двумя абсолютно жесткими горизонтальными плитами одинаковой ширины $2b_0$, причем расстояние от одной плиты до другой $2a \leq 2R_0$. Область контакта плиты и оболочки представляет собой полосу шириной $2b$ (рис. 4.11а). Предположим сначала, что размер области контакта $2b$ меньше ширины плиты $2b_0$. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть 1/4

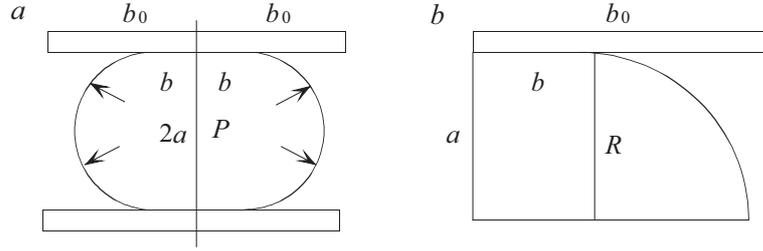


Рис. 4.11. Деформация цилиндрической оболочки в случае $b < b_0$.

оболочки (рис. 4.11b). В деформированном состоянии четверть параллели оболочки состоит из отрезка прямой длиной b и дуги окружности радиуса $R = a$.

Растягивающее усилие определяется по формуле

$$T = T_0 + B\varepsilon,$$

где $B = Eh/(1 - \nu^2)$ — жесткость оболочки, ε — деформация растяжения, причем

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l} = \frac{l}{l_0} - 1, \quad l = b + \frac{R\pi}{2}, \quad l_0 = \frac{R_0\pi}{2},$$

а постоянная составляющая давления $P = T/R$.

Неизвестная величина b находится из условия несжимаемости жидкости:

$$\frac{\pi}{4}R_0^2 = \frac{\pi}{4}R^2 + bR, \quad b = \frac{\pi R_0^2 - R^2}{4R}, \quad b \leq b_0.$$

Следовательно,

$$l = b + \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi R_0^2 + R^2}{4R}, \quad \varepsilon = \frac{l}{l_0} - 1 = \frac{(R_0 - R)^2}{2R_0R}.$$

Введем безразмерные величины

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad t = \frac{T}{T_0}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \quad c = \frac{B}{T_0}, \quad \alpha = \frac{a}{R_0}, \quad \beta = \frac{b}{R_0}, \quad \beta_0 = \frac{b_0}{R_0}.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{(1 - r)^2}{2r}, \quad p = \frac{t}{r} = \frac{1 + c\varepsilon}{r} = \frac{1}{r} + \frac{c(1 - r)^2}{2r^2}, \quad (4.10)$$

Безразмерное давление $p(r)$ является убывающей функцией, так как

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2} - \frac{c}{r^3}(1-r) < 0.$$

Это означает, что с уменьшением расстояния между плитами давление в оболочке возрастает.

Полученное решение годится для $b \leq b_0$ или для

$$\beta = \frac{\pi(1-r^2)}{4r} \leq \beta_0$$

Корень уравнения $\pi r^2 + 4\beta_0 r - \pi = 0$ равный

$$r_* = \alpha_* = \frac{-2\beta_0 + \sqrt{4\beta_0^2 + \pi^2}}{\pi}$$

назовем критическим расстоянием между плитами. При $\alpha \geq \alpha_*$ выполняется условие $\beta \leq \beta_0$. Так, например, при $\beta_0 = 1$

$$\alpha_* = \frac{\sqrt{4 + \pi^2} - 2}{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2} + 2} \simeq 0.55.$$

Если $\alpha < \alpha_*$, то область контакта имеет ширину $b = b_0$, а параллель принимает форму, изображенную на рис. 4.12. В этом случае радиус дуги окружности R больше, чем a . Длина 1/4 деформиро-

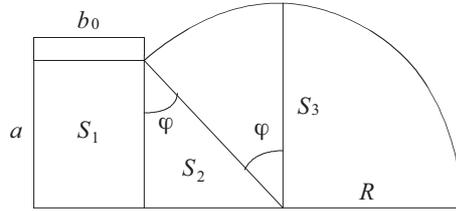


Рис. 4.12. Деформация цилиндрической оболочки в случае $b = b_0$.

ванной параллели равна

$$l = b_0 + R \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

а его деформация

$$\varepsilon = \frac{l}{l_0} - 1 = \frac{2b_0}{\pi R_0} + \frac{R}{R_0} \left(1 + \frac{2\varphi}{\pi} \right) - 1.$$

Условие несжимаемости жидкости

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_0 = \frac{\pi R_0^2}{4},$$

где

$$S_1 = ab_0 = b_0 R \cos \varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2} R^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad S_3 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

— площади прямоугольника, треугольника и кругового сектора соответственно (см. рис. 4.12), принимает вид

$$\frac{\pi R_0^2}{4} = b_0 R \cos \varphi + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right).$$

Запишем полученные равенства в безразмерных переменных:

$$\varepsilon = 2 \frac{\beta_0}{\pi} + r \left(1 + \frac{2\varphi}{\pi} \right) - 1, \quad \pi = 4\beta_0 r \cos \varphi + r^2 (\pi + 2\varphi + \sin 2\varphi).$$

Решив квадратное уравнение, находим

$$r(\varphi) = \frac{-2\beta_0 \cos \varphi + \sqrt{4\beta_0^2 \cos^2 \varphi + \pi^2 + 2\pi\varphi + \pi \sin 2\varphi}}{\pi + 2\varphi + \sin 2\varphi}. \quad (4.11)$$

Для безразмерного расстояние между плитами и безразмерных усилия и давления имеем следующие формулы:

$$\alpha(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \quad t(\varphi) = 1 + c\varepsilon(\varphi), \quad p(\varphi) = \frac{t(\varphi)}{r(\varphi)}. \quad (4.12)$$

Соотношения (4.11), (4.12) позволяют найти зависимости между любыми функциями переменной φ . Так, например, задавая φ из интервала $[0, \pi/2]$ мы можем вычислить α и соответствующее ему значение p . Проделав эту процедуру достаточное количество раз, мы определим зависимость давления от расстояния между плитами.

