Глава 2

Кинематика твердого тела

2.1. Число степеней свободы твердого тела, частные случаи движения

Число параметров, однозначно определяющих положение механической системы, называется *числом степеней свободы.* Если на положение точек не наложено никаких ограничений, то система, состоящая из одной точки, имеет три степени свободы, а система, состоящая из двух точек, — шесть степеней свободы. В первом случае положение системы определяется тремя координатами точки, во втором — шестью координатами двух точек. Ограничения, наложенные на положения механической системы, называются *связями.* Наложение одной связи уменьшает на единицу число степеней свободы механической системы. Так, например, точка, принадлежащая неподвижной плоскости, имеет две степени свободы. Положение такой точки можно задать с помощью двух координат.

Положение твердого тела считается известным, если известно положение любой его точки. Предположим, что тело занимает некоторую область G трехмерного пространства, имеющую ненулевой объем. Поскольку область G содержит бесчисленное множество точек, каждая из которых имеет три степени свободы, твердое тело является системой с бесконечным числом степеней свободы. Однако в теоретической механике рассматриваются только абсолютно твердые тела, для которых расстояние между любыми двумя точками не изменяется. Наличие бесконечного числа связей между точками абсолютно твердого тела приводит к тому, что число степеней свободы такого тела оказывается равным шести. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим две системы прямоугольных декартовых координат: неподвижную систему $O_0\xi\eta\zeta$ с ортами $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ и подвижную систему $Oxyz$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, жестко скрепленную с телом (рис. 2.1).

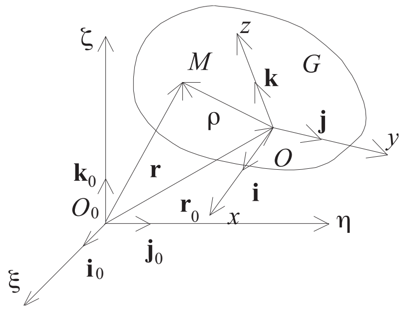

Рис. 2.1. Системы координат в общем случае.

Пусть положение произвольной точки тела M относительно неподвижной системы координат задается вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0$. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где вектор

$$\mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i}_0 + \eta\mathbf{j}_0 + \zeta\mathbf{k}_0$$

определяет положение точки O относительно неподвижной системы координат, а вектор

$$\boldsymbol{\rho} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

задает положение точки M относительно подвижной системы координат (рис. 2.1).

Вектор $\mathbf{r}_0$ известен, если заданы его компоненты ξ, η, ζ, так как направление ортов $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ не изменяется. Противоположная ситуация имеет место для вектора $\boldsymbol{\rho}$. Его компоненты x_0, y_0, z_0 не зависят от положения тела, так как тело предполагается абсолютно твердым, зато при перемещении тела в пространстве могут меняться направления ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Может показаться, что для задания вектора $\mathbf{r}$ необходимо 12 параметров: 3 компоненты вектора $\mathbf{r}_0$ и 9 компонент ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Однако орты являются единичными и ортогональными векторами, поэтому задание трех компонент из девяти полностью определяет их положение, так как остальные шесть компонент можно найти из уравнений

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0.$$

Следовательно, для определения вектора $\mathbf{r}$, задающего положение произвольной точки тела, достаточно шести параметров. Иными словами, абсолютно твердое тело имеет в общем случае шесть степеней свободы. При наличии ограничений на положение тела (связей) число его степеней свободы может быть меньше шести.

Если параметры, которые определяют положение тела, являются функциями времени, то эти функции задают закон движения тела. Рассматривая движение твердого тела, естественно предполагать, что точка M принадлежит области G, занимаемой телом. Однако закон движения твердого тела определяет движение любой точки пространства, имеющей координаты x_0, y_0, z_0 в подвижной системе координат. Таким образом, закон движения тела определяет движения всего трехмерного пространства, жестко связанного с телом.

Перечислим несколько важных частных случаев движения тела, которые будут подробно рассматриваться далее.

1. Поступательное движение

Выберем подвижную систему координат так, чтобы $\mathbf{i}_0=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_0=\mathbf{j}$, $\mathbf{k}_0=\mathbf{k}$. Если эти равенства выполняются во все время движения, то тело движется поступательно. При поступательном движении отсутствует вращение твердого тела вокруг начала подвижной системы координат и его положение определяется тремя компонентами ξ, η, ζ вектора $\mathbf{r}_0$, т. е. тело имеет три степени свободы.

В случае поступательного движения вектор

$$\boldsymbol{\rho}=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}=x_0\mathbf{i}_0+y_0\mathbf{j}_0+z_0\mathbf{k}_0$$

не зависит от времени, поэтому скорость произвольной точки M тела

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}_0+\dot{\boldsymbol{\rho}}=\dot{\mathbf{r}}_0=\mathbf{v}_0,$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость точки O. Следовательно, все точки тела имеют одинаковую скорость. Одинаковыми оказываются и ускорения всех точек тела, так как ускорение произвольной точки

$$\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}=\dot{\mathbf{v}}_0=\mathbf{w}_0,$$

где $\mathbf{w}_0$ — ускорение точки O.

2. Вращение вокруг неподвижной оси

Пусть в теле имеется отрезок (ось), скорости точек которого равны нулю во все время движения. Такая ситуация возникает, например, при вращении турбины. Удобно выбрать начала неподвижной и подвижной систем координат в одной и той же точке, лежащей на оси, и направить векторы $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ по оси вращения. Тогда $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$, и положение подвижной системы относительно неподвижной определяется только углом φ между ортами $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}$. Тело имеет одну степень свободы.

3. Плоское движение

При передвижении мебели по полу все точки шкафа или дивана движутся параллельно неподвижной плоскости пола S. Такое движение тел называется плоским. Выберем начала неподвижной и подвижной систем координат на плоскости S, а оси $O_0\xi$ и Oz направим перпендикулярно этой плоскости. Тогда во все время движения $\zeta = 0$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$. Координаты ξ, η и угол φ между ортами $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}$ полностью определяют положение тела при плоском движении. Следовательно, в этом случае тело имеет три степени свободы.

4. Вращение вокруг неподвижной точки

Если в теле имеется неподвижная точка, то именно в этой точке разумно поместить начала неподвижной и подвижной систем координат. Тогда $\xi = \eta = \zeta = 0$, и тело имеет три степени свободы.

2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если в твердом теле имеются две неподвижные точки A и B, то через них проходит ось вращения. Действительно, изменение положения любой из точек прямой, проходящей через точки A и B, сопровождается изменением ее расстояния по крайней мере от одной из точек A и B, что противоречит определению абсолютно твердого тела.

Выберем начала неподвижной и подвижной систем координат в одной и той же точке O, лежащей на оси вращения. Орты $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$ направим по этой оси. При движении тела точки оси вращения остаются на месте, поэтому во все время движения будут выполнены равенства $\mathbf{r}_0 = 0$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Угол между ортами $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}$ обозначим φ (рис. 2.2).

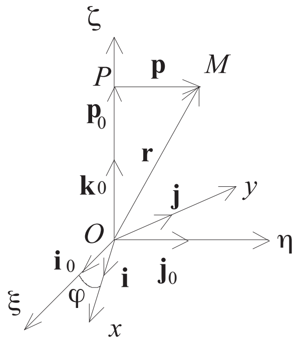

Рис. 2.2. Система координат в случае вращения тела.

Ввиду того что $\mathbf{r}_0 = 0$, имеет место равенство $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ или

$$x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, получаем

$$x = x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, \quad y = x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi, \quad z = z_0.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение произвольной точки тела M, можно представить в виде

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{p}(\varphi) + \mathbf{p}_0,$$

где

$$\mathbf{p} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j},$$

а $\mathbf{p}_0 = z_0\mathbf{k}_0$ — постоянный вектор.

Длина p вектора $\mathbf{p}$, которая представляет собой расстояние от точки M до оси вращения, является постоянной величиной, так как

$$p^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Это означает, что точка M движется по окружности радиуса p с центром в точке P.

Скорость точки M

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$

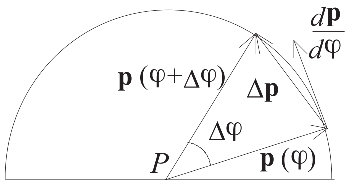

Рис. 2.3. Вектор $d\mathbf{p}/d\varphi$.

