

Глава 10

Динамика твердого тела

В этой главе, как и во всем курсе теоретической механики, твердым телом называется абсолютно твердое тело, расстояния между точками которого не изменяются.

10.1. Основные определения

Пусть твердое тело массой m занимает область G трехмерного пространства, имеющую объем $V \neq 0$. Реальное твердое тело состоит из атомов и может рассматриваться как система из очень большого, но конечного числа материальных точек. Однако мы будем рассматривать классическую модель сплошного твердого тела. Предположим, что любая точка M области G принадлежит твердому телу. Следовательно, тело состоит из бесконечного числа точек. Движение твердого тела считается известным, если известен закон движения любой его точки.

Введем две системы прямоугольных декартовых координат: неподвижную систему $O_0\xi\eta\zeta$ с ортами $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ и подвижную систему $Oxyz$ с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, жестко скрепленную с телом (рис. 10.1).

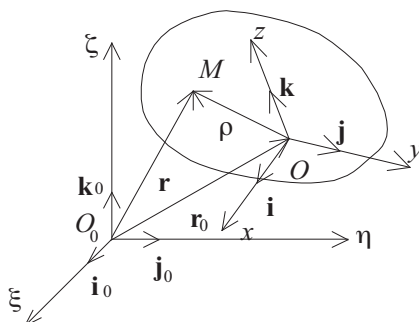


Рис. 10.1. Системы координат.

Пусть положение произвольной точки тела M относительно неподвижной системы координат задается вектором $\mathbf{r}(t)$. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0,$$

где вектор

$$\mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i}_0 + \eta\mathbf{j}_0 + \zeta\mathbf{k}_0$$

определяет положение точки O относительно неподвижной системы координат, а вектор

$$\boldsymbol{\rho} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

задает положение точки M относительно подвижной системы координат.

Твердое тело имеет шесть степеней свободы. В качестве функций, задающих его движение, выберем координаты $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ точки O относительно неподвижной системы координат и углы Эйлера $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$, определяющие положение тройки ортов $\mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t), \mathbf{k}(t)$ по отношению к тройке $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$. Закон движения точки тела M с координатами x, y, z известен, если заданы функции $\xi(t), \eta(t), \zeta(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t)$.

Результаты, полученные ранее для систем с конечным числом материальных точек, нельзя непосредственно использовать для описания движения рассматриваемой нами модели твердого тела, так как она состоит из бесконечного числа точек. Однако эти результаты можно использовать для описания движения приближенных моделей сплошного твердого тела.

Разделим область G , занимаемую твердым телом, на N непересекающихся частей G_i с объемами ΔV_i . Каждую из этих частей заменим материальной точкой $M_i \in G_i$ с массой Δm_i , равной массе

соответствующей части тела. Полученная таким способом приближенная модель сплошного твердого тела тоже имеет шесть степеней свободы. Действительно, положение точки M_i определяется вектором \mathbf{r}_i , направленным из точки O_0 в точку M_i , причем

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_i,$$

где вектор

$$\boldsymbol{\rho}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

задает положение точки M_i относительно подвижной системы координат. Таким образом, задание функций $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ определяет движение точки M_i с координатами x_i , y_i , z_i .

При увеличении числа N с одновременным уменьшением наибольшего из объемов $\Delta V = \max_i \Delta V_i$ приближенная модель все более точно будет описывать поведение сплошного твердого тела. Следовательно, уравнения движения твердого тела можно получить из уравнений движения системы N материальных точек M_i предельным переходом при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$.

Определение 1

Величину $\gamma_i = \Delta m_i / \Delta V_i$ называют *средней массовой плотностью* части тела G_i . Пусть $\Delta V_i \rightarrow 0$, т. е. область G_i стягивается в точку M с координатами x , y , z . *Массовой плотностью* или *плотностью* тела в точке M называется величина

$$\gamma(x, y, z) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \gamma_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \Delta m_i / \Delta V_i.$$

Для массы тела справедлива формула

$$m = \sum_{i=1}^N \Delta m_i = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta V_i.$$

При $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$ интегральная сумма в правой части последней формулы превращается в интеграл по области G :

$$m = \int_G \gamma(x, y, z) dV \quad (10.1)$$

Формула (10.1) позволяет определить массу тела по заданной плотности.

Если $\gamma = \gamma_0$, т. е. плотность постоянна, то тело называется *однородным*. В этом случае его масса

$$m = \gamma_0 \int_G dV = \gamma_0 V.$$

Определение 2

Пусть на часть тела G_i объемом ΔV_i действует сила $\Delta \mathbf{F}_i$. Тогда вектор

$$\mathbf{q}_i = \Delta \mathbf{F}_i / \Delta V_i$$

называется *средней распределенной объемной нагрузкой*, действующей на область G_i . Предположим, что область G_i стягивается в точку M . Вектор

$$\mathbf{q} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \mathbf{q}_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \Delta \mathbf{F}_i / \Delta V_i$$

называется значением распределенной объемной нагрузки в точке M . Распределенная нагрузка считается заданной, если известно ее значение для любой точки тела. В этом случае можно найти главный вектор объемных сил, действующих на тело. Действительно, главный вектор сил, действующих на приближенную модель твердого тела

$$\mathbf{F}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \Delta V_i,$$

при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$ переходит в главный вектор сил, действующих на тело. Следовательно

$$\mathbf{F} = \int_G \mathbf{q} dV.$$

Примером распределенной объемной нагрузки является сила тяжести, для которой

$$\Delta \mathbf{F}_i = \Delta m_i \mathbf{g} = \gamma_i \Delta V_i \mathbf{g}, \quad \mathbf{q}_i = \gamma_i \mathbf{g}, \quad \mathbf{q} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \gamma_i \mathbf{g} = \gamma \mathbf{g}.$$

Здесь \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Главный вектор сил тяжести

$$\mathbf{P} = \int_G \gamma \mathbf{g} dV = \mathbf{g} \int_G \gamma dV = m\mathbf{g}$$

называется весом тела.

На тело может действовать и распределенная поверхностная нагрузка, примером которой являются силы, действующие на тело, погруженное в жидкость. В этом случае главный вектор равен интегралу по поверхности тела от величины распределенной поверхностной нагрузки. В дальнейшем поверхностные нагрузки не рассматриваются.

Силы взаимодействия, возникающие при контакте двух твердых тел, относятся к разряду сосредоточенных сил, действие которых на твердое тело подробно исследовалось при изучении статики. В частности, главный вектор \mathbf{F} системы из n сосредоточенных сил (\mathbf{F}_i, M_i) находится по формуле

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Для приближенной модели тела положение центра масс C определяется вектором

$$\mathbf{r}_c^{(N)} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \Delta m_i \right) / m = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \gamma_i \Delta V_i \right) / m,$$

направленным из точки O_0 в точку C . Предельным переходом при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$ для твердого тела получаем

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{S}/m,$$

где вектор

$$\mathbf{S} = \int_G \mathbf{r} \gamma dV$$

называется *вектором статических моментов* относительно точки O_0 . Введем обозначение $dm = \gamma dV$ и перепишем последнюю формулу в виде

$$\mathbf{S} = \int_G \mathbf{r} dm.$$

Проекции вектора \mathbf{S} на оси координат

$$S_x = \int_G x dm, \quad S_y = \int_G y dm, \quad S_z = \int_G z dm$$

называются *статическими моментами* относительно точки O_0 .

Найдем главный момент объемных сил \mathbf{L} . Для приближенной модели главный момент определяется по формуле

$$\mathbf{L}^{(N)} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{q}_i \Delta V_i).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$, получаем

$$\mathbf{L} = \int_G (\mathbf{r} \times \mathbf{q}) dV.$$

В случае действия силы тяжести

$$\mathbf{L} = \int_G (\mathbf{r} \times \gamma \mathbf{g}) dV = \left(\int_G \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{g} = \mathbf{S} \times \mathbf{g} = m\mathbf{r}_c \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{P}.$$

Следовательно, действие силы тяжести эквивалентно действию на тело силы веса P , приложенной в центре масс C .

10.2. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения

Для приближенной модели твердого тела, состоящей из N материальных точек, теорема об изменении количества движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}^{(N)}}{dt} = \mathbf{F}^{(N)}, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{F}^{(N)}$ — главный вектор внешних сил, действующих на систему материальных точек,

$$\mathbf{K}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \mathbf{v}_i$$

— количество движения этой системы.

Скорость i -й точки

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i,$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Подставив выражение для \mathbf{v}_i в формулу для $\mathbf{K}^{(N)}$, получим

$$\mathbf{K}^{(N)} = m\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_0^{(N)}, \quad \mathbf{S}_0^{(N)} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\rho}_i \Delta m_i.$$

Предельный переход в (10.2) при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$ дает теорему об изменении количества движения \mathbf{K} для твердого тела:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} — главный вектор внешних сил, действующих на тело,

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_0.$$

Вектор \mathbf{S}_0 является вектором статических моментов тела относительно точки O . Для его вычисления можно использовать формулу

$$\mathbf{S}_0 = \int_G \boldsymbol{\rho} dm = \int_G (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dm = m(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_0).$$

Если в качестве начала координат O подвижной системы выбрать центр масс C , то $\mathbf{S}_0 = 0$, $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$, где \mathbf{v}_c — скорость центра масс.

В общем случае теорема об изменении количества движения твердого тела имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{S}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}_0}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ — угловое ускорение.

При $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$ получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}.$$

Последнее равенство представляет собой теорему о движении центра масс твердого тела.

Теорема об изменении момента количества движения для приближенной модели твердого тела, состоящей из материальных точек, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{I}^{(N)}}{dt} = \mathbf{L}^{(N)}, \quad (10.3)$$

где $\mathbf{L}^{(N)}$ — главный момент внешних сил относительно начала неподвижной системы координат O_0 ,

$$\mathbf{I}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i$$

— момент количества движения системы материальных точек относительно точки O_0 . Учитывая, что

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i,$$

получаем

$$\mathbf{l}^{(N)} = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_0^{(N)}) + \mathbf{S}_0^{(N)} \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) \Delta m_i.$$

Теорему об изменении момента количества движения \mathbf{l} для твердого тела дает предельный переход в равенстве (10.3) при $N \rightarrow \infty$, $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L},$$

где \mathbf{L} — главный момент внешних сил, действующих на тело,

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_0 \times \mathbf{v}_0 + \int_G \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm.$$

Главный момент внешних сил \mathbf{L} относительно точки O_0 связан с главным моментом \mathbf{L}' относительно точки O равенством

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{L}',$$

где \mathbf{F} — главный вектор внешних сил.

Пусть в твердом теле имеется неподвижная точка. Выберем эту точку за начало неподвижной и подвижной систем координат. Тогда $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$,

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}' = \int_G \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm, \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}',$$

и теорема об изменении момента количества движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{L}'.$$

В общем случае движения твердого тела в качестве начала подвижной системы координат удобно выбрать центр масс. Тогда $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c$, $\mathbf{S}_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= m\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c + \mathbf{l}', & \mathbf{L} &= \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} + \mathbf{L}', \\ \frac{d\mathbf{l}}{dt} &= m\mathbf{r}_c \times \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} + \frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} + \mathbf{L}'. \end{aligned}$$

Из теоремы о движении центра масс следует, что

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{L}', \tag{10.4}$$

т. е. в общем случае при условии $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$ теорема об изменении момента количества движения имеет такой же вид как и в случае движения твердого тела с неподвижной точкой.

Рассмотрим задачу о движении твердого тела с неподвижной точкой. Используя формулу для двойного векторного произведения, получаем

$$\mathbf{l} = \int_G \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \int_G [\boldsymbol{\omega} \rho^2 - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})] dm.$$

Проекция вектора \mathbf{l} на оси подвижной системы координат

$$\begin{aligned} l_x &= \int_G [\omega_x(y^2 + z^2) - x(\omega_y y + \omega_z z)] dm, \\ l_y &= \int_G [\omega_y(x^2 + z^2) - y(\omega_x x + \omega_z z)] dm, \\ l_z &= \int_G [\omega_z(x^2 + y^2) - z(\omega_x x + \omega_y y)] dm \end{aligned}$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} l_x &= J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ l_y &= -J_{xy}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z \\ l_z &= -J_{xz}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{10.5}$$

где величины

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_G (y^2 + z^2) dm, & J_{xy} &= \int_G xy dm, & J_{xz} &= \int_G xz dm, \\ J_{yy} &= \int_G (x^2 + z^2) dm, & J_{yz} &= \int_G yz dm, & J_{zz} &= \int_G (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (10.6)$$

называются *моментами инерции*. Моменты инерции зависят от формы твердого тела, его плотности и выбора точки O .

Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси координат выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ и их производные $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$, поэтому проектирование уравнения (10.4) дает три дифференциальных уравнения второго порядка для определения углов Эйлера, задающих движение твердого тела с неподвижной точкой. В случае произвольного выбора направления осей подвижной системы координат эти уравнения оказываются довольно громоздкими, поэтому в дальнейшем они будут получены для системы координат, направления осей которой выбраны специальным образом (см. следующий раздел).

Рассмотрим теперь задачу о движении твердого тела в общем случае, предполагая, что начало подвижной системы координат выбрано в центре масс тела. Искомыми функциями, определяющими движение твердого тела, являются координаты центра масс $\xi_c(t), \eta_c(t), \zeta_c(t)$ и углы Эйлера $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$.

Теорема о движении центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}$$

эквивалентна трем скалярным дифференциальным уравнениям

$$m\ddot{\xi}_c = F_x, \quad m\ddot{\eta}_c = F_y, \quad m\ddot{\zeta}_c = F_z. \quad (10.7)$$

Еще три дифференциальных уравнения, содержащие производные от углов Эйлера, получаются при проектировании уравнения (10.4), причем эти уравнения совпадают с уравнениями, описывающими движение твердого тела с неподвижной точкой. Таким образом, теоремы об изменении количества движения и момента количества движения дают шесть дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций $\xi_c(t), \eta_c(t), \zeta_c(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t)$.

Если главный вектор \mathbf{F} не зависит от углов Эйлера, то функции $\xi_c(t), \eta_c(t), \zeta_c(t)$ можно найти, решив уравнения (10.7). После этого углы Эйлера $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ находятся путем решения трех остальных уравнений. В противном случае для определения закона движения твердого тела необходимо решить связанную систему шести дифференциальных уравнений.

10.3. Главные моменты инерции

Пусть $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом. Положение произвольной точки тела M определяется вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Рассмотрим единичный вектор

$$\mathbf{e} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

задающий положение оси OE (рис. 10.2).

Проведем из точки M отрезок MN , перпендикулярный к оси OE . Пусть d — длина отрезка MN . *Моментом инерции тела относительно оси OE* называется величина

$$J_e = \int_G d^2 dm.$$

Обозначим буквой h длину отрезка ON . Тогда

$$\begin{aligned} h &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ d^2 &= r^2 - h^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, получаем

$$d^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz.$$

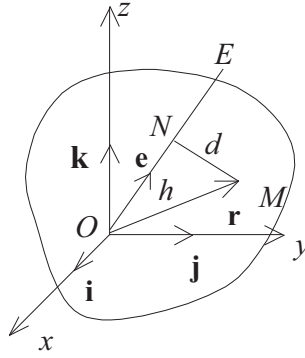


Рис. 10.2. Момент инерции относительно оси.

Подстановка этого выражения в формулу для J_e с учетом (10.6) дает следующее равенство:

$$J_e = \int_G d^2 dm = \alpha^2 J_{xx} + \beta^2 J_{yy} + \gamma^2 J_{zz} - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz}. \quad (10.8)$$

Если $\mathbf{e} = \mathbf{i}$, то $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $J_e = J_{xx}$, т. е. J_{xx} является моментом инерции относительно оси Ox . Аналогичным образом получаем, что J_{yy} и J_{zz} представляют собой моменты инерции относительно осей Oy и Oz .

Рассмотрим множество точек $P(x, y, z)$, лежащих на оси OE на расстоянии $p = J_e^{-1/2}$ от точки O . Предположим, что $0 < J_e < \infty$. Тогда точка P находится на конечном расстоянии от начала координат. Для координат точки P справедливы равенства

$$x = J_e^{-1/2}\alpha, \quad y = J_e^{-1/2}\beta, \quad z = J_e^{-1/2}\gamma.$$

Подставив $\alpha = \sqrt{J_e}x$, $\beta = \sqrt{J_e}y$, $\gamma = \sqrt{J_e}z$ в формулу (10.8) и разделив ее на J_e , получим уравнение поверхности второго порядка

$$g(x, y, z) = x^2 J_{xx} + y^2 J_{yy} + z^2 J_{zz} - 2xy J_{xy} - 2xz J_{xz} - 2yz J_{yz} = 1. \quad (10.9)$$

Уравнение (10.9) является уравнением эллипсоида, так как эллипсоид — единственная поверхность второго порядка, не имеющая бесконечно удаленных точек. Эллипсоид, заданный уравнением (10.9), называется *эллипсоидом инерции*, а его главные оси — *главными осями инерции*.

Выберем в качестве осей подвижной системы координат главные оси инерции (рис. 10.3). В новой

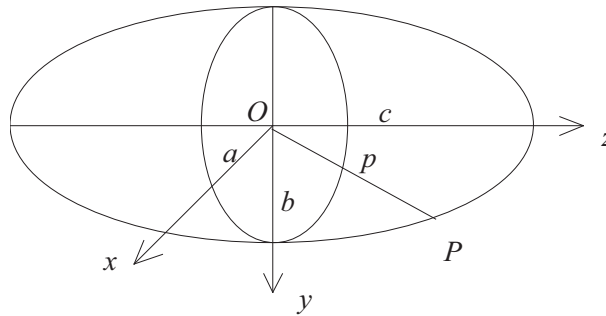


Рис. 10.3. Эллипсоид инерции.

системе координат уравнение эллипсоида примет канонический вид

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — длины главных полуосей эллипсоида. Моменты инерции A, B, C относительно главных осей инерции Ox, Oy, Oz называются *главными моментами инерции*. Из формулы $p = J_e^{-1/2}$ следует, что $a = A^{-1/2}$, $b = B^{-1/2}$, $c = C^{-1/2}$, поэтому уравнение эллипсоида инерции можно записать в виде

$$g(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

т. е. при выборе главных осей инерции в качестве осей подвижной системы координат квадратичная форма $g(x, y, z)$ становится диагональной,

$$J_{xx} = A, \quad J_{yy} = B, \quad J_{zz} = C, \quad J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0,$$

а выражения (10.5) для проекций вектора момента количества движения \mathbf{l} на оси подвижной системы координат упрощаются и принимают вид

$$l_x = A\omega_x, \quad l_y = B\omega_y, \quad l_z = C\omega_z.$$

Направления главных осей инерции и величины главных моментов инерции зависят не только от формы и плотности рассматриваемого тела, но и от выбора начала координат подвижной системы в твердом теле. Одному и тому же телу соответствует бесчисленное множество эллипсоидов инерции. Во многих задачах в качестве начала координат выбирают центр масс. После выбора начала координат для упрощения уравнений движения тела в качестве осей координат целесообразно взять главные оси инерции. Определить главные оси и главные моменты инерции в общем случае можно с помощью следующего алгоритма:

- 1) Выбирается некоторая система координат, связанная с твердым телом.
- 2) Определяются элементы матрицы

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

3) Находятся ортонормированные собственные векторы \mathbf{u}_i матрицы J и ее собственные числа λ_i , $i = 1, 2, 3$.

Собственные числа λ_i являются корнями кубического уравнения

$$\det(J - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица, а вектор \mathbf{u}_i удовлетворяет системе линейных однородных алгебраических уравнений

$$(J - \lambda_i E)\mathbf{u}_i = 0.$$

Собственные векторы матрицы J задают направление главных осей инерции, а ее собственные значения совпадают с главными моментами инерции. Докажем последнее утверждение.

Матрица J симметрична. Покажем, что она является положительно определенной. Пусть \mathbf{e} — произвольный единичный вектор, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$. Из (10.8) следует, что $J_e = J\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} > 0$, поэтому

$$J\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 J_e > 0, \quad \text{при } r \neq 0,$$

а это и означает положительную определенность матрицы J . Следовательно, матрица J имеет три ортонормированных собственных вектора \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , а ее собственные значения λ_1 , λ_2 , λ_3 вещественны и положительны. Выберем в качестве ортов новой системы координат вектора \mathbf{u}_i . Произвольный вектор \mathbf{r} можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3,$$

Принимая во внимание формулы

$$J\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{i,j},$$

где $\delta_{i,j}$ символ Кронекера, получаем, что в новых координатах

$$g = J\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = J \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{u}_i \cdot \sum_{j=1}^3 x_j\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i\mathbf{u}_i \cdot \sum_{j=1}^3 x_j\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i^2,$$

т. е. квадратичная форма g принимает диагональный вид. Это и означает, что оси Ox_i являются главными осями инерции, а λ_i представляют собой главные моменты инерции.

Выбор главных осей инерции в качестве осей координат аналогичен переходу к нормальным координатам в задаче о малых колебаниях.

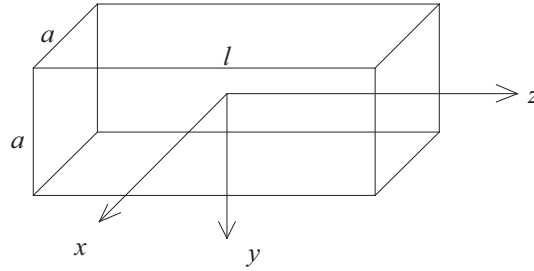


Рис. 10.4. Прямая призма.

Найдем матрицу J для однородной прямой призмы длиной l с квадратным поперечным сечением со стороной a . Выберем систему координат с началом в центре масс призмы и осями, перпендикулярными граням призмы (рис. 10.4).

Воспользовавшись для вычисления моментов инерции формулами (10.6), получим

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \int_G (y^2 + z^2) dm = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2) \gamma dx dy dz = \\
 &= a\gamma \left(l \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy + a \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz \right) = \frac{a\gamma}{12} (la^3 + al^3) = \frac{m}{12} (a^2 + l^2), \\
 J_{yy} &= J_{xx}, \quad J_{zz} = \frac{ma^2}{6}, \quad J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.
 \end{aligned}$$

Выбранные оси оказались главными осями инерции благодаря симметрии призмы. В следующем разделе будут даны способы определения главных осей инерции для симметричных тел.

Равенство $J_{xx} = J_{yy}$ означает, что эллипсоид инерции призмы с квадратным поперечным сечением является эллипсоидом вращения. В этом случае главными осями инерции оказываются любые две перпендикулярны друг другу оси, лежащие в плоскости Oxy .

Если предположить, что $a \ll l$, то $J_{xx} \simeq ml^2/12$. Величину $ml^2/12$ называют моментом инерции стержня относительно его центра масс. Устремляя к нулю длину призмы l в формуле для J_{xx} , мы получим момент инерции квадрата относительно оси, лежащей в его плоскости и проходящей через его центр, равный $ma^2/12$. Момент инерции $J_{zz} = ma^2/6$ является моментом инерции квадрата относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости квадрата.

10.4. Теоремы о моментах инерции

Теорема 1 (о моментах инерции относительно параллельных осей).

Пусть J_c — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела C . Тогда момент инерции этого тела J относительно параллельной оси определяется по формуле

$$J = J_c + mp^2,$$

где m — масса тела, p — расстояние между осями.

Доказательство

Выберем систему координат с началом в точке C и осью Cz , совпадающей с одной из параллельных осей (рис. 10.5). Пусть M — произвольная точка твердого тела. Построим плоскость S ,

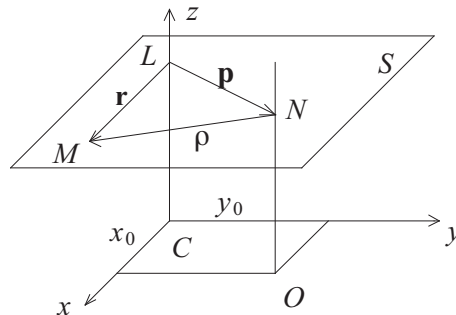


Рис. 10.5. Параллельные оси.

проходящую через точку M параллельно плоскости Cxy . Обозначим L и N точки пересечения этой

плоскости с параллельными осями, проходящими через точки C и O . Введем векторы $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и $\mathbf{p} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, направленные из точки L в точки M и N . Тогда

$$J_c = \int_G r^2 dm = \int_G (x^2 + y^2) dm, \quad J = \int_G \rho^2 dm,$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}$.

Следовательно,

$$J = \int_G [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] dm = \int_G (x^2 + y^2) dm - 2x_0 \int_G x dm - 2y_0 \int_G y dm + (x_0^2 + y_0^2) \int_G dm = J_c - 2x_0 S_x - 2y_0 S_y + p^2 m.$$

Утверждение теоремы вытекает из последнего равенства ввиду того, что начало координат выбрано в центре масс, и поэтому $S_x = S_y = 0$.