При $\varphi = 0$ получаем, что

$$r(0) = \frac{-2\beta_0 + \sqrt{4\beta_0^2 + \pi^2}}{\pi} = r_*.$$

Критическое расстояние между плитами $\alpha_* = r_*$ соответствует переходу от случая $b < b_0$ (рис. 4.11b) к случаю $b = b_0$ (рис. 4.12).

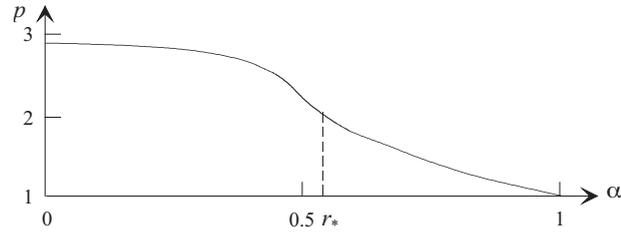


Рис. 4.13. Зависимость p от α .

Если $\varphi = \pi/2$, то расстояние между плитами $\alpha = 0$. В этом случае

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon = 2\frac{\beta_0}{\pi} + \sqrt{2} - 1, \quad p = \sqrt{2} \left[c \left(\frac{2\beta_0}{\pi} + \sqrt{2} - 1 \right) + 1 \right].$$

На рис. 4.13 представлен график зависимости давления p от расстояния между плитами α в случае $\beta_0 = 1$, $c = 1$, построенный с помощью пакета Mathematica. При $\beta_0 = 1$ ширина плиты равна диаметру оболочки.

Для построения графика на интервале $\alpha \in [r_*, 1]$ используется вторая формула (4.10) с учетом равенства $r = \alpha$. График функции $p(\alpha)$ на интервале $\alpha \in [0, r_*]$ построен с использованием формул (4.11), (4.12) и процедуры ParametricPlot из пакета Mathematica.

Значению $\alpha = 1$ соответствует расстояние между плитами равное диаметру оболочки. При этом давление в оболочке P равно начальному давлению P_0 . При $\alpha = 0$ плиты смыкаются, а давление P оказывается почти в 3 раза больше начального давления P_0 .

4.10. Устойчивость мембраны между слоями жидкости

Предположим, что невесомая мембрана разделяет две идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном сосуде. Над мембраной находится слой жидкости с удельным весом γ_2 высотой H . Жидкость под мембраной имеет удельный вес $\gamma_1 < \gamma_2$. Мембрана натянута усилием T и закреплена по линиям $x = \pm l$ (рис. 4.14).

Нагрузка на мембрану

$$q = \gamma_2 (H + w) - p_0 - \gamma_1 w,$$

где w — прогиб мембраны, p_0 — постоянная составляющая давления в нижней замкнутой части сосуда.

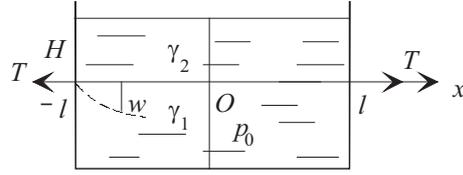


Рис. 4.14. Мембрана между слоями жидкости.

Уравнение цилиндрического изгиба и граничные условия имеют вид

$$Tw'' + q = 0, \quad w(-l) = w(l) = 0.$$

Подставив в уравнение выражение для q , получим

$$w'' + \alpha^2 w = \frac{-\gamma_2 H + p_0}{T}, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{T} > 0.$$

Подстановка общего решения

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - D, \quad D = \frac{\gamma_2 H - p_0}{\alpha^2 T}$$

в граничные условия приводит к системе уравнений

$$-A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = D, \quad A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = D,$$

из которой следует, что

$$A \sin \alpha l = 0, \quad B \cos \alpha l = D. \quad (4.13)$$

Условие сохранения объема $\int_{-l}^l w dx = 0$ дает равенства

$$-\frac{A}{\alpha} \cos \alpha x \Big|_{-l}^l + \frac{B}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_{-l}^l - 2lD = 0, \\ B \sin \alpha l = \alpha l D. \quad (4.14)$$

Система уравнений (4.13), (4.14) имеет тривиальное решение $A = B = D = 0$, соответствующее положению равновесия мембраны. При этом постоянная составляющая давления $p_0 = \gamma_2 H$. Будем искать нетривиальные решения, наличие которых обычно свидетельствует о потере устойчивости тривиального решения.

Предположим, что $A \neq 0$. Тогда из уравнений (4.13), (4.14) следует, что

$$\sin \alpha l = 0, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$B = D = 0, \quad p_0 = \gamma_2 H, \quad w_k = A \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

При

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \alpha_1^2 T = \frac{\pi^2 T}{l^2}$$

теряет устойчивость плоское состояние мембраны. Форма потери устойчивости $w_1 = A \sin(\pi x/l)$ представлена на рис. 4.15a. Она имеет

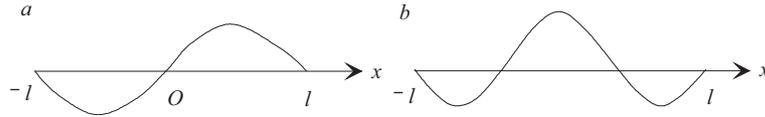


Рис. 4.15. Формы потери устойчивости.

две полуволны.

В случае $A = 0$ уравнения (4.13), (4.14) принимают вид

$$D = B \cos \alpha l, \quad B \sin \alpha l = \alpha l B \cos \alpha l.$$

Нетривиальному решению соответствует $B \neq 0$, поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l.$$

Наименьший положительный корень этого уравнения $\alpha_* \simeq 4.49/l$.

Нетривиальное решение $w_* = B(\cos \alpha_* x - \cos \alpha_* l)$ существует при

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \alpha_*^2 T$$

и имеет три полуволны (см. рис. 4.15b).

В большинстве задач о потере устойчивости упругих тел критической нагрузке соответствует форма потери устойчивости с наименьшим возможным числом полуволн. В рассматриваемой задаче $\alpha_1 < \alpha_*$ поэтому при постепенном увеличении разности $\gamma_2 - \gamma_1$ мембрана потеряет устойчивость по форме с двумя полуволнами. Форма потери устойчивости с одной полуволной в данной задаче невозможна, так как для нее не выполняется условие несжимаемости жидкости.