Дифференцирование по φ равенств $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = p^2$ и $\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = 0$ показывает, что вектор $d\mathbf{p}/d\varphi$ ортогонален векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Длину вектора $d\mathbf{p}/d\varphi$ найдем с помощью рис. 2.3. По определению

$$\frac{dp}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{p\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = p.$$

Принимая во внимание направление вектора $d\mathbf{p}/d\varphi$, получаем, что

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\varphi} = \mathbf{k}\times\mathbf{p}.$$

Учитывая последнее равенство, преобразуем формулу для скорости точки M:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{p}\dot{\varphi} = \mathbf{k}\dot{\varphi}\times\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p},$$

где вектор $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$ называется *угловой скоростью* вращения твердого тела. Ввиду того что

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{p}_0) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

формулу для скорости точки M можно записать в следующем виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) называется формулой Эйлера.

Вектор $\mathbf{v}$ не зависит от z и лежит в плоскости, параллельной плоскости Oxy. Величина скорости $v = \omega p = |\dot{\varphi}|p$. Скорость точки M перпендикулярна вектору $\mathbf{p}$ и пропорциональна расстоянию p от точки до оси вращения. Картина распределения скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси приведена на рис. 2.4.

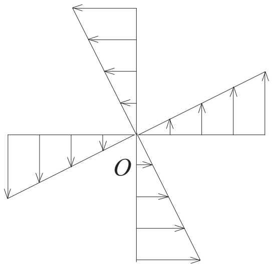

Рис. 2.4. Распределение скоростей.

Для вычисления проекций скорости на оси неподвижной системы координат удобно представить векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ в виде определителя:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_0 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x & y & 0 \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения первой строки этого определителя являются проекциями скорости на соответствующие оси координат:

$$v_\xi = -y\dot{\varphi}, \quad v_\eta = x\dot{\varphi}, \quad v_\zeta = 0.$$

Формула

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix}$$

позволяет аналогичным образом найти проекции скорости на оси подвижной системы координат

$$v_x = -y_0\dot{\varphi}, \quad v_y = x_0\dot{\varphi}, \quad v_z = 0.$$

Ускорение произвольной точки M твердого тела

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}),$$

где вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}\mathbf{k}$ называется *угловым ускорением.*

Для вычисления двойного векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})$ воспользуемся известной формулой векторной алгебры:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Принимая во внимание ортогональность векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{p}$, получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) = -\omega^2 \mathbf{p}.$$

Ускорение $\mathbf{w}$ можно представить в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,$$

где $\mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p}$ — *вращательное ускорение*, $\mathbf{w}_2 = -\omega^2 \mathbf{p}$ — *центростремительное ускорение*, причем $w_1 = \varepsilon p$, $w_2 = \omega^2 p$. Угол α, который вектор $\mathbf{w}$ составляет с вектором $\mathbf{p}$ (рис. 2.5), одинаков для всех точек тела, так как $\operatorname{tg} \alpha = w_1/w_2 = \varepsilon/\omega^2$.

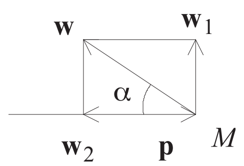

Рис. 2.5. Направления ускорений.

Проекции ускорения на оси неподвижной и подвижной систем координат определяются по формулам

$$w_\xi = -y\ddot{\varphi} - x\omega^2, \quad w_\eta = x\ddot{\varphi} - y\omega^2, \quad w_\zeta = 0,$$

$$w_x = -y_0\ddot{\varphi} - x_0\omega^2, \quad w_y = x_0\ddot{\varphi} - y_0\omega^2, \quad w_z = 0.$$

Вращение твердого тела называется *равноускоренным*, если

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 t^2/2,$$

где φ_0, ω_0, ε_0 — постоянные. При равноускоренном вращении угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{k}_0$ не зависит от времени.

Вращение твердого тела называется *равномерным*, если

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t.$$

В этом случае угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{k}_0$ — постоянный вектор, а угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

2.3. Плоское движение твердого тела

При плоском движении все точки твердого тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости S_0. Это означает, что во все время движение расстояние от любой точки тела до плоскости S_0 не меняется.

Пусть в начальный момент времени точки O_0 и O, представляющие собой начала неподвижной $O_0\xi\eta\zeta$ и подвижной $Oxyz$ систем координат, принадлежат плоскости S_0, а оси $O_0\zeta$ и Oz направлены перпендикулярно этой плоскости (рис. 2.6). Тогда во все время движения ось Oz будет оставаться перпендикулярной к плоскости S_0, так как в противном случае изменятся расстояния между точками этой оси и плоскостью. Равное нулю расстояние от точки O до плоскости S_0 тоже не может измениться, поэтому $O \in S_0$ в любой момент времени. Следовательно, при плоском движении тела будут выполняться равенства $\zeta = 0$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$. Угол между ортами $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{i}$ обозначим φ.

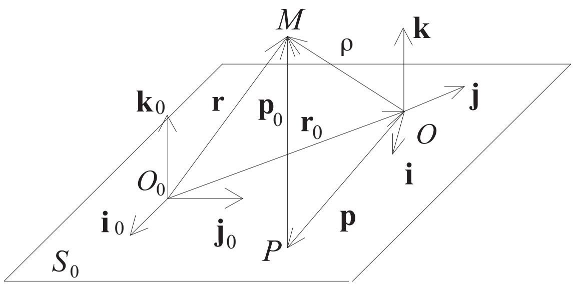

Рис. 2.6. Системы координат для плоского движения.

Как и в общем случае, представим вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение произвольной точки тела M, в виде суммы

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0, \quad \mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i}_0 + \eta\mathbf{j}_0, \quad \boldsymbol{\rho} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}_0.$$

Из двух последних равенств вытекает соотношение

$$x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 = \xi\mathbf{i}_0 + \eta\mathbf{j}_0 + x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}_0,$$

умножив которое на $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, получим связь между координатами точки M в неподвижной и подвижной системах координат:

$$x = \xi + x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, \quad y = \eta + x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi, \quad z = z_0. \quad (2.2)$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}$ представим в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_0,$$

где $\mathbf{p} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, а $\mathbf{p}_0 = z_0\mathbf{k}_0$ — постоянный вектор. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi, \eta) + \mathbf{p}(\varphi) + \mathbf{p}_0,$$

и, следовательно, положение тела при плоском движении определяется тремя параметрами: ξ, η и φ.

Если во все время движения $\mathbf{r}_0 = 0$, то мы получаем случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, а последняя формула совпадает с формулой для $\mathbf{r}$ из раздела 2.1.

Скорость точки M

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Используя для вычисления производной $d\mathbf{p}/dt$ формулу из предыдущего раздела, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p},$$

где $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ — скорость движения точки O относительно неподвижной системы координат, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$ — угловая скорость вращения твердого тела.

Выражение для скорости точки M не зависит от переменной z, поэтому все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости S_0, имеют одинаковые скорости. Следовательно, для определения скоростей всех точек тела при плоском движении достаточно найти скорости точек плоской фигуры, которая получается проектированием всех точек тела на плоскость S_0. Скорость любой точки трехмерного пространства, жестко связанного с твердым телом, можно найти, если известны скорости точек подвижной плоскости S, параллельной плоскости S_0 и жестко связанной с подвижной системой коородинат.

Для проектирования скорости на оси неподвижной и подвижной систем координат используем представление векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ в виде определителя. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0 = (x - \xi)\mathbf{i}_0 + (y - \eta)\mathbf{j}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \dot{\xi}\mathbf{i}_0 + \dot{\eta}\mathbf{j}_0,$$

получим

$$v_\xi = \dot{\xi} - (y - \eta)\dot{\varphi}, \quad v_\eta = \dot{\eta} + (x - \xi)\dot{\varphi}, \quad v_\zeta = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} v_x = \dot{\xi}\cos\varphi + \dot{\eta}\sin\varphi - y_0\dot{\varphi}, \\ v_y = -\dot{\xi}\sin\varphi + \dot{\eta}\cos\varphi + x_0\dot{\varphi}, \quad v_z = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Используя результаты предыдущего раздела, ускорение точки M можно представить в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,$$

где

$$\mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}, \quad \mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{w}_2 = -\omega^2\mathbf{p}.$$

Проекции ускорения на оси неподвижной и подвижной систем координат имеют вид

$$\begin{gathered} w_\xi = \ddot{\xi} - (y - \eta)\ddot{\varphi} - (x - \xi)\omega^2, \\ w_\eta = \ddot{\eta} + (x - \xi)\ddot{\varphi} - (y - \eta)\omega^2, \quad w_\zeta = 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} w_x = \ddot{\xi}\cos\varphi + \ddot{\eta}\sin\varphi - y_0\ddot{\varphi} - x_0\omega^2, \\ w_y = -\ddot{\xi}\sin\varphi + \ddot{\eta}\cos\varphi + x_0\ddot{\varphi} - y_0\omega^2, \quad w_z = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости S_0, имеют одинаковые ускорения, параллельные плоскости S_0.