Следствие 1

Момент инерции тела J_c относительно оси, проходящей через его центр масс, является наименьшим по сравнению с моментами относительно других параллельных осей.

Следствие 2

Пусть p_1 и p_2 — расстояния от оси, проходящей через центр масс тела C , до двух параллельных ей осей. Моменты инерции J_1 и J_2 относительно этих осей можно найти по формулам

$$J_1 = J_c + mp_1^2, \quad J_2 = J_c + mp_2^2,$$

где m — масса тела. Из полученных равенств вытекает формула связи между моментами инерции относительно двух произвольных параллельных осей:

$$J_2 = J_1 - mp_1^2 + mp_2^2.$$

Применим теорему 1 для вычисления момента инерции J однородного стержня длиной l и массой m относительно его конца. Учитывая, что $J_c = ml^2/12$, получаем

$$J = ml^2/12 + ml^2/4 = ml^2/3.$$

Теорема 2 (об условиях, определяющих главную ось инерции).

Пусть $Oxyz$ прямоугольная декартова система координат, связанная с твердым телом. Условия $J_{xy} = J_{xz} = 0$ являются необходимыми и достаточными для того, что ось Ox была главной осью инерции.

Доказательство

Пусть Ox — главная ось инерции. Тогда имеются две перпендикулярные к ней главные оси инерции Oy' и Oz' (рис. 10.6) и, следовательно,

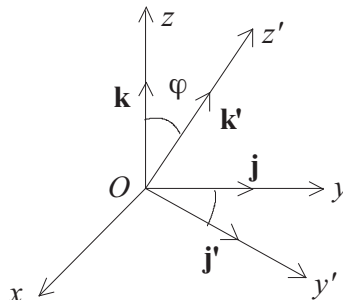


Рис. 10.6. Главные оси инерции.

$$J_{xy'} = J_{xz'} = J_{y'z'} = 0.$$

Докажем, что для любых осей Oy и Oz выполняются равенства

$$J_{xy} = J_{xz} = 0.$$

Для произвольного вектора \mathbf{r} , лежащего в плоскости Oyz , имеем

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} = y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} = y' \cos \varphi + z' \sin \varphi, \\ z &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = -y' \sin \varphi + z' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где φ — угол между осями Oz и Oz' . Подставив (10.10) в формулы для J_{xy} , J_{xz} , получим

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_G x(y' \cos \varphi + z' \sin \varphi) dm = J_{xy'} \cos \varphi + J_{xz'} \sin \varphi, \\ J_{xz} &= \int_G x(-y' \sin \varphi + z' \cos \varphi) dm = -J_{xy'} \sin \varphi + J_{xz'} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Формулы (10.11) показывают, что $J_{xy} = J_{xz} = 0$, так как $J_{xy'} = J_{xz'} = 0$. Отметим, что вообще говоря, $J_{yz} \neq 0$.

Пусть теперь $J_{xy} = J_{xz} = 0$. Докажем, что в этом случае Ox — главная ось инерции, т. е. существуют оси Oy' и Oz' такие, что $J_{xy'} = J_{xz'} = J_{y'z'} = 0$. Равенства $J_{xy'} = J_{xz'} = 0$ непосредственно следуют из условия $J_{xy} = J_{xz} = 0$ и (10.11), так как однородная система линейных уравнений с отличным от нуля определителем имеет только нулевое решение.

Разрешим уравнения (10.10) относительно y' и z' и подставим выражения

$$y' = y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad z' = y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

в формулу для $J_{y'z'}$. Получим

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \int_G (y \cos \varphi - z \sin \varphi)(y \sin \varphi + z \cos \varphi) dm = \\ &= (J_{zz} - J_{yy}) \frac{\sin 2\varphi}{2} + J_{yz} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Выберем угол φ такой, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -2J_{yz}/(J_{zz} - J_{yy}).$$

Тогда $J_{y'z'} = 0$, и в системе координат $Oxy'z'$ все центробежные моменты инерции оказываются равными нулю, поэтому все оси этой системы, в том числе и ось Ox , являются главными осями инерции.

Определение

Пусть G — область пространства, занимаемая твердым телом с плотностью $\gamma(x, y, z)$, а $Oxyz$ — связанная с телом система прямоугольных декартовых координат. Плоскость $z = 0$ называется плоскостью симметрии тела, если

1) из условия $M(x, y, z) \in G$ следует, что $M'(x, y, -z) \in G$ для любых x, y, z (геометрическая симметрия);

2) $\gamma(x, y, z) = \gamma(x, y, -z)$ (симметрия масс).

Второе условие выполняется, в частности, для однородного тела.

Теорема 3

Если тело имеет плоскость симметрии, то его центр масс лежит в этой плоскости, а всякая перпендикулярная плоскости прямая является главной осью инерции.

Доказательство

Докажем, что для любой функции $f(x, y, z)$ такой что

$$f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \quad (10.12)$$

справедливо равенство

$$I = \int_G f(x, y, z) dm = 0.$$

Через точку $A_* \in G$, находящуюся на максимальном расстоянии от плоскости симметрии P , проведем ось Oz , перпендикулярную P . Пусть z_* — координата точки A_* . В силу симметрии области G на ее границе имеется точка с координатой $-z_*$, поэтому интеграл I можно представить в виде

$$I = \int_{-z_*}^{z_*} \int_{S(z)} f(x, y, z) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

где $S(z)$ — плоская фигура, полученная сечением тела плоскостью, параллельной плоскости симметрии и находящейся от нее на расстоянии z .

Обозначим

$$I_1 = \int_{-z_*}^0 \int_{S(z)} f \gamma \, dx \, dy \, dz, \quad I_2 = \int_0^{z_*} \int_{S(z)} f \gamma \, dx \, dy \, dz,$$

Тогда $I = I_1 + I_2$. Сделаем в интеграле I_1 замену переменной $z = -z'$, получим

$$I_1 = - \int_{z_*}^0 \int_{S(-z')} f(x, y, -z') \gamma(x, y, -z') \, dx \, dy \, dz'.$$

Ввиду того, что плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии, $S(-z') = S(z')$, $\gamma(x, y, -z') = \gamma(x, y, z')$. Учитывая (10.12), получаем

$$I_1 = - \int_0^{z_*} \int_{S(z')} f(x, y, z') \gamma(x, y, z') \, dx \, dy \, dz' = -I_2.$$

Следовательно, $I = I_1 + I_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Функции $f = z$, $f = xz$ и $f = yz$ удовлетворяют условию (10.12), поэтому

$$z_c = m^{-1} \int_G z \, dm = 0, \quad J_{xz} = \int_G xz \, dm = 0, \quad J_{yz} = \int_G yz \, dm = 0.$$

Первое равенство означает, что центр масс лежит в плоскости симметрии, а два последних позволяют заключить, что в силу теоремы 2 ось Oz является главной осью инерции.

Определение

Главная ось инерции называется центральной, если она проходит через центр масс тела.

Теорема 4

Линия пересечения двух плоскостей симметрии является главной центральной осью инерции.

Доказательство

Рассмотрим плоскость S , перпендикулярную линии пересечения двух плоскостей симметрии S_1 и S_2 . Пусть O — точка пересечения плоскости S с этой линией, а OM_1 и OM_2 — лучи, образованные пересечением плоскостей S_1 и S_2 с плоскостью S (рис. 10.7). Оси OE_1 и OE_2 , перпендикулярные

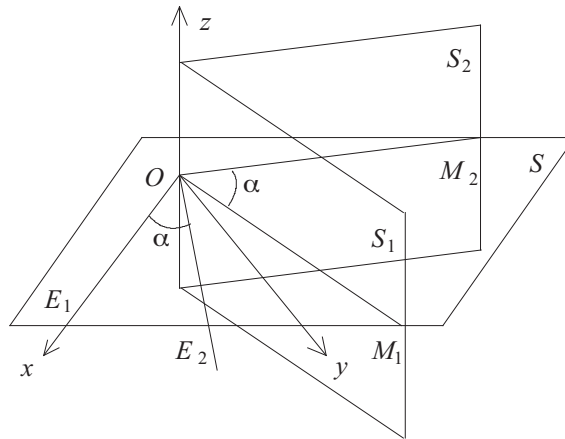


Рис. 10.7. Плоскости S , S_1 и S_2 .

лучам OM_1 и OM_2 и лежащие в плоскости S перпендикулярны плоскостям симметрии S_1 и S_2 и по теореме 3 являются главными осями инерции. Направим ось Oz по линии пересечения плоскостей симметрии, а ось Ox по оси OE_1 . Если угол α между плоскостями S_1 и S_2 является прямым, т. е. плоскости симметрии перпендикулярны, то ось Oy совпадет с осью OE_2 (см. рис. 10.7) и также, как ось Ox , будет главной осью инерции. Если $\alpha \neq \pi/2$, то эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, и любая ось, проходящая через точку O и лежащая в плоскости S , будет главной осью инерции. Следовательно, при любом отличном от нуля значении угла α , оси Ox и Oy будут главными осями инерции, поэтому главной осью инерции будет и ось Oz .

Ось Oz будет главной центральной осью инерции, так как из теоремы 3 следует, что центр масс принадлежит одновременно плоскостям S_1 S_2 , т. е. он принадлежит линии их пересечения.

Из теоремы 4 следует, что оси системы координат, выбранные в предыдущем разделе для призмы с квадратным поперечным сечением являются главными центральными осями инерции. Наличие

у такой призмы двух плоскостей симметрии, пересекающихся под углом $\alpha = \pi/4$, означает, что ее эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. Эти утверждения совпадают с теми выводами, которые были сделаны в предыдущем разделе после вычисления моментов инерции призмы.

При вычислении момента инерции твердого тела J_e относительно оси полезной может быть следующая формула

$$J_e = \int_G p^2 dm = \int_{G_1} p^2 dm + \int_{G_2} p^2 dm. \quad (10.13)$$

где G_1 и G_2 — непересекающиеся подобласти области G , занимаемой твердым телом, такие что $G = G_1 \cup G_2$. Формула (10.13) выражает аддитивность момента инерции.

Найдем момент инерции J_Δ однородного прямоугольного равнобедренного треугольника с помощью формулы (10.13). В разделе 10.3 получена формула для момента инерции J квадрата со стороной a и массой m относительно оси, лежащей в его плоскости и проходящей через его центр. В частности, $J = ma^2/12$ и для оси проходящей по диагонали квадрата. Диагональ квадрата делит его на два равных треугольника. Из формулы (10.13) следует, что $J = 2J_\Delta$. Следовательно, момент инерции прямоугольного равнобедренного треугольника относительно его гипотенузы определяется по формуле

$$J_\Delta = J/2 = ma^2/24 = m_\Delta a^2/12,$$

где $m_\Delta = m/2$ — масса треугольника, a — длина его катета.

10.5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Предположим, что две точки твердого тела A и B неподвижны. Тогда прямая AB является осью вращения. Оси $O\xi$ и Oz неподвижной $O\xi\eta\zeta$ и подвижной $Oxyz$ систем координат направим по оси вращения. Выберем ось Ox так, чтобы она проходила через центр масс C . (рис. 10.8). Эксцентриситетом называют расстояние $OC = h$ от оси вращения до центра масс. Обозначим a и b

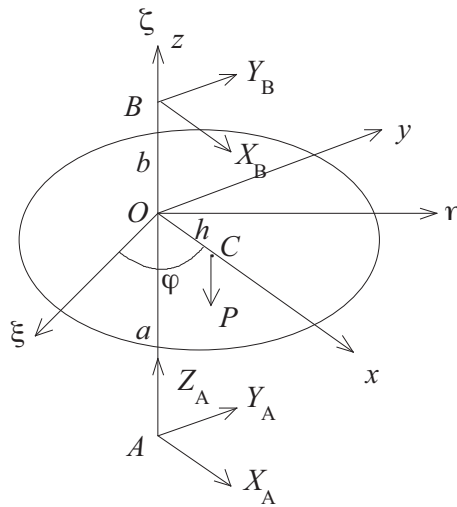


Рис. 10.8. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

расстояния от начала координат O до точек A и B . В точках A и B приложены силы реакции \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B , проекции которых на оси подвижной системы координат обозначены X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B . Предполагается, что проекция реакции на ось Oz в точке B равна нулю. Угол φ между осями $O\xi$ и Ox однозначно определяет положение твердого тела.

Случай, когда твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, закреплено на двух опорах довольно часто встречается на практике. Для вращающихся валов такими опорами часто служат два подшипника, дверь обычно висит на двух петлях.