В случае $\gamma_1 \geq \gamma_2$ задача не имеет нетривиальных решений и потеря устойчивости плоского равновесия мембраны не происходит.

4.11. Равновесие пластины под тяжестью жидкости

Рассмотрим прямоугольный сосуд с абсолютно жесткими стенками, заполненный идеальной несжимаемой жидкостью. Дно сосуда представляет собой пластинку толщиной h . Уровни жидкости в сосуде с недеформированной и деформированной пластиной составляют H_0 и $H < H_0$ (рис. 4.16).

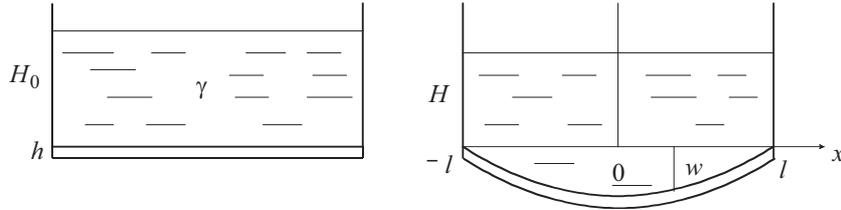


Рис. 4.16. Пластина под тяжестью жидкости.

Прогиб пластины удовлетворяет уравнению Софи Жермен:

$$D_p \Delta^2 w = q, \quad D_p = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Пренебрегая весом пластины, имеем

$$q = \gamma(H + w),$$

где γ — удельный вес жидкости.

Рассмотрим цилиндрический изгиб, когда $w = w(x)$. В этом случае уравнение принимает вид

$$D_p \frac{d^4 w}{dx^4} - \gamma w = \gamma H$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 w = \alpha^4 H, \quad \alpha^4 = \frac{\gamma}{D_p}.$$

Предположим, что края пластины заделаны:

$$w = w' = 0, \quad x = \pm l, \quad w' = \frac{dw}{dx}.$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть половину пластины, соответствующую $x \in [0, l]$. В точке $x = 0$ выполняются условия $w'(0) = w'''(0) = 0$, т. к. $w(x)$ — четная функция.

Однородное уравнение

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 w = 0,$$

совпадает с уравнением колебаний балки. Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$w = AS(\alpha x) + BT(\alpha x) + CU(\alpha x) + DV(\alpha x) - H,$$

где

$$S(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z + \cos z), \quad T(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z + \sin z),$$

$$U(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z - \cos z), \quad V(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z - \sin z)$$

балочные функции (см. раздел 1.5). Учитывая, что

$$w' = \alpha(AV + BS + CT + DU), \quad w''' = \alpha^3(AT + BU + CV + DS)$$

где $V = V(\alpha x)$, $S = S(\alpha x)$ и т. д. из условий $w'(0) = w'''(0) = 0$ получаем, что $B = D = 0$. Подстановка

$$w = AS + CU - H, \quad w' = \alpha(AV + CT)$$

в граничные условия $w(l) = w'(l) = 0$ дает систему уравнений

$$AS_l + CU_l = H, \quad AV_l + CT_l = 0,$$

где $S_l = S(\alpha l)$, $U_l = U(\alpha l)$ и т. д., которая имеет решение

$$A = \frac{HT_l}{\Delta}, \quad C = -\frac{HV_l}{\Delta}, \quad \Delta = S_l T_l - U_l V_l,$$

Следовательно,

$$w = \frac{H}{\Delta}(T_l S - V_l U) - H.$$

Из условия сохранения объема жидкости следует, что при $H > 0$

$$Hl + \int_0^l w dx = lH_0,$$

После подстановки выражения для w в последнее равенство, оно принимает вид

$$\frac{H}{\Delta} \int_0^l (T_1 S - V_1 U) dx = l H_0.$$

Учитывая, что $S = dT/dz$, $U = dV/dz$, получаем

$$\int_0^l S(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} T_l, \quad \int_0^l U(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} V_l, \quad H = \frac{\alpha l H_0 \Delta}{T_l^2 - V_l^2}.$$

Условие $H \geq 0$ выполняется, если

$$\frac{\Delta}{T_l^2 - V_l^2} \geq 0.$$

Неравенство

$$T_l^2 - V_l^2 = \text{sh } \alpha l \sin \alpha l \geq 0$$

имеет место при $\alpha l \leq \pi$. Неравенство

$$\Delta = \frac{1}{2}(\text{ch } \alpha l \sin \alpha l + \text{sh } \alpha l \cos \alpha l) \geq 0$$

эквивалентно неравенству

$$f(z) = \text{ch } z \sin z + \text{sh } z \cos z \geq 0, \quad z = \alpha l.$$

Ввиду того, что

$$f(0) = 0, \quad f'(z) = 2 \text{ch } z \cos z > 0 \quad \text{при } 0 < z < \frac{\pi}{2},$$

функция $f(z)$ положительна при $0 < z < \pi/2$. Учитывая, что $f(\pi) = -\text{sh } \pi < 0$, делаем вывод, что $f(z)$ имеет корень $z_* \in (\pi/2, \pi)$. Используя численный метод, получаем, что $z_* \simeq 2.35$.

Следовательно,

$$H = \frac{z(\text{ch } z \sin z + \text{sh } z \cos z)}{2 \text{sh } z \sin z} H_0 \geq 0, \quad \text{при } 0 < z \leq z_*,$$

причем $H(z_*) = 0$. Если $\alpha = z_*/l$, то при любом значении H_0 вся жидкость оказывается в полости, образовавшейся за счет деформации пластины. Как и в случае мембраны, значение H_0 не должно

быть слишком велико, так как при использовании линейных уравнений предполагается, что $w \ll l$.

При $\alpha > z_*/l$ полученное решение не годится, так как поверхность пластины будет только частично покрыта жидкостью.

Отметим, что

$$H \rightarrow H_0 \quad \text{при} \quad \alpha l \rightarrow 0.$$

Этот результат соответствует физическому смыслу задачи, так как $\alpha = (\gamma/D)^{1/4}$ уменьшается с увеличением жесткости пластины D , а для абсолютно жесткой пластины $H = H_0$.

