Механикой ... называется наука, посвящённая решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия ... материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами.

С.М. Тарг.

Многие современные математические теории возникли из проблем механики и лишь впоследствии приняли тот аксиоматически-абстрактный вид, который так затрудняет их изучение.

В.И. Арнольд, один из крупнейших математиков XX века.

http://www.math.spbu.ru/tm
Курсы лекций
Курс лекций по теоретической механике

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов С.Б.* Кинематика. Изд. СПбГУ, 2001.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Т. 1. М., 1965.
3. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. Л., 1985.

Глава 1

Кинематика точки

В кинематике изучаются способы задания движения материальных тел и основные характеристики их движения. Прежде чем описывать движение тела, необходимо рассмотреть движение точки, так как движение тела считается известным, если задано движение любой его точки. Отметим также, что в некоторых случаях тела можно рассматривать как точки, пренебрегая их размерами.

1.1. Координатно-векторный способ задания движения точки

Рассмотрим неподвижную систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ (рис. 1.1). Положение точки M относительно этой системы определяется вектором $\mathbf{r}$

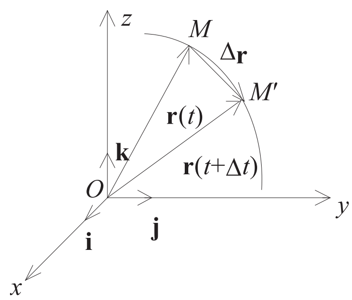

Рис. 1.1. Система координат.

Если точка движется, то вектор $\mathbf{r}$ является функцией времени

t. Вектор $\mathbf{r}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, параллельные осям координат (координатные орты). В математике величины x, y, z обычно называют координатами вектора. В механике принято называть x, y, z компонентами вектора $\mathbf{r}$ и координатами точки M. В прямоугольной декартовой системе координат компоненты вектора совпадают с его проекциями на направления ортов.

Три функции времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ полностью описывают движения точки в пространстве. Эти функции задают пространственную кривую, которую называют *траекторией* движения точки.

Для скалярного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем использовать обозначение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\alpha$, где $a = |\mathbf{a}|$ и $b = |\mathbf{b}|$ — длины векторов, α — угол между ними. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, если $\alpha = \pi/2$. В этом случае $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Так, например, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$. Для квадрата длины вектора $\mathbf{a}$ имеет место формула $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. В частности $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Учитывая, что орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единичные ортогональные векторы, получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Скалярное произведение можно записать в виде матричного произведения строки на столбец:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ — векторы столбцы, а символом T обозначена операция транспонирования.

Длина вектора $\mathbf{r}$, равная расстоянию от начала координат до точки M, выражается через его компоненты по формуле

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Средней скоростью точки за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ называется отношение
$$\mathbf{v}_{cp}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$
где
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t).$$
Скорость точки $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t определяется по формуле
$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{cp}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$
В дальнейшем этот предел будем называть производной от вектора $\mathbf{r}$ по переменной t и использовать для него следующие обозначения:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$
Таким образом, скорость $\mathbf{v}$ есть первая производная от вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени:
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Будем считать, что все рассматриваемые здесь и далее производные существуют и являются непрерывными функциями.

Ввиду того что при $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta \mathbf{r}$ стремится к направлению касательной к траектории, вектор скорости направлен по касательной к траектории.

Скорость можно разложить по векторам базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:
$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$
Система координат неподвижна, поэтому орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ не меняются при изменении t. Продифференцируем по времени равенство (1.1). Принимая во внимание, что
$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}, \quad \frac{d}{dt}(x\mathbf{j}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{j}, \quad \frac{d}{dt}(x\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{k},$$
получим
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

Из сравнения двух формул для скорости $\mathbf{v}$ следует, что
$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Величина скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Кривая, которую описывает конец вектора $\mathbf{v}$ при изменении t, называется *годографом скорости.*

Ускорением точки называется вектор

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Его разложение по векторам базиса имеет вид

$$\mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k},$$

где

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Величина ускорения

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Если движение точки происходит в плоскости, то разумно выбрать начало координат на этой плоскости, а ось Oz направить перпендикулярно плоскости. Тогда во все время движения $z = 0$, и положение точки определяется заданием двух функций: $x(t)$ и $y(t)$. Скорость и ускорение будут лежать в плоскости движения, так как $v_z = \dot{z} = 0$, $w_z = \ddot{z} = 0$.

