

## Глава 4

### Статика

#### 4.1. Основные определения

Одним из основных понятий механики является *сила*. Сила — вектор, характеризующий интенсивность и направление взаимодействия тел. Статика изучает свойства сил и условия равновесия твердых тел под действием приложенных к ним сил.

В тех задачах, где размерами тела можно пренебречь, его рассматривают как точку. Задание вектора силы  $\mathbf{F}$ , приложенного к этой точке, полностью определяет взаимодействие такого тела с другим телом.

В том случае, когда необходимо принимать во внимание размеры тела, действие силы на тело зависит не только от ее величины и направления, но и от того, на какую точку тела действует сила  $\mathbf{F}$  (в какой точке тела  $M$  приложена сила). На рис. 1 изображено тело, имеющее неподвижную ось вращения, проходящую через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка.

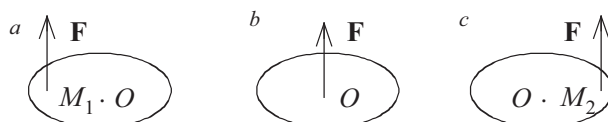


Рис. 1. Действие силы на тело.

Пусть тело неподвижно, т. е. находится в равновесии. Если сила  $\mathbf{F}$  приложена в точке  $M_1$  (рис. 1, *a*), то она будет вращать тело по часовой стрелке. Если силу  $\mathbf{F}$  приложить в точке  $O$ , то тело останется неподвижным (рис. 1, *b*). Приложение силы  $\mathbf{F}$  в точке  $M_2$

(рис. 1,с) вызовет вращение тела против часовой стрелки.

Предположим, что сила  $\mathbf{F}$  приложена в точке  $M$ , положение которой относительно некоторой точки  $O$  задано вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 2).

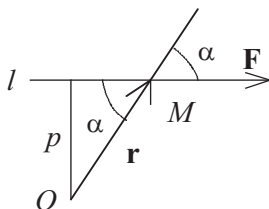


Рис. 2. Плечо силы.

Влияние положения точки  $M$  на поведение тела характеризует вектор

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

который называется *моментом силы*  $\mathbf{F}$  относительно точки  $O$ . Векторы силы и момента силы полностью определяют действие силы на тело.

Если силы, изображенные на рис. 1,а и рис. 1,с, лежат в плоскости рисунка, то их моменты относительно точки  $O$  параллельны оси вращения и направлены в разные стороны. В ситуации, изображенной на рис. 1,б, момент силы относительно точки  $O$  равен нулю, так как  $\mathbf{r} = 0$ .

Прямая  $l$ , проходящая через точку  $M$  параллельно вектору  $\mathbf{F}$ , называется *линией действия силы*. Опустим на эту прямую перпендикуляр из точки  $O$  (рис. 2). Длина этого перпендикуляра  $p$  называется *плечом силы*. Обозначим буквой  $\alpha$  угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ . Тогда длину вектора  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  можно найти по формуле

$$m_O(\mathbf{F}) = rF \sin \alpha = pF.$$

При перемещении точки  $M$  по линии действия силы  $l$  направление вектора  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  не изменяется. Не меняется при этом и его длина  $m_O(\mathbf{F})$ , так как плечо силы остается равным  $p$ .

Момент силы зависит от выбора точки, относительно которой этот момент вычисляется. Пусть  $P$  — произвольная точка, положение которой относительно точки  $O$  задано вектором  $\mathbf{p}$  (рис. 3).

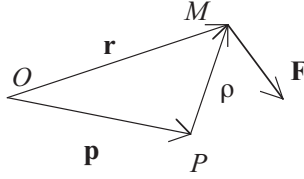


Рис. 3. Момент силы относительно точки  $P$ .

Тогда

$$\mathbf{m}_P(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) - \mathbf{p} \times \mathbf{F}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — вектор из точки  $P$  в точку приложения силы  $M$ .

Рассмотрим случай, когда на тело действует  $n$  сил. Системой из  $n$  сил называется множество  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ , состоящее из  $n$  векторов  $\mathbf{F}_i$  и  $n$  точек  $M_i$ , являющихся точками приложения соответствующих сил. Если  $\mathbf{F}_i = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. на тело не действуют силы, то систему сил будем называть нулевой. Если скорости всех точек тела равны нулю, то под действием нулевой системы сил тело находится в равновесии.

Главным вектором системы  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  называется вектор

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Главным моментом системы  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  относительно точки  $O$  называется вектор

$$\mathbf{m}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

где  $\mathbf{r}_i$  — вектор, направленный из точки  $O$  в точку  $M_i$ . Для нулевой системы  $\mathbf{F} = \mathbf{m}_O = 0$ .

Найдем связь главных моментов относительно точек  $P$  и  $O$ . Из формулы (1) следует, что

$$\mathbf{m}_P(\mathbf{F}_i) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) - \mathbf{p} \times \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\mathbf{p}$  — вектор из точки  $O$  в точку  $P$ . Сложив полученные равенства, получим

$$\mathbf{m}_P = \mathbf{m}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{F}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}$  — главный вектор. Если  $\mathbf{F} = 0$  или  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{p}$ , то главные моменты относительно точек  $P$  и  $O$  равны между собой.