4.12. Изгиб балки на поверхности жидкости

Рассмотрим балку длиной $2l$ с прямоугольным поперечным сечением шириной a и высотой b , которая находится в равновесии на поверхности неограниченно простирающейся идеальной неподвижной жидкости (рис. 4.17). Предполагается, что удельный вес материала

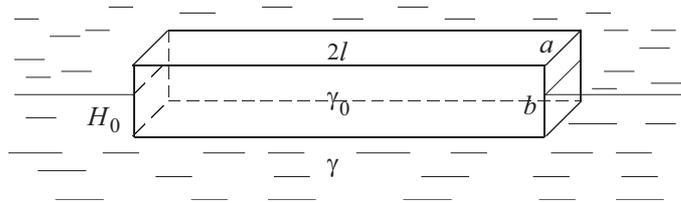


Рис. 4.17. Балка в положении равновесия.

балки γ_0 меньше удельного веса жидкости γ .

Глубина погружения балки в жидкости H_0 определяется из уравнения равновесия

$$P_0 = 2abl\gamma_0 = F_a = 2aH_0l\gamma,$$

где P_0 — вес балки, F_a — сила Архимеда. Следовательно,

$$H_0 = b\gamma_0/\gamma < b.$$

Предположим, что к середине балки приложена вертикальная сила P . Если считать балку абсолютно твердой, то глубина ее погружения определяется из уравнения

$$P + 2abl\gamma_0 = 2aHl\gamma$$

и оказывается равной

$$H = H_0 + w_0, \quad w_0 = \frac{P}{2al\gamma}.$$

Балка не утонет, если $H < b$. При $H = b$ получаем минимальное значение P_m силы P , при котором балка утонет:

$$P_m = 2abl(\gamma - \gamma_0).$$

Для деревянного бруса с параметрами $\gamma_0 = 0.6 \text{ г/см}^3$, $l = 5 \cdot 10^2 \text{ см}$, $a = 20 \text{ см}$, $b = 10 \text{ см}$, плавающего в воде с удельным весом $\gamma = 1 \text{ г/см}^3$, получаем $H_0 = 6 \text{ см}$, $P_m = 0.4 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 10^3 = 80 \cdot 10^3 \text{ г} = 80 \text{ кг}$. При $P = 50 \text{ кг}$

$$w_0 = 2.5 \text{ см}, \quad H = 8.5 \text{ см}.$$

Рассмотренная задача является задачей гидростатики. Найдем решение задачи гидроупругости, принимая во внимание изгиб балки. Выберем начало координат O на левом конце балки и направим ось Ox по прямой, параллельной оси недеформированной балки и находящейся на расстоянии H_0 от поверхности воды. Обозначим $w(x)$ вертикальное смещение точек балки от положения равновесия (см. рис. 4.17). На рис. 4.18 изображено сечение балки, изогнутой под действием силы P , приложенной к ее центру.

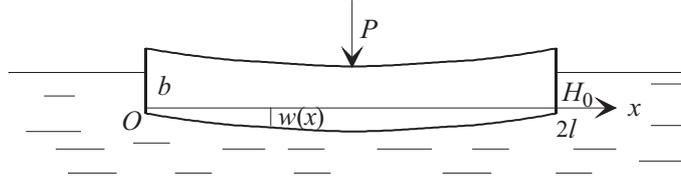


Рис. 4.18. Сечение изогнутой балки.

Предположим, что $w + H_0 < b$. В противном случае верхняя часть балки будет частично или полностью покрыта жидкостью. При сделанном предположении функция $w(x)$ будет удовлетворять уравнению изгиба балки

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q, \quad q = -\gamma a(w + H_0) + \gamma_0 ab = -\gamma aw,$$

где E — модуль Юнга, $J = ab^3/12$ — момент инерции поперечного сечения. Распределенная нагрузка q возникает в результате действия на балку давления жидкости и ее собственного веса.

Уравнение изгиба балки запишем в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0, \quad 4\beta^4 = \frac{\gamma a}{EJ} \quad (4.15)$$

На концах балки $x = 0$ и $x = 2l$ выполняются граничные условия свободного края $w'' = w''' = 0$. В сечении $x = l$ сумма силы P и перерезывающей силы $Q = EJw'''$ равна нулю. В силу симметрии задачи достаточно найти решение при $x \in [0, l]$, удовлетворяющее граничным условиям

$$w''(0) = w'''(0) = 0, \quad w'(l) = 0, \quad EJw'''(l) + \frac{P}{2} = 0.$$

Обозначим $\alpha = (1 + i)\beta$. Тогда $\alpha^2 = 2i\beta^2$, $\alpha^4 = -4\beta^4$ и уравнение (4.15) превращается в уравнение колебаний балки:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 w = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w(x) = AS + BT + CV + DU,$$

где $S = S(\alpha x)$, $T = T(\alpha x)$, $V = V(\alpha x)$, $U = U(\alpha x)$ — балочные функции, введенные в разделе 1.5. По правилам дифференцирования этих функций получаем

$$\begin{aligned} w' &= \alpha(AV + BS + CU + DT), \\ w'' &= \alpha^2(AU + BV + CT + DS), \\ w''' &= \alpha^3(AT + BU + CS + DV). \end{aligned}$$

Из граничных условий при $x = 0$ вытекает, что $C = D = 0$. Два других граничных условия дают систему уравнений для определения A и B :

$$AV_l + BS_l = 0, \quad \alpha^3(AT_l + BU_l) = -F, \quad F = \frac{P}{2EJ},$$

где $V_l = V(\alpha l)$, $S_l = S(\alpha l)$ и т. д. Решение этой системы имеет вид

$$A = \frac{FS_l}{\alpha^3 \Delta}, \quad B = -\frac{FV_l}{\alpha^3 \Delta}, \quad \Delta = U_l V_l - S_l T_l.$$