Уравнения движения твердого тела имеют вид

$$m\mathbf{w}_c = \mathbf{F} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B, \quad (10.14)$$

где m — масса тела, \mathbf{w}_c — ускорение центра масс, \mathbf{F} и \mathbf{L} — главный вектор и главный момент внешних сил, \mathbf{L}_A и \mathbf{L}_B — моменты сил реакций, \mathbf{l} — момент количества движения. Первое уравнение (10.14) представляет собой теорему о движении центра масс, второе — теорему об изменении момента количества движения.

Спроектируем уравнения (10.14) на оси подвижной системы координат. Центр масс C движется по окружности, параллельной плоскости Oxy , поэтому проекции его ускорения имеют вид

$$w_x = -h\dot{\varphi}^2, \quad w_y = h\ddot{\varphi}, \quad w_z = 0.$$

Проектирование первого уравнения (10.14) с учетом последних равенств дает три следующих скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} -mh\dot{\varphi}^2 &= F_x + X_A + X_B, \\ mh\ddot{\varphi} &= F_y + Y_A + Y_B, \\ 0 &= F_z + Z_A. \end{aligned} \quad (10.15)$$

В рассматриваемой задаче проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат определяются по формулам

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \dot{\varphi},$$

поэтому равенства (10.5) для проекций вектора \mathbf{l} принимают вид

$$l_x = -J_{xz}\dot{\varphi}, \quad l_y = -J_{yz}\dot{\varphi}, \quad l_z = J_{zz}\dot{\varphi}.$$

При проектировании второго уравнения (10.14) на оси подвижной системы координат примем во внимание, что

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{l}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{l}}}{dt} = \frac{dl_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dl_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dl_z}{dt}\mathbf{k}.$$

Получим

$$\begin{aligned} -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 &= L_x + aY_A - bY_B, \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 &= L_y - aX_A + bX_B, \\ J_{zz}\ddot{\varphi} &= L_z. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Закон движения твердого тела находится из последнего уравнения (10.16), которое уже было получено в разделе, посвященном теореме об изменении момента количества движения системы материальных точек. Уравнения (10.15) и два оставшихся уравнения (10.16) используются для нахождения реакций в точках A и B .

Пример 1

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг главной оси инерции. Предположим, что на тело действует только сила веса \mathbf{P} , параллельная оси вращения (см. рис. 10.8). В этом случае

$$J_{xz} = J_{yz} = 0, \quad F_x = F_y = 0, \quad F_z = -P = -mg, \quad L_x = L_z = 0, \quad L_y = Ph,$$

и уравнения (10.15), (10.16) принимают вид

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= -mh\dot{\varphi}^2, & Y_A + Y_B &= 0, & Z_A - P &= 0, \\ aX_A - bX_B &= hP, & aY_A - bY_B &= 0, & J_{zz}\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что угловая скорость вращения тела $\omega = \dot{\varphi}$ есть величина постоянная. Из остальных уравнений находим проекции реакций: $Z_A = P$, $Y_A = Y_B = 0$,

$$X_A = \frac{hP}{a+b} - \frac{bmh\omega^2}{a+b}, \quad X_B = -\frac{hP}{a+b} - \frac{amh\omega^2}{a+b}.$$

Первые слагаемые в выражениях для X_A и X_B не зависят от угловой скорости ω и называются статическими составляющими реакций. Два других слагаемых называются динамическими составляющими. Они равны нулю при $\omega = 0$, но быстро растут с увеличением угловой скорости. Угловая скорость вращения многих турбин высока. Чтобы избежать преждевременного износа подшипников величину динамических составляющих реакций стремятся уменьшить путем уменьшения эксцентриситета h . Это уменьшение достигается балансировкой турбины с помощью присоединения к ней дополнительных масс. Однако, если ось вращения не является главной осью инерции тела, то даже в случае $h = 0$ возможно появление динамических составляющих реакций. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим еще один пример.

Пример 2

Найдем реакции в точках A и B , которые возникают при вращении твердого тела в поле силы тяжести вокруг неподвижной оси Cz , проходящей через центр масс тела C . Тогда $h = 0$, $F_x = F_y = 0$, $F_z = -P$, $L_x = L_y = L_z = 0$, и уравнения (10.15), (10.16) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= 0, & Y_A + Y_B &= 0, & Z_A - P &= 0, \\ aX_A - bX_B &= J_{xz}\dot{\varphi}^2, & aY_A - bY_B &= J_{yz}\dot{\varphi}^2, & J_{zz}\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Так же, как и в примере 1, тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$, а проекция реакции $Z_A = P$ имеет только статическую составляющую, однако остальные проекции реакций

$$X_A = -X_B = \frac{J_{xz}\omega^2}{a+b}, \quad Y_A = -Y_B = \frac{J_{yz}\omega^2}{a+b}$$

имеют только динамические составляющие. Для вычисления этих проекций необходимо найти моменты инерции J_{xz} и J_{yz} .

Пусть тело представляет собой однородный цилиндр длиной l и радиусом R , а ось вращения Cz составляет угол α с осью симметрии цилиндра Cz' (рис. 10.9).

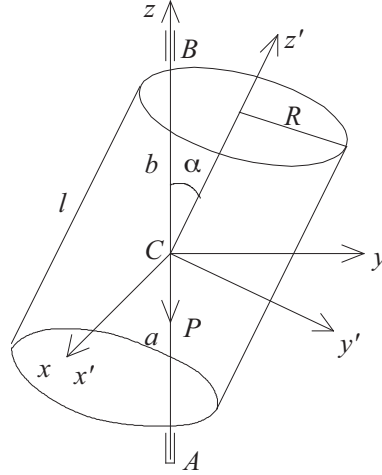


Рис. 10.9. Цилиндр, вращающийся вокруг неподвижной оси.

Из теорем 3 и 4 предыдущего раздела следует, что оси Cx' , Cy' и Cz' являются главными центральными осями инерции, т. е. $J_{x'y'} = J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0$. Главной осью инерции будет и ось Cx , совпадающая с осью Cx' , поэтому $J_{xy} = J_{xz} = 0$ в силу теоремы 2 раздела 10.4. Следовательно, для рассматриваемого цилиндра $X_A = X_B = 0$.

Для вычисления момента инерции J_{yz} воспользуемся формулами (10.10), заменив в них угол φ углом α . Учитывая, что $J_{y'z'} = 0$, получим

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int_G yz \, dm = \int_G (y' \cos \alpha + z' \sin \alpha)(-y' \sin \alpha + z' \cos \alpha) \, dm = \\ &= \int_G (z'^2 - y'^2) \sin \alpha \cos \alpha \, dm = (J_{y'y'} - J_{z'z'}) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

При определении моментов инерции $J_{y'y'}$ и $J_{z'z'}$ удобно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z' . Тогда

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} J_{y'y'} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} (x'^2 + z'^2) \gamma r \, dr \, d\varphi \, dz' = \gamma l \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \varphi \, d\varphi \, dr + \pi R^2 \gamma \int_{-l/2}^{l/2} z'^2 \, dz' = \\ &= \gamma \left(\frac{\pi l R^4}{4} + \frac{\pi l^3 R^2}{12} \right) = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right), \end{aligned}$$

$$J_{z'z'} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} (x'^2 + y'^2) \gamma r \, dr \, d\varphi \, dz' = 2\pi \gamma l \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi \gamma l \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

Подстановка выражений для $J_{y'y'}$ и $J_{z'z'}$ в формулу для J_{yz} дает следующий результат:

$$J_{yz} = m \left(\frac{l^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Момент инерции J_{yz} обращается в нуль вместе с проекциями реакций Y_A и Y_B , если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$. Равенства $J_{yz} = Y_A = Y_B = 0$ выполняются и в случае $l = \sqrt{3}R$. Для однородного цилиндра, как и для любого однородного тела вращения, эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. В случае $l = \sqrt{3}R$ этот эллипсоид превращается в сферу.

10.6. Действие ударной силы на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси

Предположим, что на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через точки A и B , действует ударная сила \mathbf{F} . Введем системы координат $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$, изображенные на рис. 10.8. Будем использовать обозначения из предыдущего раздела. Рассмотрим движение тела при $0 \leq t \leq \tau$, где τ — время удара. Тогда действием на тело неударных сил можно пренебречь, поэтому главным вектором внешних сил будет вектор ударной силы \mathbf{F} . При $0 \leq t \leq \tau$ уравнения движения тела

$$m\mathbf{w}_c = \mathbf{F} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B, \quad (10.17)$$

имеют такой же вид, как уравнения (10.14), однако в уравнениях (10.17) \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B — ударные реакции в точках A и B , возникающие под действием силы \mathbf{F} , а \mathbf{L}_A и \mathbf{L}_B — моменты этих реакций.

Пусть сила \mathbf{F} приложена в точке $M(x, y, z)$. Обозначим \mathbf{r} , \mathbf{a} и \mathbf{b} векторы, направленные из начала координат в точки M , A и B . Тогда

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{L}_A = \mathbf{a} \times \mathbf{R}_A, \quad \mathbf{L}_B = \mathbf{b} \times \mathbf{R}_B.$$

Проинтегрируем уравнения (10.17) по времени на интервале $[0, \tau]$, Получим

$$m\Delta\mathbf{v}_c = \mathbf{S} + \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B, \quad \Delta\mathbf{l} = \int_0^\tau (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt + \mathbf{a} \times \mathbf{S}_A + \mathbf{b} \times \mathbf{S}_B, \quad (10.18)$$

где

$$\Delta\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c(\tau) - \mathbf{v}_c(0), \quad \Delta\mathbf{l} = \mathbf{l}(\tau) - \mathbf{l}(0), \\ \mathbf{S} = \int_0^\tau \mathbf{F} dt, \quad \mathbf{S}_A = \int_0^\tau \mathbf{R}_A dt, \quad \mathbf{S}_B = \int_0^\tau \mathbf{R}_B dt.$$

Перемещения твердого тела за время удара малы. В соответствии с классической теорией удара будем считать, что положение тела при ударе не изменяется. Тогда вектор \mathbf{r} не зависит от t при $t \in [0, \tau]$ и

$$\int_0^\tau \mathbf{r} \times \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{S}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{v}_c = h\dot{\varphi}\mathbf{j}, \quad \mathbf{l} = (-J_{xz}\mathbf{i} - J_{yz}\mathbf{j} + J_{zz}\mathbf{k})\dot{\varphi},$$

а орты \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} за время удара не меняют направления, получаем

$$\Delta\mathbf{v}_c = h\Delta\omega\mathbf{j}, \quad \Delta\mathbf{l} = (-J_{xz}\mathbf{i} - J_{yz}\mathbf{j} + J_{zz}\mathbf{k})\Delta\omega, \quad \Delta\omega = \dot{\varphi}(\tau) - \dot{\varphi}(0).$$

Подстановка этих выражений в уравнения (10.18) дает уравнения

$$mh\Delta\omega\mathbf{j} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B, \\ (-J_{xz}\mathbf{i} - J_{yz}\mathbf{j} + J_{zz}\mathbf{k})\Delta\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{S} + \mathbf{a} \times \mathbf{S}_A + \mathbf{b} \times \mathbf{S}_B, \quad (10.19)$$

где \mathbf{S} — импульс ударной силы, \mathbf{S}_A и \mathbf{S}_B — импульсы ударных реакций.

Ударные реакции имеют большую величину, поэтому представляет интерес выяснение условий, при которых ударные реакции отсутствуют. В уравнениях (10.19) положим $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B = 0$ и спроектируем их на оси подвижной системы координат. Получим шесть скалярных уравнений

$$S_x = 0, \quad S_y = mh\Delta\omega, \quad S_z = 0, \quad -J_{xz}\Delta\omega = yS_z - zS_y \\ -J_{yz}\Delta\omega = zS_x - xS_z, \quad J_{zz}\Delta\omega = xS_y - yS_x,$$

из которых следует, что ударные реакции отсутствуют, если ударная сила параллельна оси Oy , $J_{yz} = 0$, а координаты x и z точки M определяются по формулам

$$x = \frac{J_{zz}\Delta\omega}{S_y} = \frac{J_{zz}}{mh} = l, \quad z = \frac{J_{xz}\Delta\omega}{S_y} = \frac{J_{xz}}{mh} = d.$$

Координата y точки M остается неопределенной, так как при переносе силы \mathbf{F} по линии ее действия ударные реакции не изменяются. Точка с координатам $x = l$, $y = 0$, $z = d$ называется центром удара.