Пример

Рассмотрим качение колеса радиуса R по оси неподвижной системы координат $O_0\xi$ (рис. 2.7,a). Центр подвижной системы координат выберем в центре колеса.

Предположим, что закон движения колеса имеет вид

$$\eta = R, \quad \xi = v_0 t, \quad \varphi = -v_0 t/R.$$

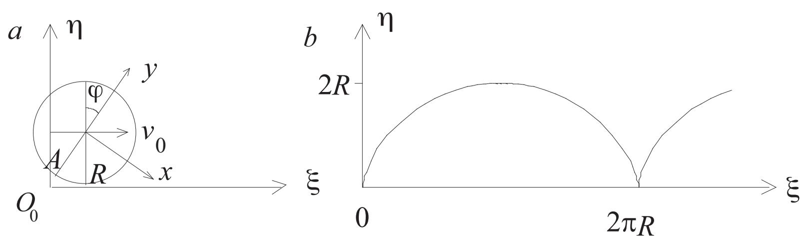

Рис. 2.7. Качение колеса без проскальзывания.

Знак минус в последней формуле означает, что колесо вращается по часовой стрелке. Скорость центра колеса $v_0 = \omega R$, где ω — величина угловой скорости.

Отметим, что при указанном законе движения скорость точки колеса, которая в данный момент времени касается оси $O_0\xi$, равна нулю. Действительно, подставляя координаты этой точки $x = \omega Rt$, $y = 0$ в формулы (2.3), получаем

$$v_\xi = \omega R + \eta\dot{\varphi} = 0, \quad v_\eta = (\omega Rt - \xi)\dot{\varphi} = 0.$$

Такое движение колеса называется *качением без проскальзывания*.

Пусть точка A колеса в момент времени $t = 0$ совпадает с точкой O_0. Тогда $x_0 = 0$ и $y_0 = -R$ являются ее координатами в подвижной системе координат. Из формул (2.2) следует, что координаты точки A в неподвижной системе координат имеют вид

$$x = R(\omega t - \sin\omega t), \quad y = R(1 - \cos\omega t).$$

Точка A описывает на плоскости кривую, которая называется *циклоидой* (рис. 2.7,b).

Выражения для проекций скорости и ускорения точки A на оси неподвижной и подвижной систем координат можно получить путем подстановки $x_0 = 0$, $y_0 = -R$, $\eta = R$, $\xi = \omega Rt$, $\varphi = -\omega t$ в формулы (2.3)—(2.6). Проекции на оси неподвижной системы координат

$$v_\xi = R\omega(1 - \cos\omega t), \quad v_\eta = R\omega\sin\omega t,$$

$$w_\xi = R\omega^2\sin\omega t, \quad w_\eta = R\omega^2\cos\omega t$$

можно найти также дифференцированием выражений для x и y.

2.4. Мгновенный центр скоростей

Предположим, что движение тела является плоским и введем подвижную и неподвижную системы координат, изображенные на рис. 2.6. Рассмотрим подвижную плоскость S, содержащую орты $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Если в некоторый момент времени скорость точки $C \in S$ равна нулю, то эта точка называется *мгновенным центром скоростей.* Из определения следует, что мгновенный центр скоростей может не принадлежать области G, занимаемой твердым телом. Скорости точек, лежащих на прямой, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости S, равны нулю. Эта прямая называется *мгновенной осью вращения.*

Из формул (2.3) следует, что координаты ξ_c, η_c точки C в неподвижной системе координат удовлетворяют системе уравнений

$$v_\xi = \dot{\xi} - (\eta_c - \eta)\dot{\varphi} = 0, \quad v_\eta = \dot{\eta} + (\xi_c - \xi)\dot{\varphi} = 0.$$

Если угловая скорость $\dot{\varphi} \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$\xi_c = \xi - \dot{\eta}/\dot{\varphi}, \quad \eta_c = \eta + \dot{\xi}/\dot{\varphi}.$$

С течением времени координаты ξ_c, η_c меняются, и точка C движется по плоскости S_0. Геометрическое место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости S_0 называется *неподвижной центроидой.*

Если $\dot{\varphi} = 0$, то возможны два случая: 1) $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$, 2) $\dot{\xi} \neq 0$ или $\dot{\eta} \neq 0$. В первом случае тело неподвижно, и система имеет бесчисленное множество решений. Во втором случае система решений не имеет, так как все точки тела имеют одинаковую ненулевую скорость.

Если равенство $\dot{\varphi} = 0$ в случае 2 выполняется в любой момент времени, то тело движется поступательно. В том случае, когда это равенство справедливо только для некоторого момента времени, движение тела в этот момент называют мгновенно поступательным.

В случае $\dot{\varphi} \neq 0$ из равенств (2.4) следует, что координаты x_c, y_c мгновенного центра скоростей C в подвижной системе координат находятся по формулам

$$x_c = (\dot{\xi}\sin\varphi - \dot{\eta}\cos\varphi)/\dot{\varphi}, \quad y_c = (\dot{\xi}\cos\varphi + \dot{\eta}\sin\varphi)/\dot{\varphi}.$$

Геометрическое место мгновенных центров скоростей на подвижной плоскости S называется *подвижной центроидой.*

Пример

Для движения колеса, рассмотренного в предыдущем разделе, при $\omega \neq 0$ имеют место равенства

$$\xi_c = R\omega t, \quad \eta_c = 0.$$

Неподвижной центроидой является ось $O_0\xi$. Координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат принимают вид

$$x_c = -R\sin\varphi, \quad y_c = -R\cos\varphi.$$

Следовательно, подвижная центроида представляет собой окружность радиуса R.

При решении некоторых задач о плоском движении твердого тела удобно использовать методы элементарной геометрии. Пусть в некоторый момент времени известно положение мгновенного центра скоростей C. Построим картину распределения скоростей плоской фигуры, соответствующую этому моменту времени. Для этого найдем связь между скоростями двух произвольных точек плоской фигуры. Скорости точек A и B плоской фигуры определяются по формулам

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_A, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_B,$$

где $\mathbf{p}_A$ и $\mathbf{p}_B$ — векторы, направленные из точки O в точки A и B. Исключив из этих равенств вектор $\mathbf{v}_0$, получим

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A$ — вектор, направленный из точки A в точку B. В соответствии с формулой (2.7) скорость произвольной точки тела M

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p},$$

где $\mathbf{v}_C = 0$ — скорость мгновенного центра скоростей, $\mathbf{p}$ — вектор, направленный из точки C в точку M.

Полученная формула для скорости точки M совпадает с формулой Эйлера. Если на рис. 2.4. заменить точку O точкой C, то получится картина распределения скоростей плоской фигуры. Пусть найдено положение мгновенного центра скоростей и известна скорость одной из точек плоскости S. Тогда картина распределения скоростей позволяет найти скорость любой точки плоскости S.

Положение точки C можно найти, зная скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ двух точек тела A и B. Пусть скорость $\mathbf{v}_B$ точки тела $B \in S$ не совпадает по направлению с $\mathbf{v}_A$. Тогда мгновенный центр скоростей лежит на пересечении прямых, проходящих через точки A и B перпендикулярно векторам $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ (рис. 2.8,a).

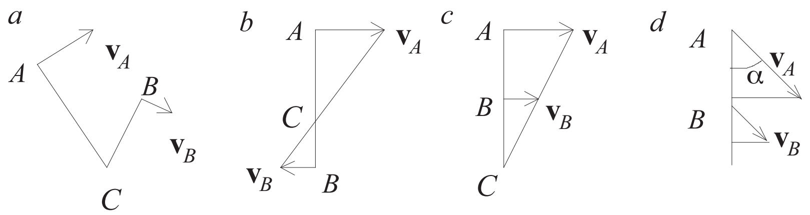

Рис. 2.8. Положение мгновенного центра скоростей.