Следовательно,

$$w = \frac{F}{\alpha^3 \Delta} (S_l S - V_l T). \quad (4.16)$$

4.13. Вещественное решение для плавающей балки

Мы нашли решение в комплексном виде, но при расчетах удобнее использовать вещественное решение. Кроме того, необходимо доказать, что $\alpha^3 \Delta \neq 0$. Выведем формулы, которые понадобятся для перехода от решения (4.16) к решению в вещественном виде. Использование формулы Эйлера дает

$$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z.$$

Аналогичным способом находим

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z.$$

Введем обозначение $z = \beta x$. Учитывая, что

$$\alpha = (1 + i)\beta, \quad \alpha x = \beta x + i\beta x = z + iz,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sin \alpha x &= \sin(z + iz) = \sin z \operatorname{ch} z + i \operatorname{sh} z \cos z, \\ \operatorname{sh} \alpha x &= \operatorname{sh}(z + iz) = \operatorname{sh} z \cos z + i \sin z \operatorname{ch} z, \\ \cos \alpha x &= \cos(z + iz) = \cos z \operatorname{ch} z - i \operatorname{sh} z \sin z, \\ \operatorname{ch} \alpha x &= \operatorname{ch}(z + iz) = \operatorname{ch} z \cos z + i \operatorname{sh} z \sin z. \end{aligned}$$

Выражения для балочных функций имеют вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x) = \operatorname{ch} z \cos z \equiv Y_1(z), \\ T &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{i+1}{2}Y_2(z), \quad Y_2(z) = \operatorname{ch} z \sin z + \operatorname{sh} z \cos z, \\ U &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x) = iY_3(z), \quad Y_3(z) = \operatorname{sh} z \sin z, \\ V &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x) = \frac{i-1}{2}Y_4(z), \quad Y_4(z) = \operatorname{ch} z \sin z - \operatorname{sh} z \cos z. \end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что

$$S_l = Y_1(\beta l) = Y_{1l}, \quad T_l = (i+1)Y_{2l}/2, \quad U_l = iY_{3l}, \quad V_l = (i-1)Y_{4l}/2.$$

Найдем выражение для знаменателя дроби в правой части формулы (4.16):

$$\alpha^3 \Delta = (i+1)^3 \beta^3 \left[\frac{i(i-1)}{2} Y_{3l} Y_{4l} - \frac{i+1}{2} Y_{1l} Y_{2l} \right] = 2\beta^3 (Y_{1l} Y_{2l} + Y_{3l} Y_{4l}).$$

Учитывая, что

$$Y_{1l} Y_{2l} + Y_{3l} Y_{4l} = \sin \beta l \cos \beta l + \operatorname{sh} \beta l \operatorname{ch} \beta l,$$

получаем

$$\alpha^3 \Delta = \beta^3 (\operatorname{sh} 2\beta l + \sin 2\beta l) > 0,$$

так как $\beta > 0$ и $\operatorname{sh} 2\beta l + \sin 2\beta l > 0$. Последнее неравенство выполняется ввиду того, что $\operatorname{sh} x + \sin x > 0$ при $0 < x \leq \pi$, и $\operatorname{sh} x > \operatorname{sh} \pi > 1$ при $x > \pi$.

Ввиду того, что

$$TV_l = \frac{i-1}{2} \frac{i+1}{2} Y_2(z) Y_{4l} = -\frac{1}{2} Y_2(\beta x) Y_4(\beta l),$$

из формулы (4.16) следует, что

$$w = \frac{F[2Y_1(\beta x)Y_1(\beta l) + Y_2(\beta x)Y_4(\beta l)]}{2\beta^3(\operatorname{sh} 2\beta l + \sin 2\beta l)}, \quad F = \frac{P}{2EJ}.$$

Рассмотрим балку и жидкость с такими же параметрами, как в задаче гидростатики. Для соснового бруса с модулем Юнга $E = 10^8$ г/см² при действии на него силы $P = 50$ кг расчеты дают $w(0) = 1.4$ см, $w(l) = 3.3$ см. Условие $w(x) < b - H_0 = 4$ см выполняется, так как $w(x) < w(l) = 3.3$ см. Если прогиб балки не учитывать, то $w(0) = w(l) = w_0 = 2.5$ см.

4.14. Мягкая емкость для перевозки жидкости

Еще в далекой древности из козьих шкур изготавливались бурдюки для перевозки вина. В настоящее время мягкие емкости для хранения и перевозки жидкостей стали очень популярны в связи с появлением полимерных материалов. Легкие и прочные мягкие резервуары используются для транспортировки различных жидкостей на платформах, в кузовах автомобилей, в железнодорожных вагонах, а также с помощью вертолетов. Плавающие эластичные резервуары применяются для сбора загрязнений с поверхности воды при разливах нефти. Производятся также мягкие канистры для воды и бензина.

Рассмотрим плоскую деформацию мягкой цилиндрической оболочки, наполненной идеальной несжимаемой жидкостью и лежащей на абсолютно жесткой неподвижной горизонтальной плоскости. Выберем начало координат в верхней точке параллели и направим ось Ox параллельно плоскости, а ось Oz — по нормали к плоскости (рис. 4.19).

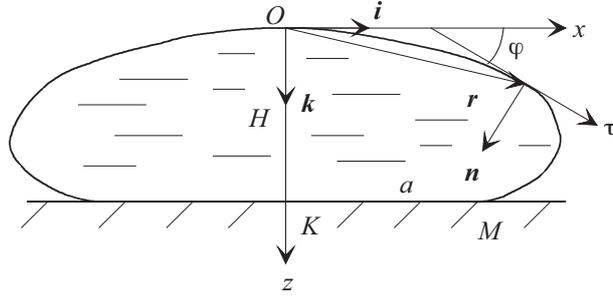


Рис. 4.19. Мягкая емкость.

При решении задачи мы будем учитывать как постоянную составляющую давления p_0 , так и удельный вес жидкости γ . В этом случае уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{d}{ds}(T\boldsymbol{\tau}) = (p_0 + \gamma z)\mathbf{n}.$$

Умножив это уравнение скалярно на $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} (см. раздел 4.8), получим

$$T = T_0, \quad T_0/R = \varkappa T_0 = p_0 + \gamma z,$$

где R и \varkappa — радиус кривизны и кривизна параллели.

Проектирование формулы для единичного вектора касательной к параллели

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

на орты \mathbf{i} и \mathbf{k} дает равенства

$$\frac{dx}{ds} = \mathbf{i}\boldsymbol{\tau} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \mathbf{k}\boldsymbol{\tau} = \sin \varphi, \quad (4.17)$$

где φ — угол между \mathbf{i} и $\boldsymbol{\tau}$ (см. рис. 4.19).