Чтобы выяснить физический смысл величины d рассмотрим систему координат $Ox'y'z'$, оси которой параллельны осям подвижной системы координат $Oxyz$, а начало находится в точке $O'(0, 0, d)$ (рис. 10.10). Докажем, что ось $O'z'$ является главной осью инерции. Для этого в силу теоремы 2 о

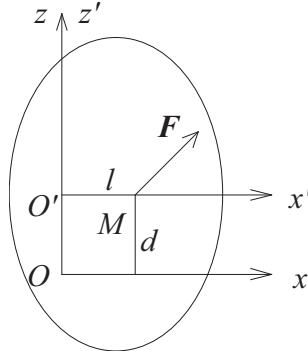


Рис. 10.10. Центр удара.

моментах инерции достаточно показать, что $J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0$. Действительно,

$$J_{y'z'} = \int_G y'z' dm = \int_G y(z-d) dm = J_{yz} - md y_c = 0,$$

$$J_{x'z'} = \int_G x'z' dm = \int_G x(z-d) dm = J_{xz} - md x_c = 0,$$

так как $J_{yz} = y_c = 0$, $J_{xz} = mdh$, $x_c = h$.

Если тело имеет плоскость симметрии S , перпендикулярную оси z , то по теореме 3 о моментах инерции центр тяжести $C \in S$ а ось z является главной осью инерции. Следовательно, $Ox \in S$, так как $C \in Ox$, а по теореме 2 $J_{xz} = 0$. Поэтому $d = 0$, и центр удара лежит на оси Ox на расстоянии l от точки O (см. рис. 10.10). Физический смысл величины $l = J_{zz}/(mh)$ прояснится в следующем разделе.

10.7. Физический маятник

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы веса P . Неподвижную и подвижную системы координат и обозначения выберем такими же как в предыдущих двух разделах (рис. 10.11,а).

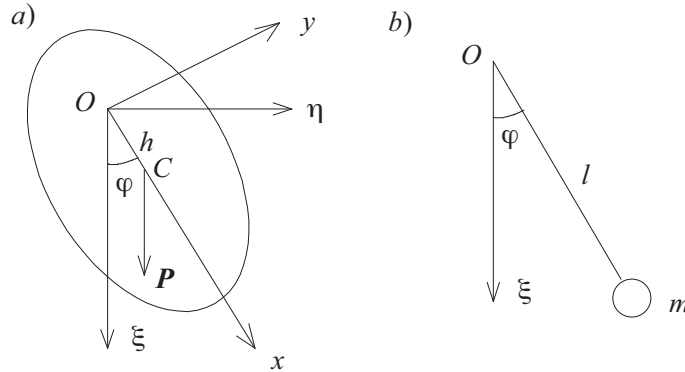


Рис. 10.11. Физический и математический маятники.

Ограничимся определением закона движения тела $\varphi = \varphi(t)$. Для этого достаточно решить третье из уравнений (10.16), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -hP \sin \varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{mgh}{J_{zz}} \sin \varphi = 0,$$

где m — масса тела. Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника (рис. 10.11,б)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

замечаем, что оба уравнения совпадают при

$$l = \frac{J_{zz}}{mh}$$

Величина $l = J_{zz}/mh$ называется *приведенной длиной* физического маятника. Расстояние от оси вращения до центра удара, найденное в предыдущем разделе, равно приведенной длине физического маятника.

В качестве примера найдем приведенную длину для однородной прямоугольной пластины шириной $2a$ длиной $2b$ и толщиной c , вращающейся вокруг оси проходящей через ее верхний край (рис. 10.12). Разобьем пластину на N частей отрезками, параллельными оси Oz . Обозначим Δx_i

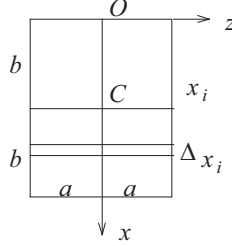


Рис. 10.12. Прямоугольная пластина.

длину i -ой части. Приближенное выражение для момента инерции пластины относительно оси Oz имеет вид

$$J_{zz} \simeq \sum_{i=1}^N x_i^2 \Delta m_i,$$

где x_i — расстояние от оси вращения до центра масс i -ой части пластины, $\Delta m_i = 2\gamma ac \Delta x_i$ — масса этой части, γ — массовая плотность. Переход к пределу при $N \rightarrow \infty$, $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ дает точное значение для J_{zz} , превращая интегральную сумму в интеграл:

$$J_{zz} = 2\gamma ac \int_0^{2b} x^2 dx = \frac{16\gamma acb^3}{3} = \frac{4mb^2}{3}.$$

Здесь m — масса пластины. Принимая во внимание, что для пластины $h = b$, получаем

$$l = \frac{J_{zz}}{mb} = \frac{4b}{3}.$$

Именно на таком расстоянии от точки O на оси Ox находится центр удара для пластины.

В случае малых колебаний ($\varphi \ll 1$) период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{zz}}{hmg}}.$$

Период малых колебаний пластины

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4b}{3g}}.$$

Радиус инерции ρ_0 твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz удовлетворяет уравнению $J_{zz} = m\rho_0^2$. Очевидно,

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{J_{zz}}{m}}.$$

Для материальной точки радиус инерции совпадает с расстоянием от точки до оси вращения.

Из теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей вытекает, что

$$J_{zz} = J_c + mh^2, \quad \text{или} \quad m\rho_0^2 = m\rho_c^2 + mh^2,$$

где J_c и ρ_c — момент инерции и радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси Oz . Для материальной точки $J_c = \rho_c = 0$. Принимая во внимание формулы для радиусов инерции, получаем

$$l = \frac{J_{zz}}{mh} = \frac{m\rho_0^2}{mh} = \frac{\rho_c^2}{h} + h. \quad (10.20)$$

Из формулы (10.20) следует неравенство $l \geq h$, которое означает, что приведенная длина физического маятника больше, чем расстояние от оси вращения до центра масс тела. Равенство $l = h$ имеет место только для материальной точки, т. е. для математического маятника.

Для конкретного твердого тела приведенная длина l зависит только от h , так как величина ρ_c полностью определяется формой тела и распределением масс. Пусть S — плоскость проходящая через центр масс физического маятника и перпендикулярная оси вращения. Точкой подвеса маятника будем называть точку пересечения этой плоскости с осью вращения. Для всех точек подвеса, лежащих на окружности с центром в точке C , приведенная длина и период малых колебаний физического маятника будут одинаковы (рис. 10.13,а).

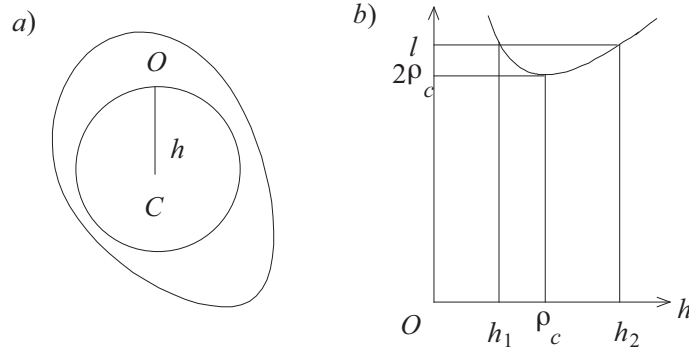


Рис. 10.13. Точки подвеса физического маятника.

Для того, чтобы построить график зависимости $l(h)$, заданной формулой (10.20), найдем производную функции $l(h)$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dl}{dh} = -\frac{\rho_c^2}{h^2} + 1 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что в точке $h = \rho_c$ функция $l(h)$ имеет минимум, причем $l(\rho_c) = 2\rho_c$ (рис. 10.13,б).

Любому значению приведенной длины физического маятника $l > 2\rho_c$ соответствуют два различных значения h : h_1 и h_2 (см. рис. 10.13,б). Таким образом, на плоскости S имеются две окружности с радиусами h_1 и h_2 , которым соответствует одна и та же приведенная длина l . Если $l = 2\rho_c$, то $h_1 = h_2$.

Теорема Гюйгенса

Пусть O_1 и C — точка подвеса и центр масс физического маятника, а l_1 — его приведенная длина. На луче O_1C отложим отрезок O_1O_2 длиной l_1 . Тогда приведенная длина физического маятника l_2 с точкой подвеса O_2 равна l_1 .

Доказательство

Обозначим h_1 и h_2 длины отрезков O_1C и CO_2 (рис. 10.14). Учитывая, что

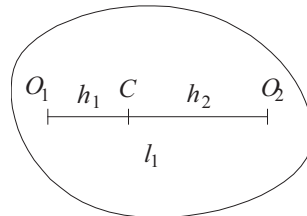


Рис. 10.14. Тело с двумя точками подвеса.

$$h_2 = l_1 - h_1 = \frac{\rho_c^2}{h_1},$$

получаем

$$l_2 = \frac{\rho_c^2}{h_2} + h_2 = h_1 + \frac{\rho_c^2}{h_1} = l_1.$$

10.8. Вращение твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести

Пусть твердое тело массой m вращается вокруг неподвижной точки O в поле силы тяжести. Выберем точку O в качестве начала координат неподвижной и подвижной систем координат с ортами $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно (рис. 10.15). Векторы \mathbf{i} и \mathbf{j} лежат в плоскости S , векторы

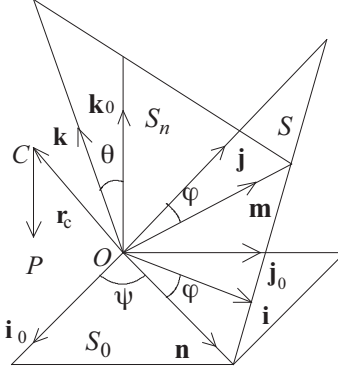


Рис. 10.15. Неподвижная и подвижная системы координат.

\mathbf{i}_0 и \mathbf{j}_0 — в плоскости S_0 , а векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 — в плоскости S_n . Единичные векторы \mathbf{m}, \mathbf{n} направим по линиям пересечения плоскостей S и S_n , S и S_0 . Положение твердого тела определяется тремя углами Эйлера φ, ψ, θ , образованными ортами \mathbf{n} и \mathbf{i}, \mathbf{i}_0 и \mathbf{n}, \mathbf{k}_0 и \mathbf{k} соответственно (см. рис. 10.15). Более подробно кинематика твердого тела рассмотрена в главе 2.

Орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ направим вдоль главных осей инерции твердого тела. Силы тяжести заменим эквивалентной силой веса \mathbf{P} , приложенной в центре масс тела C . Положение точки C определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = x_c \mathbf{i} + y_c \mathbf{j} + z_c \mathbf{k}.$$

Для вывода уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L},$$

где

$$\mathbf{l} = A\omega_x \mathbf{i} + B\omega_y \mathbf{j} + C\omega_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{P} = -(\mathbf{r}_c \times \mathbf{k}_0)P,$$

A, B и C — главные моменты инерции, ω_x, ω_y и ω_z — проекции угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\psi} \mathbf{k}_0 + \dot{\theta} \mathbf{n}$$

на оси подвижной системы координат,

$$\mathbf{k}_0 = \gamma_x \mathbf{i} + \gamma_y \mathbf{j} + \gamma_z \mathbf{k},$$

γ_x, γ_y и γ_z — направляющие косинусы, $P = mg$.

Принимая во внимание, что орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ зависят от времени, теорему об изменении момента количества движения запишем в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{l}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = -(\mathbf{r}_c \times \mathbf{k}_0)P,$$

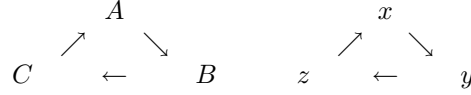
где \tilde{d}/dt — относительная производная. Проектируя последнее равенство на оси подвижной системы координат, с учетом формул

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ A\omega_x & B\omega_y & C\omega_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_c \times \mathbf{k}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_c & y_c & z_c \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix},$$

получаем уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y \omega_z &= (z_c \gamma_y - y_c \gamma_z)P, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z \omega_x &= (x_c \gamma_z - z_c \gamma_x)P, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x \omega_y &= (y_c \gamma_x - x_c \gamma_y)P, \end{aligned} \tag{10.21}$$

Второе и третье уравнения получаются из первого с помощью циклических перестановок



Уравнения движения твердого тела можно получить разными способами. При использовании первого способа направляющие косинусы и проекции угловой скорости выражаются через углы Эйлера (см. рис. 10.15):

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_0 = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{k} \cos \theta + \mathbf{m} \sin \theta) = \sin \varphi \sin \theta, \\ \gamma_y &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_0 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{k} \cos \theta + \mathbf{m} \sin \theta) = \cos \varphi \sin \theta, \\ \gamma_z &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 = \cos \theta, \\ \omega_x &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i} = \dot{\psi} \gamma_x + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_y = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{j} = \dot{\psi} \gamma_y - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{10.22}$$

Подстановка формул (10.22) в уравнения (10.21) дает громоздкую систему трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для определения неизвестных углов Эйлера φ , ψ и θ .