В случае движения точки по прямой следует выбрать эту прямую за одну из осей координат, например за ось Ox. Тогда при всех t имеют место равенства $y = z = 0$. Скорость и ускорение направлены по оси Ox.

Пример

Рассмотрим движение точки по закону:

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = ht,$$

где a, ω, h — положительные вещественные числа.

Начнем с определения траектории точки. Имеет место равенство

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это означает, что во все время движения проекция точки на плоскость $z = 0$ лежит на окружности радиуса a с центром в начале координат, т. е. точка движется по поверхности цилиндра, изображенного на рис. 1.2. Если $h = 0$, то точка будет двигаться по окружности, лежащей в плоскости $z = 0$. При $h > 0$ к движению по окружности добавляется движение в направлении оси Oz, и точка описывает *винтовую линию* (рис. 1.2).

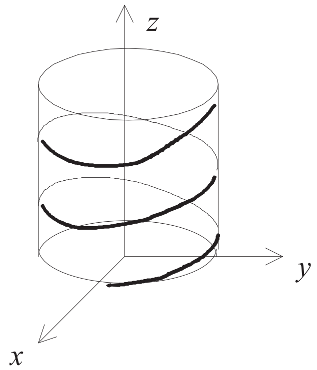

Рис. 1.2. Винтовая линия.

Проекции скорости и ускорения на оси координат имеют вид

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = a\omega \cos \omega t, \quad \dot{z} = h;$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad \ddot{z} = 0.$$

Величины скорости и ускорения

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + h^2}, \quad w = a\omega^2$$

не зависят от времени.

1.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения точки должны быть заданы ее траектория и закон движения.

Координаты точек пространственной кривой являются решениями системы уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

каждое из которых задает поверхность в пространстве. Траектория будет известна, если заданы функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$.

Возможен и параметрический способ задания траектории, при котором координаты ее точек представляют собой значения некоторых функций параметра α:

$$x = f_1(\alpha), \quad y = f_2(\alpha), \quad z = f_3(\alpha).$$

На траектории выбирается начало отсчета — точка O' и положительное направление отсчета. Закон движения точки M определяется функцией времени $s(t)$, где s — длина дуги кривой $O'M$, которая берется со знаком плюс или минус в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении происходит движение из точки O' в точку M (рис. 1.3).

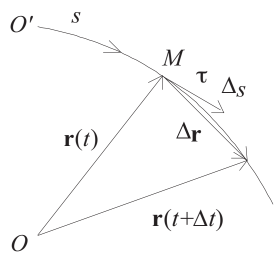

Рис. 1.3. Траектория движения точки.

Найдем величину и направление скорости точки

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}, \quad v_\tau = \dot{s}.$$

Тогда

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \boldsymbol{\tau} \dot{s} = v_\tau \boldsymbol{\tau}.$$

Направление вектора $\boldsymbol{\tau}$ совпадает с направлением касательной к траектории, а его длина $\tau = 1$, так как

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = 1.$$

Следовательно, $v = |v_\tau|$.

Ускорение точки

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v_\tau \boldsymbol{\tau})}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}.$$

Вектор $d\boldsymbol{\tau}/dt$ можно представить в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Найдем направление и величину вектора

$$\mathbf{n}_1 = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Продифференцировав по s равенство $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_1 = 0.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{n}_1$ и $\boldsymbol{\tau}$ ортогональны. Длина вектора $\mathbf{n}_1$

$$n_1 = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s}.$$

При изменении s меняется только направление вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$, так как его длина равна единице для любого значения s. Пусть при увеличении s на величину Δs вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$ поворачивается на угол α (рис. 1.4,a).

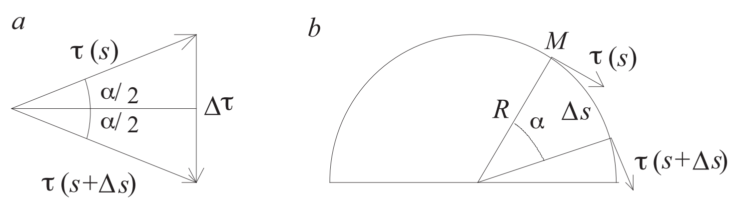

Рис. 1.4. Вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$.