Продифференцируем по s вектор $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k} = -\mathbf{i} \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \mathbf{k} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{n} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Учитывая, что с другой стороны $d\boldsymbol{\tau}/ds = \mathbf{n}\varkappa$, получим формулу

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{p_0 + \gamma z}{T_0}. \quad (4.18)$$

Запишем уравнения (4.17) и (4.18), описывающие деформацию параллели оболочки в следующем виде:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{p_0 + \gamma z}{T_0}. \quad (4.19)$$

Три уравнения (4.19) содержат три неизвестных функции: $x(s)$, $z(s)$, $\varphi(s)$ и неизвестную константу T_0 . Величину p_0 считаем известной.

В силу симметрии задачи относительно оси Oz рассмотрим правую часть оболочки. Обозначим l длину дуги OM , a — размер области контакта (длину отрезка KM на рис. 4.19). Предположим, что параллель оболочки нерастяжима, причем длина половины параллели L является заданной величиной. К системе уравнений (4.19) добавим соотношение $a + l = L$.

Решение системы (4.19) должно удовлетворять граничным условиям

$$x(0) = z(0) = \varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \pi. \quad (4.20)$$

Если $\varphi(l) \neq \pi$, то параллель оболочки имеет излом в точке M , а этого не может быть из-за отсутствия в этой точке сосредоточенной силы. Отметим, что $x(l) = a$, $z(l) = H$, где H — высота оболочки.

Рассмотрим два частных случая. При $p_0 = 0$ система уравнений

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \alpha^2 z, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T_0}$$

с граничными условиями (4.20) имеет решение $x = s$, $z = 0$, $\varphi = 0$ при $s \in [0, l]$ и $x = L - s$, $z = 0$, $\varphi = \pi$ при $s \in [l, L]$. Это решение соответствует сложенной в два раза параллели и отсутствию жидкости внутри оболочки. Для него

$$a = x(l) = l, \quad H = z(l) = 0, \quad a + l = 2l = L, \quad l = L/2.$$

Функция $\varphi(s)$ имеет разрыв первого рода в точке $s = l$, поэтому $d\varphi/ds = \alpha^2 z = \infty$ при $s = l$ и $T_0 = 0$.

Если весом жидкости пренебречь, то третье уравнение системы (4.19) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varkappa_0 = 1/R_0, \quad \varkappa_0 = \frac{p_0}{T_0}.$$

В этом случае радиус кривизны R является постоянной величиной. Принимая во внимание граничные условия (4.20), получаем

$$\varphi = \frac{s}{R_0}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi, \quad x = R_0 \sin \varphi, \quad z = R_0(1 - \cos \varphi).$$

Ввиду того, что

$$x^2 + (z - R_0)^2 = R_0^2,$$

форма параллели является окружностью радиуса R_0 . Из последнего условия (4.20) вытекает, что $l = \pi R_0$, поэтому

$$a = x(l) = 0, \quad L = l, \quad H = z(l) = 2R_0. \quad (4.21)$$

В общем случае система уравнений (4.19) не имеет аналитического решения. При численном ее интегрировании мы задаем начальные условия

$$x(0) = z(0) = \varphi(0) = 0$$

и интегрируем уравнения (4.19) на интервале $[0, l]$. Величины L и \varkappa_0 будем считать заданными, а величины α и l — искомыми. Решение уравнений (4.19) должно удовлетворять условиям

$$l + a = l + x(\alpha, l) = L, \quad \varphi(\alpha, l) = \pi,$$

которые представляют собой систему уравнений для определения α и l . Решение этой системы можно найти методом Ньютона. Для $L = 2$ численные результаты приведены в первых четырех столбцах таблицы 4.1.

Т а б л и ц а 4.1

| \varkappa_0 | H | a | α | \tilde{H} | \tilde{a} | \tilde{S} | \tilde{b} |
|---------------|------|------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.0 | 0.0 | 1.0 | ∞ | 0 | 1.0 | 0 | 1.0 |
| 0.01 | 0.26 | 0.87 | 7.7 | 0.26 | 0.87 | 0.23 | 0.94 |
| 0.1 | 0.40 | 0.81 | 5.0 | 0.40 | 0.80 | 0.32 | 0.91 |
| 0.4 | 0.59 | 0.68 | 3.2 | 0.62 | 0.69 | 0.43 | 0.86 |
| 0.8 | 0.79 | 0.53 | 2.1 | 0.95 | 0.52 | | |
| 1.0 | 0.91 | 0.45 | 1.63 | | | | |
| 1.57 | 1.27 | 0 | 0 | | | 0.64 | 0.64 |

При увеличении \varkappa_0 высота оболочки H увеличивается, а размер области контакта a уменьшается. Результаты в последней строке таблицы найдены по формулам (4.21). Остальные результаты в таблице 4.1 получены по приближенным формулам, которые выведены в следующем параграфе.

4.15. Приближенное решение для мягкой емкости

В общем случае мы не можем полностью решить задачу аналитически, однако существование интеграла системы уравнений (4.19) позволяет найти формулы связи между параметрами оболочки.

Дифференцирование по φ равенства

$$\varkappa = \frac{p_0 + \gamma z}{T_0} = \varkappa_0 + \alpha^2 z$$

дает формулы

$$\frac{d\varkappa}{d\varphi} = \alpha^2 \frac{dz}{d\varphi} = \alpha^2 \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\alpha^2}{\varkappa} \sin \varphi, \quad \varkappa \frac{d\varkappa}{d\varphi} = \alpha^2 \sin \varphi.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем интеграл

$$\frac{\varkappa^2}{2} = -\alpha^2 \cos \varphi + C.$$

Учитывая, что $z = 0$, $\varkappa = \varkappa_0$ при $\varphi = 0$, находим $C = \varkappa_0^2/2 + \alpha^2$. Следовательно

$$\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + 2\alpha^2(1 - \cos \varphi), \quad z = \frac{\varkappa - \varkappa_0}{\alpha^2}, \quad H = z(\pi) = \frac{\sqrt{\varkappa_0^2 + 4\alpha^2} - \varkappa_0}{\alpha^2}.$$

Последнюю формулу можно использовать для проверки численных результатов.