Другой способ позволяет свести задачу к решению системы шести дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными ω_x , ω_y , ω_z , γ_x , γ_y и γ_z . В качестве трех первых уравнений берутся уравнения Эйлера (10.21). Три дополнительных уравнения выводятся с помощью дифференцирования тождества $\mathbf{k}_0 = 1$ и проектирования полученного векторного соотношения на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{k}_0}{dt} &= \frac{d\tilde{\mathbf{k}}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_0 = 0, \\ \dot{\gamma}_x + \omega_y \gamma_z - \omega_z \gamma_y &= 0, \quad \dot{\gamma}_y + \omega_z \gamma_x - \omega_x \gamma_z = 0, \quad \dot{\gamma}_z + \omega_x \gamma_y - \omega_y \gamma_x = 0.\end{aligned}\tag{10.23}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (10.21), (10.23) достаточно построить шесть ее независимых интегралов. В общем случае эта система имеет три таких интеграла. Существование одного из них

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = 1,$$

следует из равенства $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_0 = 1$. Этот интеграл называется геометрическим или тривиальным интегралом.

Умножая равенство $d\mathbf{l}/dt = \mathbf{L}$ скалярно на вектор \mathbf{k}_0 и принимая во внимание, что

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{k}_0 = -P(\mathbf{r}_c \times \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{k}_0 = 0,$$

получаем

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{k}_0 = A\omega_x \gamma_x + B\omega_y \gamma_y + C\omega_z \gamma_z = D_1,$$

где D_1 — произвольная постоянная, зависящая от начальных условий. Функция в левой части полученного равенства является проекцией момента количества движения на орт \mathbf{k}_0 неподвижной системы координат и называется интегралом моментов.

В рассматриваемой задаче выполнены условия существования интеграла энергии из главы 8, так как связи стационарны, а сила веса \mathbf{P} , действующая на тело, потенциальна, причем потенциальная энергия

$$\Pi = mgh = P\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{k}_0 = (x_c \gamma_x + y_c \gamma_y + z_c \gamma_z)P$$

не зависит от времени.

Найдем кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Для этого разобьем тело на N частей с массами Δm_i и будем рассматривать каждую такую часть как материальную точку. Кинетическая энергия i -й части определяется по формуле

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2,$$

где v_i — величина скорости произвольной точки M_i этой части тела. По формуле Эйлера $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где \mathbf{r}_i — вектор, направленный из точки O в точку M_i (рис. 10.16).

Длину вектора \mathbf{v}_i запишем в виде

$$v_i = \omega r_i \sin \alpha_i = \omega p_i,$$

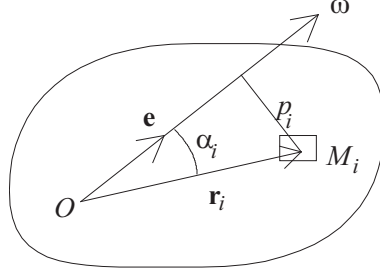


Рис. 10.16. Тело с неподвижной точкой.

где p_i — расстояние от точки M_i до оси, проходящей через точку O параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$ (см. рис. 10.16). Точное выражение для кинетической энергии T твердого тела получается из приближенного выражения

$$T^{(N)} = \sum_{i=1}^N \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N p_i^2 \Delta m_i$$

путем предельного перехода:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_G p^2 dm = \frac{1}{2} J_e \omega^2.$$

Здесь J_e — момент инерции относительно оси, направление которой задано единичным вектором

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{\omega_x}{\omega} \mathbf{i} + \frac{\omega_y}{\omega} \mathbf{j} + \frac{\omega_z}{\omega} \mathbf{k}.$$

Учитывая, что Ox , Oy и Oz — главные оси инерции, получаем

$$J_e = A \left(\frac{\omega_x}{\omega} \right)^2 + B \left(\frac{\omega_y}{\omega} \right)^2 + C \left(\frac{\omega_z}{\omega} \right)^2,$$

$$T = \frac{1}{2} J_e \omega^2 = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2).$$

Из закона сохранения энергии, записанного в виде $E = T + \Pi = D_2/2$, где D_2 — произвольная постоянная, следует, что

$$A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2 + 2P(x_c \gamma_x + y_c \gamma_y + z_c \gamma_z) = D_2.$$

Функция, стоящая в левой части последнего равенства называется интегралом энергии.

10.9. Случай Эйлера.

Предположим, что твердое тело с неподвижной точкой движется в поле силы тяжести, причем центр масс тела C совпадает с неподвижной точкой O . Тогда $\mathbf{r}_c = 0$ и, следовательно, $\mathbf{L} = 0$, т. е. в рассматриваемом случае, который называется случаем Эйлера, движение твердого тела происходит по инерции.

Случай Эйлера приобрел большое практическое значение с появлением искусственных спутников Земли. Вращение спутника вокруг его центра масс происходит обычно под действием очень малых моментов внешних сил и поэтому мало отличается от движения по инерции.

При $\mathbf{r}_c = 0$ уравнения Эйлера (10.21) принимают вид

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_x + (C - B) \omega_y \omega_z &= 0, \\ B \dot{\omega}_y + (A - C) \omega_x \omega_z &= 0, \\ C \dot{\omega}_z + (B - A) \omega_x \omega_y &= 0. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Момент количества движения $\mathbf{l} = A \omega_x \mathbf{i} + B \omega_y \mathbf{j} + C \omega_z \mathbf{k}$ в силу равенства $\mathbf{L} = 0$ является постоянным вектором. Следовательно, постоянным будет и квадрат его длины:

$$l^2 = A^2 \omega_x^2 + B^2 \omega_y^2 + C^2 \omega_z^2 = D_1.$$

Потенциальная энергия $\Pi = P \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{k}_0 = 0$, поэтому

$$2E = 2T = A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2 = D_2.$$

Вместо D_1 и D_2 введем новые произвольные постоянные D и μ такие, что $D_1 = D^2\mu^2$, $D_2 = D\mu^2$ и запишем интегралы системы (10.24) в виде

$$\begin{aligned} A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 &= D^2\mu^2, \\ A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 &= D\mu^2. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Из второго равенства (10.25) следует, что $D \geq 0$.

Интегралы (10.25) можно получить непосредственно из уравнений (10.24). Первый из них находится после умножения первого, второго и третьего уравнений на $A\omega_x$, $B\omega_x$ и $C\omega_z$ соответственно, с последующим их сложением и интегрированием по времени. При получении второго интеграла уравнения умножаются на ω_x , ω_y и ω_z .

Умножим второе равенство (10.25) на C и вычтем из первого равенства, а затем умножим второе равенство на A и вычтем из него первое. Получим

$$A(A-C)\omega_x^2 + B(B-C)\omega_y^2 = \mu^2 D(D-C), \quad B(A-B)\omega_y^2 + C(A-C)\omega_z^2 = \mu^2 D(A-D). \quad (10.26)$$

Предположим, что главные моменты инерции A , B и C имеют разные величины. Без ограничения общности можно считать, что

$$C < B < A.$$

Тогда из формул (10.26) и неравенства $D \geq 0$ следует, что $D - C \geq 0$, $A - D \geq 0$,

$$C \leq D \leq A.$$

Если $D = C$, то из формул (10.26) вытекает, что $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \pm\mu$. Таким образом, наименьшему возможному значению D , соответствует вращение твердого тела вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью.

В случае $D = A$ имеем $\omega_y = \omega_z = 0$, $\omega_x = \pm\mu$, и тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси Ox .

Покажем, что при $D = B$ уравнения Эйлера (10.24) тоже имеют простое аналитическое решение. В этом случае из формул (10.26) следует, что

$$\omega_x = \pm\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}(\mu^2 - \omega_y^2)}, \quad \omega_z = \pm\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}(\mu^2 - \omega_y^2)}, \quad (10.27)$$

Подставив выражения (10.27) для ω_x и ω_z во второе уравнение (10.24), получим

$$\dot{\omega}_y = \pm\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}(\mu^2 - \omega_y^2).$$

Если ввести новую неизвестную функцию $z = \omega_y/\mu$, то последнее уравнение примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \pm S(1 - z^2), \quad S = \mu\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}. \quad (10.28)$$

Искомые проекции угловой скорости связаны с функцией z формулами

$$\omega_x = \pm\mu\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}(1 - z^2)}, \quad \omega_y = \mu z, \quad \omega_z = \pm\mu\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(B-C)}(1 - z^2)}.$$

Уравнение (10.28) имеет частные решения $z = \pm 1$, для которых $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \pm\mu$. Эти решения описывают вращения твердого тела с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oy .

В случае $|z| \neq 1$ уравнение (10.28) имеет общее решение

$$z = \pm \operatorname{th} \tau, \quad \tau = S(t - t_0),$$

которое находится с помощью разделения переменных. Здесь t_0 — третья произвольная постоянная. Формулы для проекций угловой скорости принимают вид

$$\omega_x = \pm\mu\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(B-C)}} \operatorname{ch}^{-1} \tau, \quad \omega_y = \pm\mu \operatorname{th} \tau, \quad \omega_z = \pm\mu\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(B-C)}} \operatorname{ch}^{-1} \tau.$$

Отметим, что при $t \rightarrow \infty$

$$\omega_x \rightarrow 0, \quad \omega_y \rightarrow \pm\mu, \quad \omega_z \rightarrow 0,$$

т. е. с течением времени движение твердого тела приближается к вращению вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью.

Решение задачи о движении твердого тела на этом не заканчивается. Полная информация о движении тела будет получена после нахождения углов Эйлера как функций времени.

Воспользуемся тем, что в рассматриваемом случае момент количества движения \mathbf{l} является постоянным вектором и выберем неподвижную систему координат так, чтобы $\mathbf{k}_0 = \mathbf{l}/l$. В этом случае выражения для углов φ , ψ и θ будут иметь наиболее простой вид. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} l_x &= l\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i} = l\gamma_x = l \sin \varphi \sin \theta = A\omega_x, \\ l_y &= l\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j} = l\gamma_y = l \cos \varphi \sin \theta = B\omega_y, \\ l_z &= l\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k} = l\gamma_z = l \cos \theta = C\omega_z, \end{aligned}$$

(см. (10.22)) находим связь между углами φ , θ и известными проекциями угловой скорости:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A\omega_x}{B\omega_y}, \quad \cos \theta = \frac{C\omega_z}{l} = \frac{C\omega_z}{\mu D}. \quad (10.29)$$

Для определения угла ψ воспользуемся формулами (10.22) для проекций угловой скорости

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi.$$

Исключив из этих равенств $\dot{\theta}$, получим

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi}{\sin \theta}, \quad \psi = \int_0^t \frac{\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi}{\sin \theta} dt + \psi_0.$$

Мы получили решение задачи, зависящее от четырех произвольных постоянных D , μ , t_0 и ψ_0 . Общее решение рассматриваемой системы уравнений шестого порядка зависит от шести произвольных постоянных. Отсутствие в полученном решении двух произвольных постоянных связано со специальным выбором неподвижной системы координат. Так, например, если в задаче о движении материальной точки выбрать начало координат, совпадающее с ее начальным положением, то решение будет зависеть только от трех начальных скоростей.

Если $C < D < B$ или $B < D < A$, то решение задачи находится в квадратурах. Проекция угловой скорости и углы Эйлера выражаются через эллиптические функции и интегралы от них.

10.10. Геометрическая интерпретация Пуансо

Следуя Пуансо, изучим движение эллипсоида инерции твердого тела в случае Эйлера. Эллипсоид жестко связан с телом, поэтому положение эллипсоида однозначно определяет положение тела.

Теорема Пуансо

При движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера эллипсоид инерции тела катится без скольжения по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору момента количества движения \mathbf{l} .

Доказательство

Пусть S — одна из двух плоскостей, перпендикулярных к вектору \mathbf{l} и касательных к эллипсоиду, P — точка касания, Q — точка пересечения с плоскостью S прямой, проходящей через неподвижную точку O параллельно вектору \mathbf{l} , \mathbf{n} — нормаль в точке P (рис. 10.17).

Доказательство будет проведено в два этапа. Сначала мы покажем, что качение происходит без проскальзывания. Затем убедимся в том, что плоскость S неподвижна.