Тогда $\Delta\tau = 2\sin(\alpha/2)$, причем $\alpha \to 0$ при $\Delta s \to 0$. Если траектория представляет собой окружность радиуса R (рис. 1.4,$б$), то

$$n_1 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\sin(\alpha/2)}{\alpha R} = \frac{1}{R},$$

В общем случае величина $R = 1/n_1$ является *радиусом кривизны* траектории в точке M. Единичный вектор $\mathbf{n} = R\mathbf{n}_1$ называется *главной нормалью* к траектории. Если траектория представляет собой плоскую кривую, то вектор $\Delta\boldsymbol{\tau}$ лежит в плоскости кривой. Следовательно, и вектор $\mathbf{n}$ принадлежит этой плоскости.

С учетом полученных соотношений формула для ускорения принимает вид

$$\mathbf{w} = w_\tau \boldsymbol{\tau} + w_n \mathbf{n},$$

где $w_\tau = \dot{v}_\tau$ — *касательное ускорение*, $w_n = v^2/R$ — *нормальное ускорение*.

Единичный вектор $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ называется *бинормалью*, а тройка ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — *трехгранником Френе* или *естественным трехгранником* кривой.

Разложения векторов скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ по ортам трехгранника Френе имеют более простой вид, чем их разложения по ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ неподвижной системы координат. Действительно, три из шести проекций $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на направления ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ всегда равны нулю. Однако следует иметь в виду, что направления ортов трехгранника Френе меняются при движении точки по траектории.

Пример

Найдем нормальное и касательное ускорение точки при ее движении по винтовой линии (см. пример из раздела 1.1). Нормальное ускорение $w_n = v^2/R$, где $v^2 = a^2\omega^2 + h^2$, R — радиус кривизны винтовой линии. Касательное ускорение $w_\tau = \dot{v}_\tau = 0$, так как величина скорости постоянна. Следовательно, $w = w_n$. Используя равенство $w = a\omega^2$ из раздела 1.1, для радиуса кривизны винтовой линии получаем формулу

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + h^2}{a\omega^2}.$$

Если $h = 0$, то $R = a$. Этот результат соответствует превращению винтовой линии в окружность радиуса a при $h = 0$.

1.3. Криволинейные координаты

Положение точки в пространстве известно, если заданы ее декартовы координаты x, y, z. В некоторых случаях для определения положения точки удобнее использовать какие-нибудь другие параметры q_1, q_2 и q_3, которые называются *криволинейными координатами.*

Пусть точка P является проекцией точки M на плоскость Oxy (рис. 1.5).

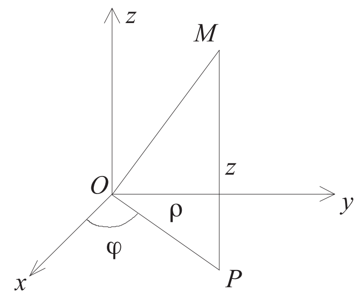

Рис. 1.5. Цилиндрические координаты.

Положение точки M будет известно, если задана длина ρ отрезка OP, угол φ между отрезком OP и осью Ox и координата z точки M. Параметры $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ называются *цилиндрическими координатами.* Тройка чисел ρ, φ, z однозначно определяет декартовы координаты точки M:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z.$$

Для любых x, y параметры ρ, φ можно найти с помощью формул

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad x \operatorname{tg}\varphi = y.$$

Из полученных формул следует, что соответствие между декартовыми и цилиндрическими координатами является взаимно однозначным для всего трехмерного пространства R^3 за исключением точек, лежащих на оси Oz, которым соответствует любое значение цилиндрической координаты $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Цилиндрические координаты удобно использовать в том случае, когда точка движется по поверхности цилиндра. Так, например, движение точки по винтовой линии описывается уравнениями

$$\rho = a, \quad \varphi = \omega t, \quad z = ht,$$

которые имеют более простой вид, чем уравнения из раздела 1.1, задающие это движение в декартовых координатах.