Если скорости точек A и B равны и параллельны ($\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$), то движение тела будет поступательным, и мгновенного центра скоростей нет. Пусть скорости точек A и B параллельны, но не равны. Если векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ перпендикулярны отрезку AB, то на этом отрезке (рис. 2.8,b) или его продолжении (рис. 2.8,c) и находится мгновенный центр скоростей.

Докажем, что угол α между отрезком AB и параллельными векторами $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_B$ равен $\pi/2$. Если $\alpha \neq \pi/2$ (рис. 2.8,d), то проекции скоростей $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ на прямую AB отличаются друг от друга. Однако из формулы (2.7) следует, что эти проекции равны. Для того чтобы показать это, умножим обе части формулы (2.7) на единичный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{p}/p$. Благодаря тому, что смешанное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} = 0$, получим

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}.$$

Последнее равенство означает, что проекции скоростей любых двух точек на соединяющую их прямую равны. Следовательно, предположение о том, что $\alpha \neq \pi/2$ при $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_B$, приводит к противоречию.

Пример 1

Геометрические соображения оказываются полезными при исследовании движения по плоскости отрезка AB длиной l, концы которого A и B скользят по осям неподвижной системы координат $O_0\xi$ и $O_0\eta$ (рис. 2.9).

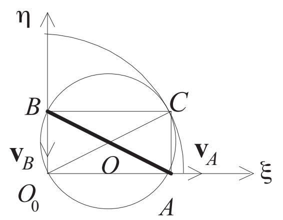

Рис. 2.9. Центроиды.

Мгновенный центр скоростей C лежит на пересечении прямых, параллельных осям $O_0\xi$ и $O_0\eta$ и проходящих через точки B и A. Следовательно, четырехугольник O_0ACB является прямоугольником. Длина его диагонали O_0C не меняется при изменении положения отрезка AB, так как она равна его длине l. Таким образом, мгновенный центр скоростей C движется по окружности радиуса l с центром в точке O_0, которая и является неподвижной центроидой.

Пусть начало подвижной системы координат находится в центре O отрезка AB. Тогда расстояние между точками O и C равно $l/2$, поэтому подвижной центроидой является окружность радиусом $l/2$ с центром в точке O.

Пример 2

Приведем пример мгновенно поступательного движения. Пусть конец A отрезка AB движется по оси $O_0\xi$, а конец B — по окружности с центром в точке O_0 (рис. 2.10).

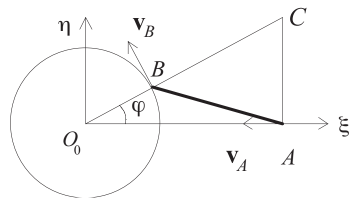

Рис. 2.10. Движение стержня.

Мгновенный центр скоростей C лежит на прямой, параллельной оси $O_0\eta$ и проходящей через точку A. Пока угол φ между отрезком O_0B и осью $O_0\xi$ меньше $\pi/2$, его увеличение приводит к возрастанию расстояния от точки C до точки A. При $\varphi = \pi/2$ точка C уходит в бесконечность, и движение отрезка AB является мгновенно поступательным.

2.5. Мгновенный центр ускорений

Если ускорение точки P, принадлежащей подвижной плоскости S, равно нулю, то такая точка называется *мгновенным центром ускорений*. Полагая в формулах (2.5) $w_\xi = w_\eta = 0$, получим систему уравнений для определения координат мгновенного центра ускорений ξ_p, η_p в неподвижной системе координат:

$$\omega^2\xi_p + \ddot{\varphi}\eta_p = \ddot{\xi} + \ddot{\varphi}\eta + \omega^2\xi, \quad -\ddot{\varphi}\xi_p + \omega^2\eta_p = \ddot{\eta} - \ddot{\varphi}\xi + \omega^2\eta.$$

Если определитель этой системы $D = \omega^4 + \varepsilon^2$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Аналогичным образом с помощью формул (2.6) можно получить систему для определения координат мгновенного центра ускорений в подвижной системе координат.

Ускорения любых точек A и B плоской фигуры определяются по формулам

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p}_A - \omega^2\mathbf{p}_A, \quad \mathbf{w}_B = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p}_B - \omega^2\mathbf{p}_B,$$

где $\mathbf{p}_A$ и $\mathbf{p}_B$ — векторы, направленные из точки O в точки A и B. Исключив из этих равенств вектор $\mathbf{w}_0$, получим

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{12}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{w}_{12} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{w}_2 = -\omega^2\mathbf{p},$$

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A$ — вектор, направленный из точки A в точку B. Вектор $\mathbf{w}_{12}$ составляет угол α с отрезком AB, причем $\operatorname{tg}\alpha = w_1/w_2 = \varepsilon/\omega^2$.

Пусть точка P — мгновенный центр ускорений. В соответствии с формулой (2.8) ускорение произвольной точки тела

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_P + \mathbf{w}_{12} = \mathbf{w}_{12}.$$

Эта формула совпадает с формулой, полученной для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Вектор $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{12}$ составляет угол α с вектором $\mathbf{p}$, направленным из точки P в рассматриваемую точку.

Пусть заданы ускорения $\mathbf{w}_A$ и $\mathbf{w}_B$ двух точек A и B плоской фигуры. Найдем положение мгновенного центра ускорений, используя геометрические соображения.

Определим сначала угол α. Изобразим на плоскости вектор $\mathbf{w}_{12} = \mathbf{w}_B - \mathbf{w}_A$ (рис. 2.11,a). Угол, который этот вектор составляет с отрезком AB, является искомым углом α.

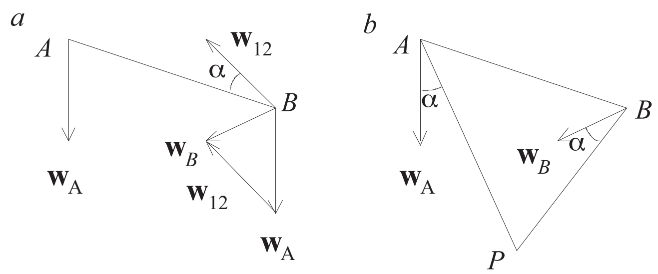

Рис. 2.11. Положение мгновенного центра ускорений.

Мгновенный центр ускорений P лежит на линии пересечения прямых, проходящих через точки A и B и составляющих углы α с векторами $\mathbf{w}_A$ и $\mathbf{w}_B$ (рис. 2.11,b).

2.6. Движение твердого тела с неподвижной точкой

Пусть во все время движения скорость некоторой точки твердого тела равна нулю. Выберем эту точку за начало неподвижной и подвижной систем координат. Тогда $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ и

$$x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, получаем связь между координатами точки тела M в неподвижной и подвижной системах координат:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0, \\ y &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0, \\ z &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_0, & a_{12} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}_0, & a_{13} &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_0,\\ a_{21} &= \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}_0, & a_{22} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}_0, & a_{23} &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_0,\\ a_{31} &= \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}_0, & a_{32} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}_0, & a_{33} &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_0. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_{ij}, которые называются *направляющими косинусами*, являются компонентами ортов $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k},\\ \mathbf{j}_0 &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k},\\ \mathbf{k}_0 &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Из условий ортонормированности векторов $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ вытекает шесть равенств

$$\begin{gathered} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3,\\ a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} = 0, \quad i \neq j, \end{gathered}$$

связывающих направляющие косинусы.

Из этих равенств следует, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является *ортогональной*, т. е. $A^{-1} = A^T$, где A^{-1} — матрица обратная к A, A^T — транспонированная матрица. Равенство $A^TA = E$, где E — единичная матрица, легко проверить непосредственным перемножением матриц A^T и A.

Пусть B — произвольная ортогональная матрица. Тогда

$$\det(B^TB) = \det(B^T)\det(B) = [\det(B)]^2 = \det(E) = 1.$$

Следовательно, $\det(B) = \pm 1$.

Из равенств

$$\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{i}_0\cdot(\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k}_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

вытекает, что $\det(A) = 1$.