Качение эллипсоида по плоскости происходит без проскальзывания, если равна нулю скорость точки P , которая определяется по формуле

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тела. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — вектор, направленный из точки O в точку P .

Координаты точки P удовлетворяют уравнению эллипсоида инерции

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

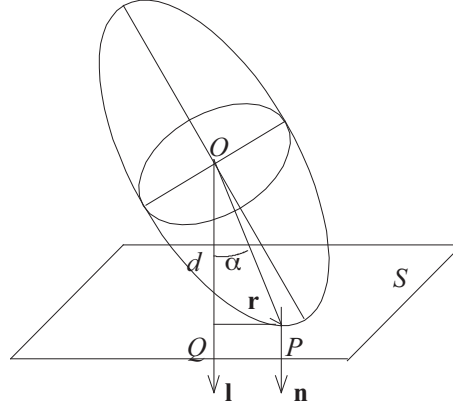


Рис. 10.17. Эллипсоид инерции.

Нормаль к эллипсоиду в точке P определяется по формуле

$$\mathbf{n} = \text{grad } f = 2(Ax\mathbf{i} + By\mathbf{j} + Cz\mathbf{k}).$$

С другой стороны,

$$\mathbf{n} = 2\beta\mathbf{l} = 2\beta(A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}),$$

так как векторы \mathbf{n} и \mathbf{l} ортогональны плоскости S . Из единственности компонент вектора \mathbf{n} вытекают равенства

$$x = \beta\omega_x, \quad y = \beta\omega_y, \quad z = \beta\omega_z, \quad (10.30)$$

которые означают, что $\mathbf{r} = \beta\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$.

В случае Эйлера вектор \mathbf{l} не меняет своего направления, поэтому для доказательства неподвижности плоскости S достаточно доказать, что длина d отрезка OQ является постоянной величиной. Воспользуемся формулой

$$d = r \cos \alpha = \beta\omega \cos \alpha.$$

Угол между векторами \mathbf{l} и $\boldsymbol{\omega}$ равен α , так как вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллелен вектору \mathbf{r} . Следовательно,

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = l\omega \cos \alpha = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2.$$

Принимая во внимание формулы (10.25), получаем

$$l\omega \cos \alpha = \mu^2 D, \quad l = \mu D, \quad \omega \cos \alpha = \mu, \quad d = \beta\mu.$$

Подстановка выражений (10.30) в уравнение $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ дает равенство

$$\beta^2(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = 1,$$

из которого вытекает, что

$$\beta = \frac{1}{\mu\sqrt{D}}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Теорема доказана.

По ходу доказательства прояснился смысл постоянных μ и D , введенных в предыдущем разделе. Формула $\mu = \omega \cos \alpha$ означает, что μ является проекцией угловой скорости на нормаль к поверхности S . Постоянная $D = 1/d^2$, определяющая качественный характер движения, обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки O до плоскости S .

Связь между главными моментами инерции и длинами a , b , c главных полуосей эллипсоида инерции имеет вид

$$A = 1/a^2, \quad B = 1/b^2, \quad C = 1/c^2.$$

Пусть $C < B < A$. Тогда a , b и c будут соответственно малой, средней и большой полуосями эллипсоида, поэтому из геометрических соображений вытекает неравенство $a \leq d \leq c$. Последнее неравенство эквивалентно условию $C \leq D \leq A$, которое было получено другим способом в предыдущем разделе.

Если $D = C$ или $D = A$, то $d = c$ или $d = a$, и точка касания P совпадает с концом наибольшей или наименьшей полуоси. В этом случае эллипсоид будет вращаться вокруг соответствующей оси с постоянной угловой скоростью, так как $\alpha = 0$ и $\omega = \mu$. В случае $D = B$, наряду с вращением вокруг

средней полуоси, возможны и такие движения тела, при которых точка P движется по поверхности эллипсоида.

Кривые, которые точка P описывает на эллипсоиде и неподвижной плоскости S при движении твердого тела, называются полодией и герполодией. Полодии схематически изображены на рис. 10.18. В случаях $D = C$ и $D = A$ полодии превращаются в точки. Жирными линиями пред-

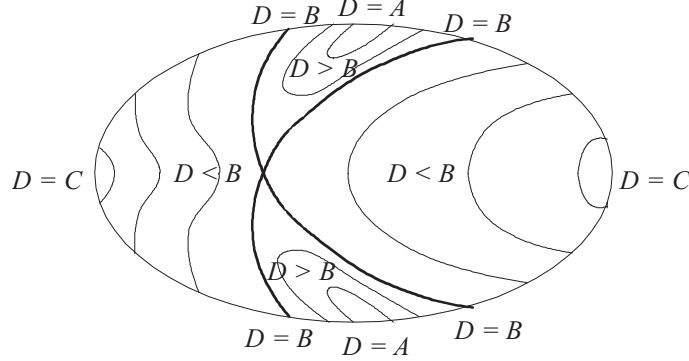


Рис. 10.18. Полодии.

ставлены полодии, соответствующие $D = B$. Они делят поверхность эллипсоида на части, в каждой из которых либо $D < B$, либо $D > B$. На пересечениях жирных линий находятся концы средней полуоси.

Результаты качественного анализа движения твердого тела, полученные с помощью геометрической интерпретации Пуансо, полностью соответствуют аналитическим результатам, приведенным в предыдущем разделе.

10.11. Случай Лагранжа

Общее решение системы уравнений (10.21), (10.23), описывающих движение твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием силы тяжести, может быть найдено в квадратурах, не только при $x_c = y_c = z_c = 0$, но и в том случае, когда $x_c = y_c = 0$, $A = B$. Последние два равенства означают, что эллипсоид инерции твердого тела с центром в точке O является эллипсоидом вращения, а центр тяжести тела C лежит на оси симметрии эллипсоида. Этот случай движения твердого тела был рассмотрен Лагранжем и носит его имя. Без ограничения общности можно считать, что $z_c > 0$.

В случае Лагранжа из последнего уравнения (10.21) вытекает, что

$$\dot{\omega}_z = 0, \quad \omega_z = \omega_0,$$

а интеграл энергии и интеграл моментов принимают вид

$$\begin{aligned} A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_0^2 + 2Pz_c\gamma_z &= D_2, \\ A(\omega_x\gamma_x + \omega_y\gamma_y) + C\omega_0\gamma_z &= D_1. \end{aligned}$$

Подставив в два последних равенства выражения (10.22) для проекций угловой скорости и направляющих косинусов, получим

$$\begin{aligned} A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C\omega_0^2 + 2Pz_c \cos \theta &= D_2, \\ A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\omega_0 \cos \theta &= D_1. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a = \frac{D_2 - C\omega_0^2}{A}, \quad m = \frac{2Pz_c}{A} > 0, \quad b = \frac{D_1}{A}, \quad n = \frac{C\omega_0}{A} \quad (10.31)$$

и запишем интегралы в следующем виде:

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = a - m \cos \theta, \quad \dot{\psi} \sin^2 \theta = b - n \cos \theta. \quad (10.32)$$

Исключив из них $\dot{\psi}$, получим уравнение

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = (a - m \cos \theta) \sin^2 \theta - (b - n \cos \theta)^2.$$

После замены переменной $u = \cos \theta$ уравнение принимает вид

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad f(u) = (a - mu)(1 - u^2) - (b - nu)^2. \quad (10.33)$$

Покажем, что в интервале $[-1, 1]$ функция $f(u)$ имеет два корня. Пусть

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0, \quad u_0 = \cos \theta_0, \quad -1 \leq u_0 \leq 1.$$

Тогда в силу (10.33) выполняется неравенство $f(u_0) = \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_0 \geq 0$. Из последнего неравенства и неравенств $f(\pm 1) = -(b - nu)^2 \leq 0$ следует, что в каждом из интервалов $[-1, u_0]$ и $[u_0, 1]$ имеется нечетное число корней уравнения $f(u) = 0$. Уравнение $f(u) = 0$ имеет не более трех корней, поэтому в каждом из интервалов содержится по одному корню: $u_1 \in [-1, u_0]$, $u_2 \in [u_0, 1]$. Ввиду того, что $f(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$, третий корень u_3 удовлетворяет неравенству $u_3 \geq 1$.

График функции $f(u)$ для $a = b = 0.5$, $m = n = 1$ изображен на рис. 10.19.

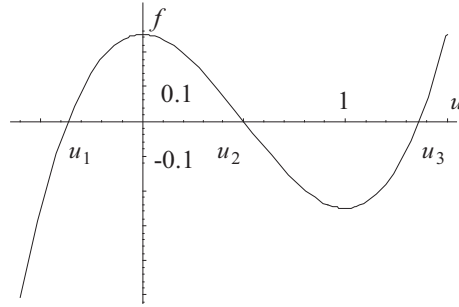


Рис. 10.19. График функции $f(u)$.

Движение твердого тела может происходить при условиях

$$|u| \leq 1, \quad f(u) = \dot{u}^2 \geq 0,$$

которые выполняются, если $u_1 \leq u \leq u_2$. Поэтому угол θ удовлетворяет неравенству

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1,$$

где $\cos \theta_1 = u_1$, $\cos \theta_2 = u_2$.

Для геометрической интерпретации движения рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в неподвижной точке O . Пусть P — точка пересечения оси Oz подвижной системы координат со сферой. Последнее неравенство означает, что при движении твердого тела точка P будет находиться между двумя параллелями, соответствующими $\theta = \theta_2$ и $\theta = \theta_1$. На рис. 10.20 изображены возможные типы кривых, описываемых точкой P на единичной сфере.

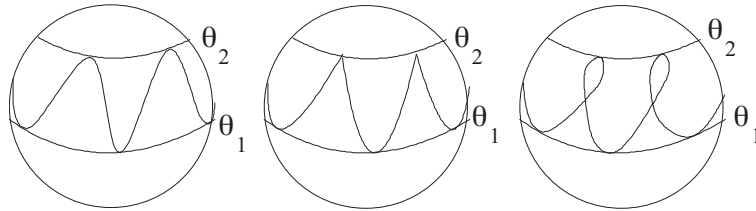


Рис. 10.20. Кривые, описываемых точкой P на единичной сфере.

Если $u_1 = u_2$, т. е. уравнение $f(u) = 0$ имеет кратный корень, то движение возможно при единственном значении $u = u_0 = u_1 = u_2$ и при единственном значении угла $\theta = \theta_0$ таким, что $\cos \theta_0 = u_0$. В этом случае кривая, описываемая точкой P на единичной сфере, представляет собой параллель, соответствующую $\theta = \theta_0$, а ось Oz подвижной системы координат принадлежит поверхности кругового конуса с углом полураствора θ_0 .

Из второй формулы (10.32) и последней формулы (10.22) следует, что в рассматриваемом случае производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ не зависят от времени:

$$\dot{\psi} = \frac{b - n \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 - \dot{\psi} \cos \theta_0 = \dot{\varphi}_0, \quad (10.34)$$

а углы ψ и φ являются линейными функциями времени. Движение твердого тела с неподвижной точкой при котором

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0,$$

называется *регулярной прецессией*. Частным случаем регулярной прецессии является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью. Этому случаю соответствует $\dot{\psi}_0 = 0$.

Если $z_c = 0$, то движение твердого тела в случае Лагранжа будет регулярной прецессией. Действительно, случай Лагранжа при $z_c = 0$ является одновременно случаем Эйлера, для которого $A = B$. Учитывая, что $\omega_z = \omega_0$, по второй формуле (10.29) получаем

$$\cos \theta = \frac{C\omega_0}{\mu D}.$$

Следовательно, угол θ не зависит от времени. Из формул (10.34) вытекает, что при $\theta = \theta_0$ два других угла Эйлера являются линейными функциями времени. Тем самым доказано, что в случае $A = B$, $x_c = y_c = z_c = 0$ движение твердого тела с неподвижной точкой представляет собой регулярную прецессию.

10.12. Псевдoreгулярная прецессия. Элементарная теория гироскопа

В случае Лагранжа вращение твердого тела вокруг неподвижной точки имеет характер регулярной прецессии, если $u_1 = u_2$. Предположим, что $u_2 - u_1 \ll 1$. Тогда параллели $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ будут близки, и движение тела будет мало отличаться от регулярной прецессии. Такое движение называется псевдoreгулярной прецессией.

Пусть в начальный момент угловая скорость тела равна ω_0 и направлена по оси z , а $\theta_0 = \theta(0) \neq 0$. Тогда $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 > 0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Выясним, при каких условиях движение твердого тела в этом случае будет псевдoreгулярной прецессией.