Пусть точка движется по плоскости S. Выберем начало координат в одной из точек плоскости S и направим ось Oz перпендикулярно S. Тогда во все время движения $z = 0$, и положение точки можно задать с помощью двух цилиндрических координат ρ и φ, которые в этом случае называются *полярными координатами* точки, причем $\rho = r$.

В общем случае формулы связи между декартовыми координатами x, y, z и координатами q_1, q_2, q_3 имеют вид

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{1.2}$$

Предположим, что для любых значений x, y, z существует по крайней мере одна тройка параметров q_1, q_2, q_3, удовлетворяющая уравнениям (1.2). Пусть такая тройка единственна для всех точек пространства R^3 за исключением некоторой области $Q \subset R^3$. Это означает, что взаимно однозначное соответствие между декартовыми и криволинейными координатами нарушается только в области Q. Для цилиндрических координат областью Q является ось Oz.

Зафиксируем значение первой координаты $q_1 = c_1$. Тогда уравнения (1.2) задают поверхность $P_1(c_1)$, которая называется первой *координатной поверхностью.* Поверхности $P_2(c_2)$ и $P_3(c_3)$, соответствующие фиксированным значениям $q_2 = c_2$ и $q_3 = c_3$, называются второй и третьей координатными поверхностями. В силу сделанных предположений через любую точку, не принадлежащую области Q, проходят три и только три координатные поверхности (через точки, принадлежащие Q, может проходить более трех координатных поверхностей).

Первой *координатной линией* l_1 называется линия пересечения поверхностей P_2 и P_3, т. е. $l_1 = P_2 \cap P_3$. Аналогичным образом определяются вторая l_2 и третья l_3 координатные линии: $l_2 = P_1 \cap P_3$, $l_3 = P_1 \cap P_2$. На каждой координатной линии две из трех криволинейных координат постоянны, поэтому при движении точки по координатной линии l_k меняется только координата q_k. Через любую точку, не принадлежащую области Q, проходят три и только три координатные линии.

Для цилиндрической системы координат первая координатная поверхность P_1 определяется уравнением $x^2 + y^2 = c_1^2$. При $c_1 \neq 0$

поверхность P_1 представляет собой поверхность цилиндра с радиусом c_1. Поверхностью P_2 является полуплоскость, проходящая через ось Oz, а поверхностью P_3 — плоскость, перпендикулярная к этой оси (рис. 1.6).

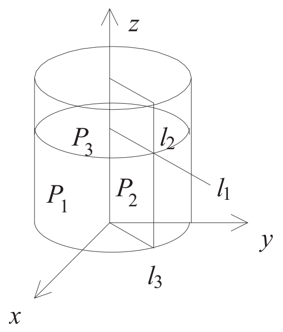

Рис. 1.6. Координатные поверхности и координатные линии.

Через каждую точку пространства, не лежащую на оси Oz, проходит ровно три координатных поверхности. Через любую точку оси Oz проходит бесчисленное множество полуплоскостей P_2, соответствующих различным значениям φ.

Первой координатной линией является луч, начинающийся на оси Oz и параллельный плоскости Oxy, а второй — окружность с центром на этой оси (см. рис. 1.6). Обе линии лежат в плоскостях, перпендикулярных оси Oz. Третья координатная линия представляет собой прямую, параллельную Oz.

Для описания движения точки по сфере удобно использовать *сферические координаты*. Сферическими координатами являются расстояние r от точки M до начала координат O, угол φ между осью Ox и отрезком OP, соединяющим начало координат с проекцией P точки M на плоскость Oxy, и угол ψ между отрезками OP и OM (рис. 1.7).

Формулы связи между декартовыми и сферическими координатами имеют вид

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

причем $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Первая координатная поверхность P_1 представляет собой сферу радиуса $r = c_1$. Сферическая система координат используется в геодезии. Углы φ и ψ определяют долготу

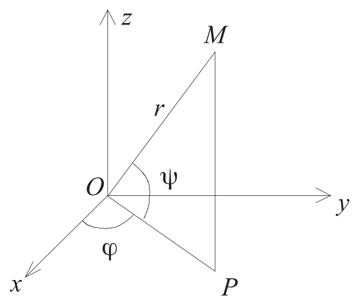

Рис. 1.7. Сферические координаты.

и широту точки на поверхности Земли и называются ее географическими координатами.