Если $\varkappa_0 \ll \alpha$, то

$$H \simeq \tilde{H} = \frac{2}{\alpha} = 2\sqrt{\frac{T_0}{\gamma}}. \quad (4.22)$$

Значения \tilde{H} , полученные по формуле (4.22) и вычисленные для найденных численным методом значений α , приведены в пятом столбце таблицы из раздела 4.13. При $\varkappa_0 \leq 0.4$ приближенная формула дает удовлетворительные результаты, однако сама по себе эта формула не позволяет найти H , так α в ней является неизвестной величиной. Тем не менее, формула (4.22) может быть полезной. Измерив высоту оболочки H , с помощью этой формулы можно оценить величину растягивающего усилия T_0 .

Выведем приближенную формулу для определения области контакта a в случае $\varkappa_0 \ll \alpha$. Пренебрегая малыми слагаемыми, получим приближенные равенства

$$\varkappa^2 = 2\alpha^2(1 - \cos \varphi) = 4\alpha^2 \sin^2 \theta, \quad \theta = \frac{\varphi}{2},$$

$$\varkappa = 2\alpha \sin \theta, \quad z = \frac{\varkappa}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \sin \theta = \tilde{H} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ввиду того, что

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds} = 2 \frac{d\theta}{ds}$$

из полученных формул вытекают равенства

$$2 \frac{d\theta}{ds} = 2\alpha \sin \theta = \frac{4}{\tilde{H}} \sin \theta, \quad ds = \frac{\tilde{H} d\theta}{2 \sin \theta}.$$

Принимая во внимание, что $dx = \cos \varphi ds = \cos 2\theta ds$, имеем

$$ds - dx = ds(1 - \cos 2\theta) = 2ds \sin^2 \theta = \tilde{H} \sin \theta d\theta.$$

Интегрирование последнего равенства по θ в пределах от 0 до $\pi/2$ дает

$$l - \tilde{a} = \tilde{H},$$

где \tilde{a} приближенное значение величины a . С помощью формулы $l = L - a$ можно выразить \tilde{a} через L и H :

$$L - 2\tilde{a} = \tilde{H}, \quad \tilde{a} = \frac{L - \tilde{H}}{2}.$$

Из полученного выражения для \tilde{a} следует, что

$$\tilde{l} = L - \tilde{a} = \frac{L + \tilde{H}}{2}.$$

Значения \tilde{a} приведены в шестом столбце таблицы.

Найдем приближенное выражение для площади S фигуры, ограниченной параллелью оболочки и осью Oz . Площадь S определяет количество жидкости в рассматриваемой емкости. Пусть N точка параллели, наиболее удаленная от оси Oz . Опустим из точек M и N перпендикуляры на ось Ox . Площади образовавшихся при этом плоских фигур обозначим S_0 , S_1 , S_2 и S_3 (см. рис. 4.20).

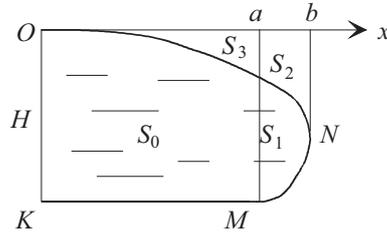


Рис. 4.20. Площади плоских фигур.

Искомая площадь $S = S_0 + S_1$. Имеют место формулы

$$S_3 + S_2 = \int_0^{\pi/2} z dx, \quad S_2 + S_1 = - \int_{\pi/2}^{\pi} z dx,$$

При условии $\varkappa_0 \ll \alpha$

$$z \simeq \frac{2}{\alpha} \sin \theta = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad dx = \cos \varphi ds = \frac{\cos \varphi}{\varkappa} d\varphi, \quad \varkappa \simeq 2\alpha \sin \frac{\varphi}{2},$$

Следовательно,

$$z dx \simeq \frac{1}{\alpha^2} \cos \varphi d\varphi.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = 1,$$

получаем приближенные равенства

$$S_3 + S_2 = S_2 + S_1 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad S_1 = S_3,$$

из которых вытекает, что $S = S_0 + S_1 \simeq S_0 + S_3 = \tilde{a}\tilde{H}$. Таким образом, приближенное значение \tilde{S} площади S определяется по формуле

$$\tilde{S} = \tilde{a}\tilde{H}.$$

Значения \tilde{S} для $\varkappa_0 \leq 0.4$ приведены в седьмом столбце таблицы.

В наиболее удаленной от оси Oz точки N угол $\theta = \pi/4$. В предположении $\varkappa_0 \ll \alpha$ ордината этой точки приближенно равна

$$\tilde{H} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\tilde{H}\sqrt{2}}{2}.$$

Найдем приближенное значение \tilde{b} абсциссы b этой точки. Ширина оболочки равна $2b$.

Проинтегрировав от 0 до $\pi/4$ равенство $ds - dx = \tilde{H} \sin \theta d\theta$, получим

$$l_1 - \tilde{b} = (1 - \sqrt{2}/2)\tilde{H} = 0.29\tilde{H},$$

где l_1 — длина дуги ON . Ввиду того, что

$$ds = \frac{d\varphi}{\varkappa} = \frac{2d\theta}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{4}{\tilde{H}} \sin \theta,$$

длина l_2 дуги NM равна

$$l_2 = \frac{\tilde{H}}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{\tilde{H}}{2} \ln[\operatorname{tg}(\theta/2)]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\tilde{H}}{2} \ln[\operatorname{tg}(\pi/8)] = 0.44\tilde{H}.$$

Учитывая, что

$$l_1 + l_2 = l = \frac{L + \tilde{H}}{2},$$

получаем

$$\tilde{b} = l - l_2 - 0.29\tilde{H} = L/2 + 0.5\tilde{H} - 0.44\tilde{H} - 0.29\tilde{H} = L/2 - 0.23\tilde{H}.$$

Значения \tilde{b} для $\varkappa_0 \leq 0.4$ содержатся в последнем столбце таблицы. Измерив высоту оболочки, мы можем с помощью простых приближенных формул найти силу натяжения, область контакта, объем жидкости и ширину оболочки.