Полагая $t = 0$ в формулах (10.32), получаем

$$b = n \cos \theta_0, \quad a = m \cos \theta_0.$$

Обозначим $u_0 = \cos \theta_0$. Тогда $a = mu_0$, $b = nu_0$, и функция $f(u)$ из формулы (10.33) принимает вид

$$f(u) = m(u_0 - u)(1 - u^2) - n^2(u_0 - u)^2.$$

Следовательно, u_0 является корнем уравнения $f(u) = 0$ и совпадает либо с корнем u_1 , либо с корнем u_2 , так как $|u_0| \leq 1$.

Уравнение $f(u) = 0$ можно записать в виде

$$(u_0 - u)g(u) = 0, \quad g(u) = \varepsilon(1 - u^2) - u_0 + u, \quad \varepsilon = m/n^2 > 0.$$

На рис. 10.21 изображен график функции $g(u)$ при $a = b = 0.5$, $m = n = 1$.

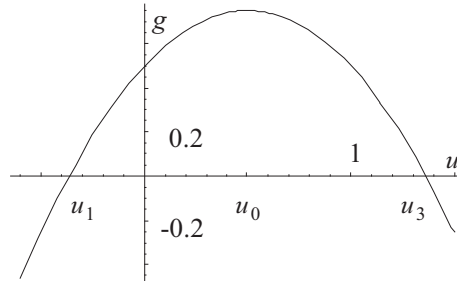


Рис. 10.21. График функции $g(u)$.

В общем случае $g(u_0) = \varepsilon(1 - u_0^2) \geq 0$, и функция $g(u)$ всегда имеет два вещественных корня, так как $g(u) \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow \pm\infty$. Эти корни совпадают с корнями функции $f(u)$. Очевидно, что $u_0 \neq u_1$, так как u_1 — наименьший корень функции $f(u)$. Следовательно, $u_0 = u_2$.

По теореме Лагранжа о среднем значении

$$g(u_2) - g(u_1) = g'(u_*)(u_2 - u_1), \quad g'(u) = 1 - 2\varepsilon u, \quad u_1 < u_* < u_2.$$

С другой стороны

$$g(u_2) - g(u_1) = g(u_0) = \varepsilon(1 - u_0^2).$$

Из двух последних формул вытекает равенство

$$u_2 - u_1 = \frac{\varepsilon(1 - u_0^2)}{1 - 2\varepsilon u_*},$$

которое показывает, что $u_2 - u_1 \ll 1$, если $\varepsilon \ll 1$. Принимая во внимание формулы (10.31), получаем, что

$$\varepsilon = \frac{m}{n^2} = \frac{2Pz_c A}{C^2 \omega_0^2}.$$

Из условия $\varepsilon \ll 1$ следует, что

$$\omega_0^2 \gg \frac{2Pz_c A}{C^2}.$$

Таким образом, движение твердого тела с неподвижной точкой будет псевдрегулярной прецессией, если в начальный момент оно имеет достаточно большую угловую скорость, направленную по оси z . Отметим, что в рассматриваемом случае Лагранжа эллипсоид инерции тела симметричен, ось z является осью симметрии эллипсоида и на этой оси лежит центр масс тела.

Осью симметрии твердого тела назовем линию пересечения двух перпендикулярных плоскостей симметрии. Из теоремы 4 следует, что эта ось будет главной центральной осью инерции, причем эллипсоид инерции тела, имеющего ось симметрии, будет эллипсоидом вращения.

Твердое тело, имеющее неподвижную точку, лежащую на оси симметрии, и быстро вращающееся вокруг этой оси называется гироскопом. Из определения гироскопа следует, что его движение представляет собой псевдрегулярную прецессию.

В элементарной теории гироскопа предполагается, что проекции угловой скорости ω_x и ω_y гораздо меньше, чем $\omega_z = \omega_0$, где ω_0 — константа. Для момента количества движения $\mathbf{l} = A\omega_x \mathbf{i} + A\omega_y \mathbf{j} + C\omega_z \mathbf{k}$ используется приближенная формула

$$\mathbf{l} = C\omega_z \mathbf{k} = C\boldsymbol{\omega}_g.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_g = \omega_0 \mathbf{k}$ называется угловой скоростью вращения гироскопа. Из равенства $\tilde{d}\mathbf{l}/dt = 0$ и теоремы об изменении момента количества движения

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{l}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = \mathbf{L}$$

вытекает, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \times C\omega_z \mathbf{k} = \mathbf{L}$$

или

$$C\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_g = \mathbf{L},$$

где $\boldsymbol{\omega}_e = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}$ — угловая скорость прецессии, которая значительно меньше угловой скорости вращения гироскопа $\boldsymbol{\omega}_g$.

Величина

$$\mathbf{L}_g = -C\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_g = C\boldsymbol{\omega}_g \times \boldsymbol{\omega}_e$$

называется гироскопическим моментом. С учетом введенного обозначения предыдущее равенство можно записать в виде

$$\mathbf{L}_g + \mathbf{L} = 0.$$

Гироскопический момент появляется, например, при движении кораблей и самолетов, на которых имеются двигатели (турбины), вращающие винты. Пусть центр масс корабля движется вдоль оси z , по которой направлена угловая скорость вращения вала двигателя $\boldsymbol{\omega}_g$ (рис. 10.22). При наличии волн может возникнуть килевая качка, угловая скорость которой $\boldsymbol{\omega}_e$ значительно меньше угловой скорости вращения вала. Изображенное на рис. 10.24 направление угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ соответствует подъему носа корабля. Возникающий при этом гироскопический момент \mathbf{L}_g , стремится повернуть нос корабля вправо. Для того, чтобы сохранить курс, необходимо с помощью руля создать равный по величине \mathbf{L}_g и противоположный по направлению момент \mathbf{L} .

Рассмотрим движение самолета с одним винтом. Поворот самолета влево (рис. 10.23) создает гироскопический момент, поднимающий нос самолета вверх (кабрирование). При повороте вправо гироскопический момент стремится опустить нос самолета вниз (пикирование). При установке на одной оси двух турбин, вращающих два винта (левый и правый) в разные стороны, управление самолетом упрощается.

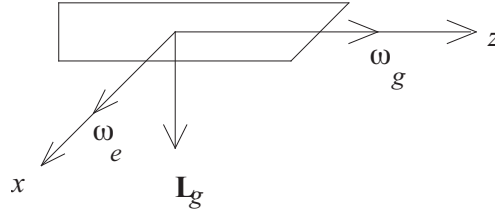


Рис. 10.22. Движение корабля.

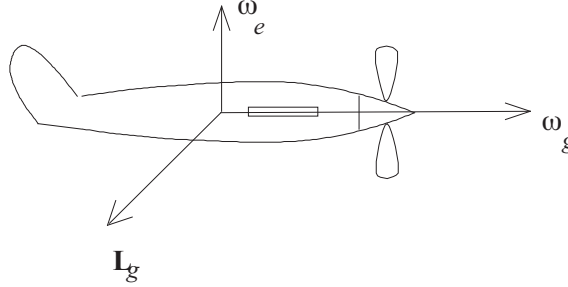


Рис. 10.23. Движение самолета.

10.13. Случай Ковалевской

Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891), ученица Вейерштрасса — первая женщина, ставшая членом корреспондентом Российской академии наук. В своей работе, представленной в 1888 году на конкурс Парижской академии наук под девизом "Говори, что знаешь, делай, что умеешь, быть чему быть", она указала третий и последний случай $A = B = 2C$, $z_c = 0$ интегрирования в квадратурах системы уравнений (10.21), (10.23) при произвольных начальных условиях. Ее работа получила первую премию. В связи с особой научной ценностью результатов С.Ф. Ковалевской премия была увеличена с 3 до 5 тысяч франков.

Систему дифференциальных уравнений (10.21), (10.23) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= P_x, & \frac{d\omega_y}{dt} &= P_y, & \frac{d\omega_z}{dt} &= P_z, \\ \frac{d\gamma_x}{dt} &= Q_x, & \frac{d\gamma_y}{dt} &= Q_y, & \frac{d\gamma_z}{dt} &= Q_z, \end{aligned} \quad (10.35)$$

где

$$\begin{aligned} P_x &= [(z_c\gamma_y - y_c\gamma_z)P - (C - B)\omega_y\omega_z]/A, \\ P_y &= [(x_c\gamma_z - z_c\gamma_x)P - (A - C)\omega_z\omega_x]/B, \\ P_z &= [(y_c\gamma_x - x_c\gamma_y)P - (B - A)\omega_x\omega_y]/C, \\ Q_x &= \omega_z\gamma_y - \omega_y\gamma_z, & Q_y &= \omega_x\gamma_z - \omega_z\gamma_x, & Q_z &= \omega_y\gamma_x - \omega_x\gamma_y. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Функции (10.36) не зависят от времени явно, поэтому система (10.35) является автономной. Это позволяет свести ее к системе дифференциальных уравнений пятого порядка

$$\frac{d\omega_x}{P_x} = \frac{d\omega_y}{P_y} = \frac{d\omega_z}{P_z} = \frac{d\gamma_x}{Q_x} = \frac{d\gamma_y}{Q_y} = \frac{d\gamma_z}{Q_z}. \quad (10.37)$$

Система (10.37) обладает свойством

$$\frac{\partial P_x}{\partial \omega_x} = \frac{\partial P_y}{\partial \omega_y} = \frac{\partial P_z}{\partial \omega_z} = \frac{\partial Q_x}{\partial \gamma_x} = \frac{\partial Q_y}{\partial \gamma_y} = \frac{\partial Q_z}{\partial \gamma_z} = 0,$$

которое позволяет применить к ней теорему о множителе Якоби и на единицу уменьшить ее порядок. Так, например, уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{P(y)} = \frac{dy}{Q(x)},$$

обладающее свойством $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными и интегрируется в явном виде.

Таким образом, для интегрирования системы (10.37) в квадратурах достаточно найти 4 независимых интеграла. Система (10.37) всегда имеет 3 таких интеграла: геометрический или тривиальный интеграл, интеграл моментов и интеграл энергии. Покажем, что в случае Ковалевской имеется четвертый независимый интеграл.

Ввиду того, что $A = B$, любые две оси x и y перпендикулярные оси z , будут главными осями инерции. Выберем систему координат так, чтобы центр масс тела лежал на оси x . Тогда $y_c = 0$. При $A = B = 2C$, $y_c = z_c = 0$ первые два уравнения системы (10.21) принимают вид

$$2\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z = 0, \quad 2\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z = a\gamma_z, \quad (10.38)$$

где $a = Px_c/C$.

Введем комплексную функцию $u = \omega_x + i\omega_y$, умножим второе уравнение (10.38) на i и сложим с первым уравнением. Получим дифференциальное уравнение с комплексными коэффициентами

$$2\frac{du}{dt} + i\omega_z u = ia\gamma_z. \quad (10.39)$$

Аналогичным образом, умножив на i второе уравнение (10.23) и сложив его с первым уравнением, получим

$$\frac{dv}{dt} + i\omega_z v = i\gamma_z u, \quad (10.40)$$

где $v = \gamma_x + i\gamma_y$.

Исключим переменную γ_z из уравнений (10.39) и (10.40), умножив первое из них на u , второе на $-a$ и сложив. Получим уравнение

$$\frac{dw}{dt} + i\omega_z w = 0,$$

где

$$w = u^2 - av = \omega_x^2 - \omega_y^2 - a\gamma_x + i(2\omega_x\omega_y - a\gamma_y).$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$w = D \exp\left(-i \int \omega_z dt\right),$$

где D — произвольная постоянная. Учитывая, что

$$\left|\exp\left(-i \int \omega_z dt\right)\right| = 1,$$

получаем $|w| = |D|$, $|w|^2 = D^2$ или

$$(\omega_x^2 - \omega_y^2 - a\gamma_x)^2 + (2\omega_x\omega_y - a\gamma_y)^2 = D^2.$$

Левая часть последнего равенства представляет собой искомый четвертый интеграл.

Оглавление

10	Динамика твердого тела	1
10.1.	Основные определения	1
10.2.	Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения	4
10.3.	Главные моменты инерции	6
10.4.	Теоремы о моментах инерции	9
10.5.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	13
10.6.	Действие ударной силы на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси	16
10.7.	Физический маятник	17
10.8.	Вращение твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести	20
10.9.	Случай Эйлера.	22
10.10.	Геометрическая интерпретация Пуансо	24
10.11.	Случай Лагранжа	26
10.12.	Псевдoreгулярная прецессия. Элементарная теория гироскопа	28
10.13.	Случай Ковалевской	30