Пусть подвижная система координат совпадает с неподвижной. Тогда точка твердого тела M находится в точке M_0 трехмерного пространства, положение которой определяется вектором

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}_0 + y_0\mathbf{j}_0 + z_0\mathbf{k}_0.$$

Использование этого обозначения не приведет к недоразумениям, поскольку введенный ранее вектор $\mathbf{r}_0$ из точки O_0 в точку O в рассматриваемом случае равен нулю и в формулах данного раздела встречаеться не будет. Поворот твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как преобразование трехмерного пространства, при котором точка M_0 переходит в точку M.

Формулы (2.9), которые дают связь между координатами точек M и M_0 в неподвижной системе координат, можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0,$$

где

$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T.$$

Преобразование $\mathbf{r} = B\mathbf{r}_0$ с произвольной ортогональной матрицей B является *изометрическим*, так как оно сохраняет длины векторов, и следовательно, расстояние между точками пространства. Действительно,

$$r^2 = \mathbf{r}^T\mathbf{r} = (B\mathbf{r}_0)^T\mathbf{r} = \mathbf{r}_0^T B^T\mathbf{r} = \mathbf{r}_0^T B^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r}_0^T\mathbf{r}_0 = r_0^2.$$

Ортогональная матрица B описывает поворот твердого тела только в том случае, когда $\det(B) = 1$. Если $\det(B) = -1$, то преобразование пространства сопровождается зеркальным отражением, при котором правая тройка векторов переходит в левую тройку. В частности, для изометрического преобразования с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеем $B\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $B\mathbf{j} = \mathbf{j}$, $B\mathbf{k} = -\mathbf{k}$.

2.7. Углы Эйлера

На рис. 2.12 изображены неподвижная и подвижная системы координат с ортами $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно. *Линией узлов*

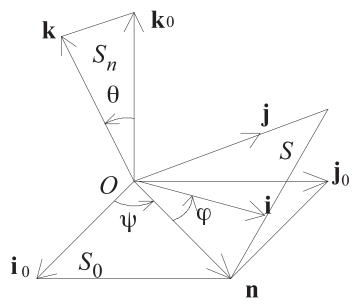

Рис. 2.12. Углы Эйлера.

называется линия пересечения плоскостей $S_0 \perp \mathbf{k}_0$ и $S \perp \mathbf{k}$. Введем единичный вектор $\mathbf{n}$, направленный по линии узлов. Ввиду того что $\mathbf{n} \perp \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{k}$, плоскость $S_n \perp \mathbf{n}$ содержит вектора $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$.

Углами Эйлера называются *угол собственного вращения* φ между ортами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{i}$, *угол прецессии* ψ между $\mathbf{i}_0$ и $\mathbf{n}$ и *угол нутации* θ между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$.

Выразим направляющие косинусы a_{ij} через углы Эйлера. Для этого введем два единичных вектора $\mathbf{l} \in S_0$ и $\mathbf{m} \in S$, перпендикулярных вектору $\mathbf{n}$ (рис. 2.13). Векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ лежат в плоскости S_n,

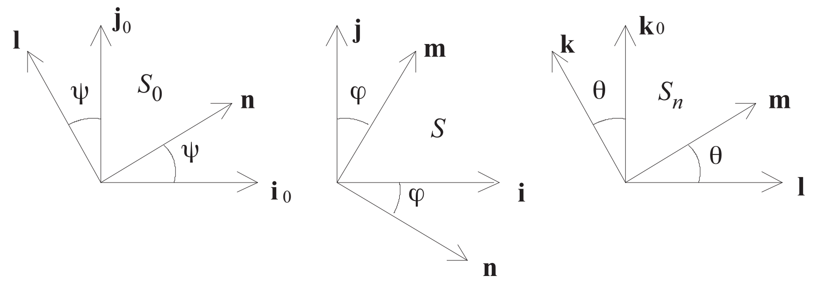

Рис. 2.13. Единичные векторы.

причем $\mathbf{l} \perp \mathbf{k}_0$, $\mathbf{m} \perp \mathbf{k}$. Выразим орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$ через единичные вектора $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{m}\sin\varphi + \mathbf{n}\cos\varphi, \quad \mathbf{i}_0 = -\mathbf{l}\sin\psi + \mathbf{n}\cos\psi, \\ \mathbf{j} &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{m}\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi, \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{l}\cos\psi + \mathbf{n}\sin\psi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Теперь можно найти связь между направляющими косинусами и углами Эйлера:

$$\begin{aligned}
a_{11} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_0 = (\mathbf{m}\sin\varphi + \mathbf{n}\cos\varphi) \cdot (-\mathbf{l}\sin\psi + \mathbf{n}\cos\psi) = \\
= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\
a_{12} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_0 = (\mathbf{m}\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi) \cdot (-\mathbf{l}\sin\psi + \mathbf{n}\cos\psi) = \\
= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\
a_{21} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_0 = (\mathbf{m}\sin\varphi + \mathbf{n}\cos\varphi) \cdot (\mathbf{l}\cos\psi + \mathbf{n}\sin\psi) = \\
= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\
a_{22} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_0 = (\mathbf{m}\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi) \cdot (\mathbf{l}\cos\psi + \mathbf{n}\sin\psi) = \\
= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\
a_{13} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{l}\sin\psi + \mathbf{n}\cos\psi) = \sin\psi\sin\theta, \\
a_{23} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{l}\cos\psi + \mathbf{n}\sin\psi) = -\cos\psi\sin\theta, \\
a_{31} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_0 = (\mathbf{m}\sin\varphi + \mathbf{n}\cos\varphi) \cdot \mathbf{k}_0 = \sin\varphi\sin\theta, \\
a_{32} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_0 = (\mathbf{m}\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi) \cdot \mathbf{k}_0 = \cos\varphi\sin\theta, \\
a_{33} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 = \cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Задание трех углов Эйлера однозначно определяет положение твердого тела с неподвижной точкой, которое имеет три степени свободы. Однако соответствие между углами Эйлера и положениями тела не является взаимно однозначным. Если $\theta = 0$, то по положению тела можно найти только сумму $\varphi + \psi$, но не каждый из углов в отдельности.

Для определения положения твердого тела с неподвижной точкой в механике чаще всего используют углы Эйлера. При описании движения самолетов и судов применяются *навигационные (самолетные)* углы *крена, рыскания и тангажа* [3, 4]. Использование углов Эйлера и навигационных углов в задачах ориентации твердых тел приводит в ряде случаев к трудностям, связанным с отсутствием взаимно однозначного соответствия между положениями тела и тройками соответствующих углов. В связи с этим положение твердого тела иногда задают при помощи *кватернионов*, представляющих собой обобщение комплексных чисел.

2.8. Кватернионы

Рассмотрим элементы четырехмерного арифметического векторного пространства (a, b, c, d), где a, b, c, d — вещественные числа. Обычным образом определяются операции умножения вектора на вещественное число и сложения векторов. Если описанным далее специальным способом введена операция умножения векторов друг на друга, то эти векторы называются кватернионами.

Введем обозначение $(1, 0, 0, 0) = 1$. Для любого вещественного числа a кватернион $(a, 0, 0, 0)$ можно записать в виде

$$(a, 0, 0, 0) = a \cdot 1 = a$$

и отождествить его с вещественным числом a.

Кватернионы

$$I = (0, 1, 0, 0), \quad J = (0, 0, 1, 0), \quad K = (0, 0, 0, 1)$$

называются *мнимыми (кватернионными)* единицами. Вместе с единицей $(1, 0, 0, 0) = 1$ эти кватернионы образуют базис векторного пространства, поэтому любой кватернион q можно представить в виде

$$q = a + bI + cJ + dK.$$

Число $a = \operatorname{Re} q$ называют *вещественной частью* кватерниона, а кватернион $p = \operatorname{Im} q = bI + cJ + dK$ — его *мнимой частью*. Мнимой части кватерниона можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{p} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Для того чтобы определить операцию умножения кватернионов, достаточно задать таблицу умножения мнимых единиц:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$
$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Отметим, что последние шесть равенств совпадают с правилами векторного умножения ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Операция умножения некоммутативна. Так, например, для кватернионов $q_1 = 2 + 3I + J$ и $1 + 2J + K$ мы получаем

$$\begin{aligned}
&q_1 q_2 = (2 + 3I + J)(1 + 2J + K) = 2 + 4J + 2K + 3I + 6K - \\
&-3J + J - 2 + I = 4I + 2J + 8K = 2(2I + J + 4K), \\
&q_2 q_1 = (1 + 2J + K)(2 + 3I + J) = 2 + 3I + J + 4J - 6K - \\
&-2 + 2K + 3J - I = 2I + 8J - 4K = 2(I + 4J - 2K).
\end{aligned}$$

Величина $q_1 q_2 - q_2 q_1$ называется коммутатором. Для рассматриваемого примера коммутатор равен $2(I - 3J + 6K)$.