4.16. Изгиб вертикальной мембраны, соприкасающейся с жидкостью

Предположим, что одна из стенок прямоугольного сосуда высотой L представляет собой мембрану, а дно и три другие стенки являются абсолютно жесткими. В недеформированном состоянии мембрана является плоской, а сосуд целиком заполнен идеальной нежимаемой жидкостью (рис. 4.21а). Из-за прогиба мембраны w уровень жидкости в сосуде уменьшается до величины H (рис. 4.3б). Выберем начало координат O на дне сосуда, а ось Ox направим вертикально вверх. Тогда цилиндрический прогиб мембраны удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} T \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \gamma(H - x) &= 0, & 0 \leq x \leq H, \\ T \frac{d^2 w_2}{dx^2} &= 0, & H \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (4.23)$$

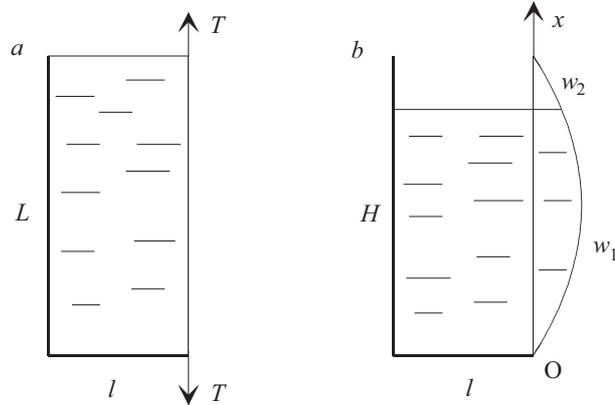


Рис. 4.21. Полость с деформируемой стенкой, заполненная жидкостью.

где T — растягивающее усилие в мембране, γ — удельный вес жидкости. После введения обозначений $w' = dw/dx$, $6\alpha^2 = \gamma/T$ уравнения (4.23) примут вид

$$w_1'' + 6\alpha^2(H - x) = 0, \quad w_2'' = 0. \quad (4.24)$$

Решения этих уравнений

$$w_1 = A_1x + B_1 + \alpha^2(x^3 - 3x^2H), \quad w_2 = A_2x + B_2 \quad (4.25)$$

содержат произвольные постоянные A_1 , B_1 , A_2 и B_2 , которые находятся после подстановки (4.24) в граничные условия и условия непрерывности

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(L) = 0, \quad w_1(H) = w_2(H), \quad w_1'(H) = w_2'(H).$$

Принимая во внимание, что

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -A_2L, \quad A_1 = \frac{\alpha^2 H^2 (3L - H)}{L}, \quad A_2 = -\frac{\alpha^2 H^3}{L},$$

находим

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\alpha^2 H^2 (3L - H)x}{L} + \alpha^2(x^3 - 3x^2H), \quad 0 \leq x \leq H, \\ w_2 &= \frac{\alpha^2 H^3}{L}(L - x), \quad H \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (4.26)$$

Из условия несжимаемости жидкости вытекает равенство

$$Hl + \int_0^H w_1 dx = Ll.$$

Подставив в него выражение (4.26) для w_1 , получим уравнение для определения H :

$$4Hl + 3\alpha^2 H^4 l - 2\alpha^2 H^5 = 4L^2 l. \quad (4.27)$$

Выберем L за единицу длины. Тогда величины x , w_1 , w_2 , H , l и α^2 станут безразменными, причем

$$\alpha^2 = \frac{\gamma L^2}{6T},$$

а формулы (4.26) и (4.27) примут вид

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha^2 [H^2(3-H)x + x^3 - 3x^2H], & 0 \leq x \leq H, \\ w_2 &= \alpha^2 H^3(1-x), & H \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$4Hl + \alpha^2 H^4(3-2H) = 4l. \quad (4.29)$$

Уравнения линейной теории (4.23) справедливы, если малы перемещения w_1 и w_2 . Следовательно, полученные формулы справедливы, если α^2 — малый параметр.

После деления на l уравнения (4.29) получим

$$4H + \varepsilon H^4(3-2H) = 4. \quad (4.30)$$

где $\varepsilon = \alpha^2/l$ тоже является малым параметром.

При $\varepsilon = 0$ уравнения (4.30) имеет корень $H = 1$, поэтому его решение ищем в виде

$$H = 1 + a\varepsilon.$$

После подстановки этого решения в уравнение и приравнивания нулю коэффициента при ε находим $a = -1/4$. Во второй строке таблицы 4.2 для различных значений ε приведены приближенные значения H , полученные по формуле

$$H = 1 - \varepsilon/4.$$

В третьей строке даны для сравнения значения H , найденные путем численного решения уравнения (4.30). При $\varepsilon \leq 0.5$ погрешность приближенной формулы не превосходит 3%.

Т а б л и ц а 4.2

| ε | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| приближенные значения H | 0.975 | 0.950 | 0.925 | 0.900 | 0.875 |
| численные значения H | 0.976 | 0.955 | 0.935 | 0.917 | 0.901 |

ЛИТЕРАТУРА

Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. Казань, 1994.

Оглавление

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 4 | Статические задачи гидроупругости | 1 |
| 4.1. | Равновесие вертикального стержня в жидкости | 1 |
| 4.2. | Устойчивость горизонтального стержня в жидкости . . . | 3 |
| 4.3. | Устойчивость вертикального стержня в жидкости | 6 |
| 4.4. | Равновесие мембраны под тяжестью жидкостью | 9 |
| 4.5. | Равновесие мембраны частично заполненной жидкостью | 11 |
| 4.6. | Равновесие круглой мембраны под действием гидро- статической нагрузки | 13 |
| 4.7. | Жидкость в сосуде, закрытом мембраной | 15 |
| 4.8. | Простейшая модель хрусталика глаза | 19 |
| 4.9. | Сжатие мягкой цилиндрической оболочки между дву- мя плитами | 23 |
| 4.10. | Устойчивость мембраны между слоями жидкости | 27 |
| 4.11. | Равновесие пластины под тяжестью жидкости | 30 |
| 4.12. | Изгиб балки на поверхности жидкости | 33 |
| 4.13. | Вещественное решение для плавающей балки | 36 |
| 4.14. | Мягкая емкость для перевозки жидкости | 37 |
| 4.15. | Приближенное решение для мягкой емкости | 41 |
| 4.16. | Изгиб вертикальной мембраны, соприкасающейся с жид- костью | 44 |