1.4. Компоненты вектора скорости в криволинейной системе координат

Рассмотрим еще один способ описания движения точки, при котором ее криволинейные координаты задаются как функции времени $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$. Тогда из равенств (1.2) следует, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$. Вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Правая часть этого равенства является производной от сложной векторной функции трех переменных. Для ее вычисления воспользуемся формулой для производной от сложной скалярной функции n переменных $f(q_1(t), q_2(t), \dots q_n(t))$:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j,$$

где *частная производная* функции f по переменной q_j

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \to 0} \frac{\Delta_j f}{\Delta q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

а

$$\Delta_j f = f(q_1, \dots, q_j + \Delta q_j, \dots, q_n) - f(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n)$$

является приращением функции f при изменении переменной q_j.

Из двух последних формул следует, что частная производная по переменной q_j вычисляется так же, как обычная производная, если все остальные переменные считать постоянными величинами. Так, например, для функции $f = q_1 q_2^2 + q_1^2 q_2$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = q_2^2 + 2q_1 q_2, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = 2q_1 q_2 + q_1^2.$$

Пусть $q_1 = t$, $q_2 = t^2$. Использование формулы для производной сложной функции дает следующий результат:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 = t^4 + 2t^3 + (2t^3 + t^2)2t = 5t^4 + 4t^3.$$

Такой же результат дает и непосредственное дифференцирование функции $f(q_1(t), q_2(t)) = t^5 + t^4$.

Частными производными второго порядка называются функции

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right).$$

Имеет место равенство *смешанных производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j}.$$

Последнее равенство верно, если смешанные производные существуют и непрерывны, однако подобные условия в курсе теоретической механики мы всегда считаем выполненными. Равенство смешанных производных легко проверить для функции $f = q_1 q_2^2 + q_1^2 q_2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_1}(2q_1 q_2 + q_1^2) = 2(q_2 + q_1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_2}(q_2^2 + 2q_1 q_2) = 2(q_2 + q_1).$$

Частная производная от вектора $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по переменной q_j определяется по формуле

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \to 0} \frac{\Delta_j \mathbf{r}}{\Delta q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\Delta_j \mathbf{r}$ — приращение вектора $\mathbf{r}$ при изменении переменной q_j. Учитывая равенство

$$\Delta_j \mathbf{r} = \Delta_j x\,\mathbf{i} + \Delta_j y\,\mathbf{j} + \Delta_j z\,\mathbf{k},$$

получаем, что
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x}{\partial q_j}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_j}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_j}\mathbf{k}.$$

Вернемся к вопросу о вычислении производной
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Используя формулу для производной сложной функции при вычислении производных dx/dt, dy/dt, dz/dt, получим
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\mathbf{k} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_j}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_j}\mathbf{k}\right)\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j. \qquad (1.3)$$

Пусть вектор $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ задает положение точки M, не принадлежащей области Q. Тогда через точку M проходит единственная координатная линия l_1. Точка M_1, соответствующая вектору $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$, лежит на линии l_1, так как при изменении одной лишь координаты q_1 точка движется по этой линии (рис. 1.8).

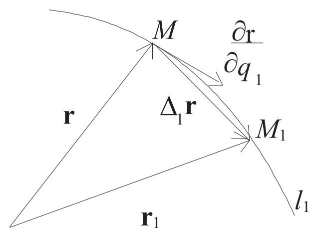

Рис. 1.8. Вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$.

Следовательно, вектор $\Delta_1\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ имеет направление, совпадающее с направлением хорды MM_1 координатной линии l_1. При

$\Delta q_1 \to 0$ направление хорды MM_1 стремится к направлению касательной к линии l_1. Принимая во внимание определение вектора $\partial \mathbf{r}/\partial q_1$, заключаем, что его направление совпадает с направлением касательной к первой координатной линии. Аналогичным образом можно показать, что векторы $\partial \mathbf{r}/\partial q_2$ и $\partial \mathbf{r}/\partial q_3$ направлены по касательным к координатным линиям l_2 и l_3. Длины векторов $\partial \mathbf{r}/\partial q_j$

$$H_j = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)^2}$$

называются *коэффициентами Ламе.*

Векторы $\partial \mathbf{r}/\partial q_j$ можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = H_j \mathbf{e}_j,$$

где $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор касательной к координатной линии l_j. С учетом введенных обозначений формула для скорости может быть записана в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} H_j \dot{q}_j \mathbf{e}_j.$$

Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ являются линейно независимыми в любой точке пространства, не принадлежащей области Q, и образуют в такой точке *локальный базис* криволинейной системы координат. При переходе от одной точки к другой направление векторов локального базиса может меняться.