Произведение двух кватернионов $q_1 = a_1 + p_1$ и $q_2 = a_2 + p_2$, где $p_m = b_m I + c_m J + d_m K$, $m = 1, 2$ можно представить в виде

$$q_1 q_2 = a_1 a_2 + a_1 p_2 + a_2 p_1 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + p_1 \times p_2. \qquad (2.12)$$

Здесь кватернион

$$p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} I & J & K \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

соответствует векторному произведению $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$. Из последней формулы вытекает, что

$$q_1 q_2 - q_2 q_1 = p_1 \times p_2 - p_2 \times p_1 = 2p_1 \times p_2. \qquad (2.13)$$

Для кватернионов $q_1 = (2 + 3I + J)$ и $q_2 = (1 + 2J + K)$

$$q_1 q_2 - q_2 q_1 = 2 \begin{vmatrix} I & J & K \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(I - 3J + 6K),$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Сопряженным к кватерниону $q = a + p$ называется кватернион $q^* = a - p$. Очевидно, что $(q^*)^* = q$, $p^* = -p$. Кроме того, $qq^* = q^* q$, так как

$$qq^* - q^* q = 2p \times (-p) = 0,$$

причем в силу формулы (2.12)

$$qq^* = (a+p)(a-p) = a^2 + ap - ap + b^2 + c^2 + d^2 - p \times p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

Нетрудно убедиться и в справедливости равенства

$$(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*. \qquad (2.14)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (q_1 q_2)^* &= a_1 a_2 - a_1 p_2 - a_2 p_1 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 - p_1 \times p_2, \\ q_2^* q_1^* &= (a_2 - p_2)(a_1 - p_1) = \\ &= a_2 a_1 - a_2 p_1 - a_1 p_2 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1 + p_2 \times p_1. \end{aligned}$$

Формулу (2.14) легко обобщить на случай любого числа сомножителей. В частности, для трех сомножителей имеет место формула

$$(q_1 q_2 q_3)^* = [(q_1 q_2)(q_3)]^* = q_3^* (q_1 q_2)^* = q_3^* q_2^* q_1^*. \qquad (2.15)$$

Модулем кватерниона называется число

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Модуль мнимой части кватерниона $|\operatorname{Im} q| = |p| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ равен длине соответствующего ей вектора $\mathbf{r} = b\mathbf{i}_0 + c\mathbf{j}_0 + d\mathbf{k}_0$.

Для $q \neq 0$ существует *обратный* кватернион $q^{-1} = q^*/|q|^2$ такой, что

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1.$$

Кватернионы вида $a + bI$ можно отождествить с комплексными числами. Алгебра кватернионов является единственным расширением алгебры комплексных чисел, которое образует ассоциативную алгебру с делением над полем вещественных чисел [5].

2.9. Использование кватернионов для описания поворотов твердого тела

Докажем теорему, которая позволяет установить связь между преобразованиями векторов и кватернионов.

Теорема

Пусть $p_0 = x_0 I + y_0 J + z_0 K$ и q кватернионы, причем $|q| = 1$. Тогда преобразование

$$p = Q(p_0) = qp_0q^{-1}$$

эквивалентно изометрическому преобразованию векторов $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$.

Доказательство

Кватерниону p_0 поставим в соответствие вектор $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}_0 + y_0\mathbf{j}_0 + z_0\mathbf{k}_0$. Из условия теоремы следует, что $p_0^* = -p_0$, $q^{-1} = q^*$. С учетом формулы (2.15) получаем

$$p^* = (qp_0q^*)^* = qp_0^*q^* = -qp_0q^* = -p.$$

Следовательно, кватернион p можно записать в виде $p = xI + yJ + zK$ и поставить ему в соответствие вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0$.

Преобразование Q линейно, так как

$$Q(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 Q(p_1) + \alpha_2 Q(p_2).$$

Линейным будет и соответствующее Q преобразование векторов. Из линейной алгебры известно, что в этом случае существует матрица A такая, что $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$.

Осталось доказать, что преобразование $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$ сохраняет длину векторов, т. е. что $r = r_0$. Последнее равенство эквивалентно равенству $|p| = |p_0|$, которое справедливо ввиду того, что

$$|p|^2 = pp^* = qp_0q^{-1}qp_0^*q^{-1} = qp_0p_0^*q^{-1} = q|p_0|^2q^{-1} = |p_0|^2.$$

Преобразование Q не изменится, если q заменить на $-q$, поэтому одному и тому же преобразованию векторов соответствует пара кватернионов q и $-q$.

Изометрическое преобразование $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$ описывает поворот тела вокруг неподвижной точки при условии $\det(A) = 1$.

Найдем связь между элементами a_{ij} матрицы A и коэффициентами кватерниона $q = a+bI+cJ+dK$. Используя зависимость (2.9) между компонентами x, y, z и x_0, y_0, z_0 векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, кватернион p можно представить в виде

$$\begin{aligned} p = xI + yJ + zK = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)I+ \\ + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)J + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)K = \\ = q(x_0I + y_0J + z_0K)q^*. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется при любых значениях x_0, y_0, z_0 и, в частности при $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Следовательно,

$$qIq^* = a_{11}I + a_{21}J + a_{31}K. \tag{2.16}$$

Выражения для a_{i1} через a, b, c, d можно получить непосредственно из равенства (2.16), приравняв коэффициенты при I, J, K в левой и правой его частях, однако удобнее предварительно преобразовать левую часть (2.16), используя формулу $qq^* = 1$.

Суммирование равенств $qI = aI - b - cK + dJ$ и $Iq = aI - b + cK - dJ$ дает формулу

$$qI + Iq = 2aI - 2b,$$

умножив которую на q^* справа, получим

$$qIq^* = 2aIq^* - 2bq^* - I.$$

Подстановка этого выражения в формулу (2.16) приводит к равенству

$$2aI(a - bI - cJ - dK) - 2b(a - bI - cJ - dK) - I = a_{11}I + a_{21}J + a_{31}K.$$

После преобразования левой части это равенство принимает вид

$$(2a^2 + 2b^2 - 1)I + 2(ad + bc)J + 2(bd - ac)K = a_{11}I + a_{21}J + a_{31}K.$$

Коэффициенты при I, J, K в левой части полученного соотношения и представляют собой искомые выражения для a_{11}, a_{21}, a_{31}.

Аналогичным образом находятся выражения для других элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2(a^2 + b^2) - 1 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & 2(a^2 + c^2) - 1 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & 2(a^2 + d^2) - 1 \end{pmatrix}.$$

Выражение для $\det(A)$ содержит 79 слагаемых. Упрощение этого выражения проведено с помощью пакета MATHEMATICA. После задания элементов матрицы программа нашла выражение $\det(A) - 1$, которое затем было представлено в виде произведения:

$$\det(A) - 1 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1)(1 - 2a^2 + 4a^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4a^2d^2).$$

Ввиду того что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2 = 1$, справедливо равенство $\det(A) = 1$. Тем самым доказано, что преобразование Q описывает поворот твердого тела с неподвижной точкой. Следовательно, закон движения тела вокруг неподвижной точки можно задать с помощью кватерниона $q(t)$ такого, что $|q| = 1$. Тело с неподвижной точкой имеет три степени свободы, а у кватерниона четыре коэффициента, однако в силу условия $|q| = 1$ независимыми являются только три из них.

Предположим, что известны элементы a_{ij} матрицы A. Коэффициент a является корнем уравнения

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4a^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 3 = 4a^2 - 1. \qquad (2.17)$$

Это уравнение имеет два решения, отличающиеся знаком, что связано с наличием двух кватернионов q и $-q$, соответствующих одному и тому же повороту тела. Если $a \neq 0$, то

$$b = \frac{(a_{32} - a_{23})}{4a}, \quad c = \frac{(a_{13} - a_{31})}{4a}, \quad d = \frac{(a_{21} - a_{12})}{4a}. \qquad (2.18)$$

Можно получить выражения для b, c, d и в случае $a = 0$ [3].

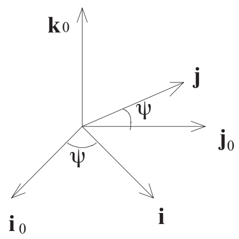

Рис. 2.14. Поворот тела вокруг орта $\mathbf{k}_0$.

Найдем кватернион q, соответствующий повороту тела на угол ψ вокруг орта $\mathbf{k}_0$ (рис. 2.14). Матрица поворота A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}_0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}_0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}_0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}_0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}_0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (2.17), (2.18) получаем

$$a = \pm\cos(\psi/2), \quad b = c = 0, \quad d = \pm\sin(\psi/2),$$
$$q = \pm[\cos(\psi/2) + \sin(\psi/2)K].$$

2.10. Скорости точек тела с неподвижной точкой

В качестве функций, задающих закон движения тела, выберем углы Эйлера $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\theta(t)$. Тогда вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0$, определяющий положение произвольной точки твердого тела, будет функцией углов Эйлера: $\mathbf{r} = \mathbf{r}[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)]$. Скорость произвольной точки тела

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\dot{\psi} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\dot{\theta}.$$

Найдем частную производную $\partial\mathbf{r}/\partial\varphi$. Зафиксируем значения ψ и θ. Тогда изменение угла φ соответствует вращению тела вокруг оси Oz (рис. 2.15).

Вектор $\mathbf{r}$ представим в виде $\mathbf{r} = \mathbf{p} + z_0\mathbf{k}$. При фиксированных ψ и θ вектор $\mathbf{p}$ зависит только от φ, а вектор $\mathbf{k}$ не меняется. Следовательно,

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} = \mathbf{k}\times\mathbf{p} = \mathbf{k}\times(\mathbf{r} - z_0\mathbf{k}) = \mathbf{k}\times\mathbf{r}.$$

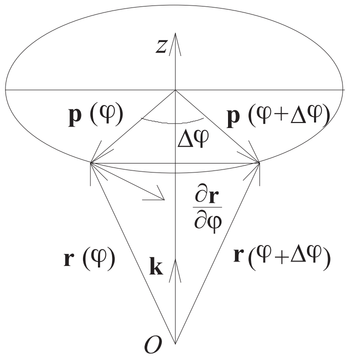

Рис. 2.15. Вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$.

Вычисление производной $\partial \mathbf{p}/\partial \varphi$ не отличается от вычисления производной $d\mathbf{p}/d\varphi$ в разделе 2.2. Аналогичным образом находятся частные производные

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{r}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}.$$

Подставив полученные выражения для частных производных в формулу для $\mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}\dot{\varphi} + \mathbf{k}_0 \times \mathbf{r}\dot{\psi} + \mathbf{n} \times \mathbf{r}\dot{\theta} = (\mathbf{k}\dot{\varphi} + \mathbf{k}_0\dot{\psi} + \mathbf{n}\dot{\theta}) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\varphi} + \mathbf{k}_0\dot{\psi} + \mathbf{n}\dot{\theta}$$

называется угловой скоростью.

Полученная формула

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

называется формулой Эйлера и совпадает с формулой (2.1) для скорости точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. И в том и в другом случае скорости всех точек тела, лежащих на прямой l, проходящей через точку O параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$, равны нулю. Разница между этими двумя случаями состоит в том, что при вращении тела вокруг неподвижной оси прямая l неподвижна (она совпадает с осью вращения), а при вращении вокруг неподвижной точки прямая l, называемая мгновенной осью вращения, меняет свое положение в пространстве.

Если движение тела задано при помощи кватерниона $q(t)$ такого, что $qq^* = 1$, то формулу Эйлера можно получить, используя соответствие между вектором $\mathbf{r}$ и кватернионом p. Рассмотрим преобразование

$$p = qp_0q^*, \tag{2.19}$$

соответствующее повороту твердого тела с неподвижной точкой. Продифференцировав (2.19) по времени, получим

$$\dot{p} = \dot{q}p_0q^* + qp_0\dot{q}^*.$$

Кватерниону $\dot{p}$ соответствует вектор $\mathbf{v}$. Умножив формулу (2.19) на q^* слева и на q справа, получим выражения $p_0q^* = q^*p$ и $qp_0 = pq$, подстановка которых в формулу для $\dot{p}$ дает равенство

$$\dot{p} = \dot{q}q^*p + pq\dot{q}^*.$$

Обозначим $\Omega = 2\dot{q}q^*$. Учитывая, что $\Omega^* = 2q\dot{q}^*$, последнее равенство можно записать в виде

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\left(\Omega p + p\Omega^*\right).$$

Продифференцировав по времени тождество $qq^* = 1$, получим

$$\dot{q}q^* + q\dot{q}^* = 0.$$

Следовательно, $\Omega^* = -\Omega$, и формула для $\dot{p}$ принимает вид

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\left(\Omega p - p\Omega\right) = \Omega \times p,$$

Равенство $\Omega^* = -\Omega$ означает, что $\operatorname{Re}\Omega = 0$, поэтому кватерниону Ω можно поставить в соответствие вектор $\boldsymbol{\omega}$. Таким образом, формула для $\dot{p}$ эквивалентна формуле Эйлера. Коэффициенты кватерниона Ω равны проекциям вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси неподвижной системы координат.

Проекции скорости $\mathbf{v}$ на оси координат можно найти, представив векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ в виде определителя. Однако для этого необходимо предварительно вычислить проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Умножая скалярно выражение для вектора $\boldsymbol{\omega}$ на орт $\mathbf{i}$, с учетом формул (2.10), (2.11) получаем

$$\omega_x = \dot\psi \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i} + \dot\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \dot\psi a_{31} + \dot\theta \cos\varphi = \dot\psi \sin\varphi \sin\theta + \dot\theta \cos\varphi.$$

Аналогичным образом, умножая $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, находим остальные проекции и получаем

$$\begin{array}{ll}
\omega_x = \dot\psi \sin\varphi \sin\theta + \dot\theta \cos\varphi, & \omega_\xi = \dot\varphi \sin\psi \sin\theta + \dot\theta \cos\psi, \\
\omega_y = \dot\psi \cos\varphi \sin\theta - \dot\theta \sin\varphi, & \omega_\eta = -\dot\varphi \cos\psi \sin\theta + \dot\theta \sin\psi, \\
\omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, & \omega_\zeta = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi.
\end{array}$$

2.11. Ускорение точек тела с неподвижной точкой, регулярная прецессия

Ускорение $\mathbf{w}$ произвольной точки тела

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловое ускорение.

Проекции вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ на оси неподвижной системы координат имеют вид

$$\varepsilon_\xi = \dot\omega_\xi, \quad \varepsilon_\eta = \dot\omega_\eta, \quad \varepsilon_\zeta = \dot\omega_\zeta.$$

Некоторые проблемы возникают с вычислением проекций $\boldsymbol{\varepsilon}$ на оси подвижной системы координат. Действительно, выражение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) = \frac{d\omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k} + \omega_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \omega_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \omega_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

содержит производные по времени от ортов подвижной системы координат. Для их определения воспользуемся формулой

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x_0 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_0 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z_0 \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}),$$

которая справедлива при любых значениях x_0, y_0, z_0. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \tag{2.20}$$

Обозначим

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k}.$$

Функция $\tilde{d}\boldsymbol{\omega}/dt$ называется *относительной производной* вектора $\boldsymbol{\omega}$. Подставив выражения (2.20) в формулу для $\boldsymbol{\varepsilon}$, с учетом введенного обозначения получим

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} + \omega_x(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + \omega_y(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + \omega_z(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\omega}_x\mathbf{i} + \dot{\omega}_y\mathbf{j} + \dot{\omega}_z\mathbf{k},$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z.$$

Производная произвольного вектора $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ определяется по формуле

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + a_x(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + a_y(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + a_z(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Зная проекции вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, можно найти проекции первого слагаемого $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ в формуле для ускорения $\mathbf{w}$, представив его в виде определителя. Для вычисления проекций второго слагаемого нужно предварительно определить проекции вектора скорости $\mathbf{v}$.