Криволинейные координаты, для которых векторы локального базиса ортогональны, называются *ортогональными.* Если система координат ортогональна, то величины $v_j = H_j \dot{q}_j$ являются проекциями скорости на вектора локального базиса.

Для цилиндрической системы координат ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$) получаем $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ортогональны, так как $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = 0$ при $j \neq k$. Следовательно, локальный базис цилиндрической системы координат является ортонормированным. Он изображен на рис. 1.9.

Базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ получается из базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ неподвижной системы координат поворотом его на угол φ против часовой стрелки.

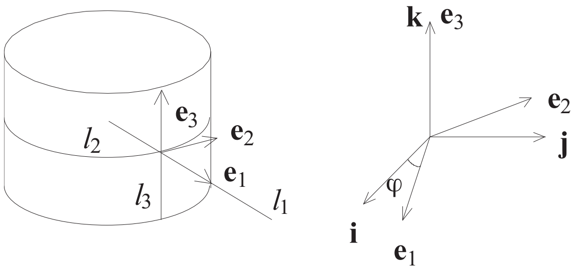

Рис. 1.9. Базис цилиндрической системы координат.

Компоненты вектора скорости в локальном базисе имеют вид

$$v_\rho = v_1 = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = v_2 = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = v_3 = \dot{z},$$

а величина скорости определяется по формуле

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2.$$

Для винтовой линии $\rho = a$, $\varphi = \omega t$, $z = ht$,

$$v_\rho = 0, \quad v_\varphi = a\omega, \quad v_z = h, \quad v^2 = a^2\omega^2 + h^2.$$

Последняя формула совпадает с формулой, полученной в разделе 1.1.

В качестве упражнения предлагается убедиться в ортогональности векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ для сферических координат и найти для этих координат проекции вектора скорости.

1.5. Проекции ускорения на оси криволинейной системы координат

Вектор ускорения $\mathbf{w}$ можно представить в виде

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — локальный базис криволинейной системы координат. Предположим, что криволинейные координаты ортогональны. Тогда

$$w_j = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$$

являются проекциями ускорения на оси криволинейной системы координат. Скалярное произвеление в правой части этого равенства можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}\right)-\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}.$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}. \tag{1.4}$$

Сравнивая формулы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_k\partial q_j}\dot{q}_k$$

и

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k,$$

в виду равенства смешанных производных получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}. \tag{1.5}$$

С помощью формул (1.4), (1.5) преобразуем рассматриваемое скалярное произведение:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}.$$

Введем функцию

$$T=\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}v^2.$$

Частная производная T по переменной q_j имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}\right)=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_j}.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_j}.$$

Следовательно,
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j},$$
и формула для проекций ускорения принимает вид
$$w_j=\frac{1}{H_j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right).$$

Для цилиндрической системы координат
$$T=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2).$$
Компоненты вектора ускорения имеют вид
$$w_\rho=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\rho}}-\frac{\partial T}{\partial\rho}=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,$$
$$w_\varphi=\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi},$$
$$w_z=\ddot{z}.$$
Для винтовой линии $\rho=a$, $\varphi=\omega t$, $z=ht$ имеем
$$\dot{\rho}=\ddot{\rho}=\ddot{\varphi}=\ddot{z}=0,\quad w_\rho=-a\omega^2,\quad w_\varphi=w_z=0.$$

Полезным упражнением является определение компонент ускорения в сферической системе координат.

1.6. Ускорения планет

Немецкий астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) изобрел телескоп с двояковыпуклыми линзами и установил три закона движения планет солнечной системы. На основании этих законов Исаак Ньютон (1643–1727) определил ускорения планет и открыл закон всемирного тяготения, что, безусловно, является одним из величайших достижений науки.

Законы Кеплера

1. Каждая из планет движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Площадь сектора орбиты, описанного вектором планеты, изменяется пропорционально времени.

3. Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллипсов.

Найдем ускорения планет, используя законы Кеплера. Пусть точка M — центр планеты. В соответствии с первым законом Кеплера точка M движется по эллипсу (рис. 1.10,a).

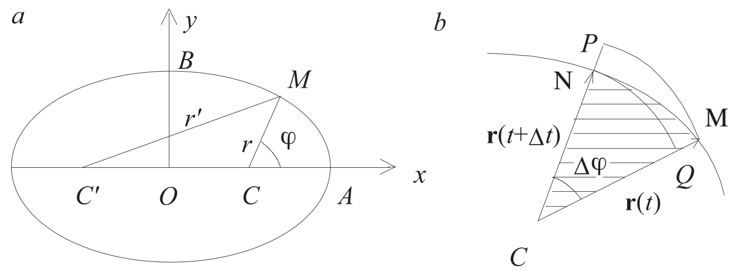

Рис. 1.10. Орбита планеты.

Обозначим буквами a и b длины большой и малой полуосей эллипса OA и OB, буквой c — расстояние OC от центра эллипса до его фокуса, буквами r и r' — длины отрезков CM и $C'M$, буквой φ — угол между отрезком CM и осью Ox.

По определению эллипса $r + r' = 2a$. Применение теоремы косинусов к треугольнику $C'MC$ дает равенство

$$r'^2 = (2a - r)^2 = (2c)^2 + r^2 + 4rc\cos\varphi,$$

из которого вытекает, что

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\varphi}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на величину a. Используя формулу $b^2 = a^2 - c^2$ и обозначения $e = c/a$, $p = b^2/a$, получаем уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Величина e называется эксцентриситетом эллипса.

Обозначим ΔS площадь эллиптического сектора CMN, которую "заметает"за время Δt вектор $\mathbf{r}$, задающий положение точки M. На рис. 1.10,*б* сектор CMN заштрихован. Его площадь ΔS больше площади сектора CMP круга с радиусом $r(t)$ и меньше площади сектора CNQ круга с радиусом $r(t+\Delta t)$:

$$\frac{1}{2}r^2(t)\Delta\varphi < \Delta S < \frac{1}{2}r^2(t+\Delta t)\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора $\mathbf{r}$ за время Δt. Разделив полученное равенство на Δt и перейдя в нем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Функция $\dot{S}$ называется *секторной скоростью.*

По второму закону Кеплера $S = \alpha t$, где α — константа. Следовательно,

$$\dot{S} = r^2\dot{\varphi}/2 = \alpha, \quad r^2\dot{\varphi} = 2\alpha,$$

и проекция ускорения

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Найдем вторую проекцию ускорения

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Учитывая, что

$$\dot{r} = \frac{pe\dot{\varphi}\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{er^2\dot{\varphi}\sin\varphi}{p} = \frac{2\alpha e\sin\varphi}{p},$$

получаем

$$w_r = \frac{2\alpha e\dot{\varphi}\cos\varphi}{p} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{4\alpha^2 e\cos\varphi}{pr^2} - \frac{4\alpha^2}{r^3} =$$

$$= \frac{4\alpha^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\varphi}{p} - \frac{1+e\cos\varphi}{p}\right) = -\frac{4\alpha^2}{pr^2}.$$

Таким образом, ускорение планеты направлено к центру Солнца и обратно пропорционально квадрату расстояния до него. То же самое можно сказать и о силе притяжения планеты к Солнцу, которая по второму закону Ньютона равна произведению ускорения на массу планеты.

Воспользуемся теперь третьим законом Кеплера. Секторная скорость $\alpha = S/T$, где $S = \pi ab$ — площадь эллипса, T — время обращения планеты. Следовательно,

$$w_r = -\frac{4\alpha^2}{pr^2} = -\frac{4\pi^2 a^2 b^2 a}{b^2 T^2 r^2} = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}.$$

В силу третьего закона Кеплера коэффициент $4\pi^2 a^3/T^2$ одинаков для всех планет. Это означает, что сила притяжения планеты к Солнцу пропорциональна массе планеты. Доказательство этого утверждения помогло Ньютону прийти к выводу об универсальности закона всемирного тяготения, т. е. о справедливости его для любых двух тел.

Оглавление