Рассмотрим в качестве примера движение тела с неподвижной точкой, при котором угол θ является постоянной величиной, а два других угла — линейными функциями времени:

$$\varphi = at + \varphi_0, \quad \psi = bt + \psi_0, \quad \theta = \theta_0.$$

Такое движение называется *регулярной прецессией.*

При регулярной прецессии ось Oz подвижной системы координат, вращаясь вместе с плоскостью S_n, описывает круговой конус с осью $O\zeta$ и углом полураствора θ_0 (рис. 2.16).

Вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k} + \dot{\psi}\mathbf{k}_0 = a\mathbf{k} + b\mathbf{k}_0$$

лежит в плоскости S_n и тоже описывает круговой конус с осью $O\zeta$ (см. рис. 2.16).

Рассмотрим движение точки M, лежащей на оси Oz на расстоянии z_0 от начала координат. Тогда $x_0 = y_0 = 0$,

$$x = a_{13}z_0 = z_0 \sin\psi \sin\theta_0, \quad y = a_{23}z_0 = -z_0 \cos\psi \sin\theta_0,$$
$$z = a_{33}z_0 = z_0 \cos\theta_0.$$

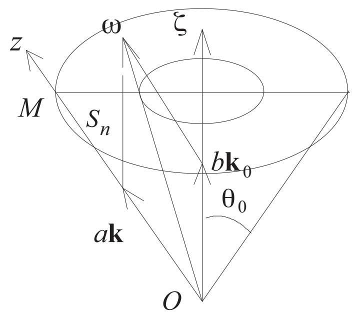

Рис. 2.16. Регулярная прецессия.

Равенства

$$x^2 + y^2 = (z_0 \sin\theta_0)^2, \quad z = z_0 \cos\theta_0$$

означают, что точка M движется по окружности радиуса $R_0 = z_0 \sin\theta_0$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси $O\zeta$

Дифференцирование по переменной t формул

$$x = R_0 \sin\psi, \quad y = -R_0 \cos\psi, \quad z = z_0 \cos\theta_0$$

дает выражения для проекций скорости и ускорения на оси неподвижной системы координат:

$$v_\xi = \dot{x} = R_0 b \cos\psi, \quad v_\eta = \dot{y} = R_0 b \sin\psi, \quad v_\zeta = 0,$$
$$w_\xi = \dot{v}_\xi = -R_0 b^2 \sin\psi, \quad w_\eta = \dot{v}_\eta = R_0 b^2 \cos\psi, \quad w_\zeta = 0.$$

В качестве упражнения полезно получить эти формулы, а также формулы для проекций скорости и ускорения на оси подвижной системы координат путем проектирования векторных произведений, входящих в выражения для векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

2.12. Общий случай движения твердого тела

Положение произвольной точки тела M относительно неподвижной системы координат задается вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где вектор

$$\boldsymbol{\rho} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

задает положение точки M относительно подвижной системы координат, жестко связанной с телом, а вектор

$$\mathbf{r}_0 = \xi \mathbf{i}_0 + \eta \mathbf{j}_0 + \zeta \mathbf{k}_0$$

определяет положение начала подвижной системы координат O относительно неподвижной системы координат. Точку O в дальнейшем будем называть *полюсом.*

Умножив равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}$ на $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$, получим связь между координатами точки тела M в неподвижной и подвижной системах координат:

$$\begin{aligned} x &= \xi + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0, \\ y &= \eta + a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0, \\ z &= \zeta + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Направляющие косинусы a_{ij} выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по формулам (2.11), поэтому в качестве функций, определяющих закон движения твердого тела, можно взять $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$.

Скорость произвольной точки тела

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\varphi} + \mathbf{k}_0\dot{\psi} + \mathbf{n}\dot{\theta}$ — угловая скорость.

Формула для ускорения $\mathbf{w}$ произвольной точки тела имеет вид

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}),$$

где $\mathbf{w}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0$ — ускорение полюса, $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловое ускорение. Используя эту формулу, можно найти проекции ускорения на оси неподвижной и подвижной систем координат [2].

Движение твердого тела, при котором $\xi = \eta = \psi = \theta = 0$ называется винтовым. При винтовом движении $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$,

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{22} = \cos\varphi, \quad a_{21} = -a_{12} = \sin\varphi, \\ a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1, \end{gathered}$$

и формулы (2.21) принимают вид

$$\begin{gathered} x = x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, \\ y = x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi, \quad z = \zeta + z_0. \end{gathered}$$

Ввиду того что
$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$
проекция точки тела на плоскость $\zeta = 0$ лежит на окружности радиуса $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ с центром в начале координат. При $\zeta = ht$, $\varphi = \omega t$ все точки тела движутся по винтовым линиям.

В случае винтового движения вектор $\mathbf{v}_0 = \dot{\zeta}\mathbf{k}_0 = \dot{\zeta}\mathbf{k}$ параллелен вектору $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$. Прямая, проходящая через точку O и параллельная этим векторам называется *винтовой осью*. Скорости всех точек винтовой оси одинаковы и равны $\mathbf{v}_0$. Действительно, положение любой точки на винтовой оси определяется вектором $\boldsymbol{\rho} = \alpha\boldsymbol{\omega}$, где α — произвольное вещественое число, поэтому ее скорость
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\alpha\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v}_0.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения твердого тела. При $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{v}_0 \neq 0$ движение тела является мгновенно поступательным. При $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$ тело поворачивается вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку O параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$.

Если в теле имеется точка P, скорость которой $\mathbf{v}_P = 0$, то имеется мгновенная ось вращения, проходящая через точку P. Выясним, при каких условиях существует такая точка.

Вектор $\mathbf{p}$ из начала координат O в точку P удовлетворяет уравнению
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = 0,$$
Умножим это уравнение векторно слева на $\boldsymbol{\omega}$ и преобразуем двойное векторное произведения в правой части полученного равенства. Уравнение для определения p примет вид
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O = \mathbf{p}\omega^2 - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{p}).$$
Его решение, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} = 0$, определяется по формуле $\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0/\omega^2$ (рис. 2.17,a).

Равенство
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0)}{\omega^2} = \mathbf{v}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0\omega^2}{\omega^2} = \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_0)}{\omega^2},$$
показывает, что решение $\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0/\omega^2$ удовлетворяет уравнению при условии $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_0 = 0$. Это условие является необходимым и достаточным для существования в теле точки P, скорость которой равна нулю.

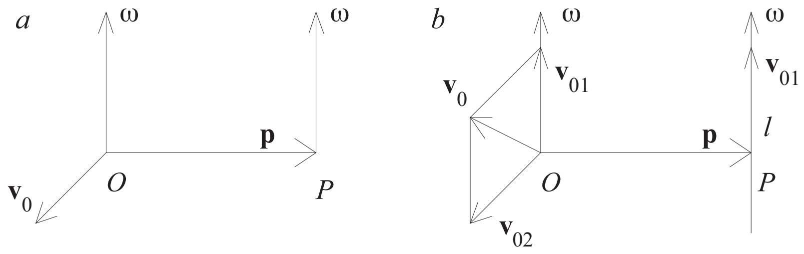

Рис. 2.17. Ось вращения и винтовая ось.

Выберем точку P за полюс. Скорость любой точки, лежащей на прямой, проходящей через точку P параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\alpha\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Следовательно, эта прямая является мгновенной осью вращения.

В общем случае движения твердого тела скорость $\mathbf{v}_0$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{01} + \mathbf{v}_{02},$$

где вектор $\mathbf{v}_{01}$ параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$, а вектор $\mathbf{v}_{02}$ перпендикулярен $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 2.17,*b*). Для скорости точки P, положение которой относительно подвижной системы координат определяется вектором $\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{02}/\omega^2$, получаем формулу

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \mathbf{v}_{01} + \mathbf{v}_{02} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{02})}{\omega^2} = \mathbf{v}_{01},$$

Следовательно, скорость точки P параллельна вектору $\boldsymbol{\omega}$. Прямая l, проходящая через точку P параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$, называется *мгновенной винтовой осью.* Скорости точек мгновенной винтовой оси равны между собой и параллельны вектору $\boldsymbol{\omega}$. С течением времени положение прямой l в пространстве, вообще говоря, изменяется. Если во все время движения положение винтовой оси вращения сохраняется, то тело совершает винтовое движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов С.Б.* Кинематика. Изд. СПбГУ, 2001.

2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Т. 1. М., 1965.
3. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М., 1992.
4. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. Л., 1986.
5. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1973.

Оглавление