#### 4.2. Эквивалентные системы сил

Рассмотрим две системы сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  и  $(\mathbf{F}'_j, M'_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n'$ . Обозначим  $\mathbf{F}'$  и  $\mathbf{m}'_O$  главный вектор и главный момент второй системы относительно точки  $O$ .

**Определение 1.** Системы сил называются *эквивалентными*, если  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ ,  $\mathbf{m}_O = \mathbf{m}'_O$ .

Покажем, что у эквивалентных систем равны главные моменты относительно любой точки  $P$ . Действительно, из формулы (2) и равенств  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ ,  $\mathbf{m}_O = \mathbf{m}'_O$  следует, что

$$\mathbf{m}'_P = \mathbf{m}'_O - \mathbf{p} \times \mathbf{F}' = \mathbf{m}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_P.$$

Эквивалентные системы сил оказывают одинаковое воздействие на твердое тело.

В учебниках по механике [1, 2] приводится другое определение эквивалентности систем сил, основанное на понятии элементарного преобразования. Элементарными преобразованиями системы из  $n$  сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  называются:

- 1) добавление к системе и исключение из нее нулевой силы;
- 2) сдвиг силы  $\mathbf{F}_i$  по линии ее действия;
- 3) замена двух сил, приложенных в одной точке их векторной суммой;
- 4) замена силы  $\mathbf{F}_i$  суммой двух сил, приложенных в той же точке.

**Определение 2.** Две системы сил называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой путем конечного числа элементарных преобразований.

Очевидно, что элементарные преобразования не меняют главный вектор системы сил. Столь же очевидно, что первые два элементарных преобразования не изменяют ее главный момент. Не меняют главный момент и элементарные преобразования 3) и 4). Действительно, пусть  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2}$ , причем все три силы приложены в точке  $M_i$ , а вектор  $\mathbf{r}_i$  направлен из точки  $O$  в точку  $M_i$ . Тогда

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_{i1}) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_{i2}).$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

### Теорема 1

Система сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  и система  $(\mathbf{F}'_{i'}, M'_{i'})$ , полученная из нее путем конечного числа элементарных преобразований имеют одинаковые главные векторы и главные моменты.

Из теоремы 1 вытекает, что две системы сил, эквивалентные в смысле определения 2, являются эквивалентными и по определению 1. Докажем теперь, что из эквивалентности систем сил в смысле определения 1 следует их эквивалентность в соответствии с определением 2.

### Теорема 2

Если две системы сил имеют одинаковые главные векторы и главные моменты, то одна из них может быть получена из другой путем конечного числа элементарных преобразований.

### Доказательство

Докажем сначала, что любая система сил элементарными преобразованиями сводится к системе из двух сил. Для этого достаточно показать, что любая система из трех сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , сводится к системе из двух сил.

#### 1) *Случай параллельных сил*

Рассмотрим случай, когда все три силы параллельны друг другу. Пусть силы  $(\mathbf{F}_1, M_1)$  и  $(\mathbf{F}_2, M_2)$  направлены в одну сторону. Докажем, что эта система из двух параллельных сил  $(\mathbf{F}_1, M_1)$  и  $(\mathbf{F}_2, M_2)$  путем элементарных преобразований сводится к одной силе. Тем самым будет доказано, что система из трех параллельных сил сводится к системе из двух сил.

Пусть  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, направленный вдоль отрезка  $M_1M_2$  (рис. 4). Добавим к рассматриваемой системе две силы  $F\mathbf{e}$  и  $-F\mathbf{e}$ , приложенные в точке  $M_1$ . Сдвинем силу  $-F\mathbf{e}$  в точку  $M_2$  и сложим силы, приложенные в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Получим систему из двух сил  $(\mathbf{F}_{11}, M_1)$ ,  $(\mathbf{F}_{21}, M_2)$ , где  $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_1 + F\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_2 - F\mathbf{e}$ . Линии действия сил  $\mathbf{F}_{11}$  и  $\mathbf{F}_{21}$  пересекаются в некоторой точке  $P$ . Сдвинув эти силы в точку  $P$  и сложив их, получим систему  $(\mathbf{F}_3, P)$ , состоящую из одной силы (рис. 4), причем  $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ .

Тем же способом к одной силе сводится и система двух параллельных сил, направленных в разные стороны, если  $\mathbf{F}_1 \neq -\mathbf{F}_2$ . В

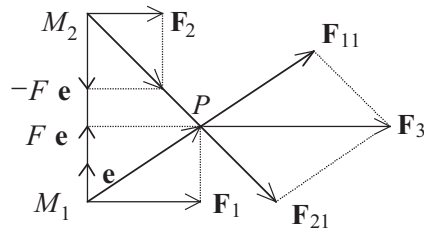


Рис. 4. Сложение параллельных сил.

случае  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  линии действия сил  $\mathbf{F}_{11}$  и  $\mathbf{F}_{21}$  параллельны. Система сил  $(\mathbf{F}_1, M_1)$ ,  $(-\mathbf{F}_1, M_2)$  называется *парой*.

2) *Случай непараллельных сил*

Предположим, что линии действия трех сил не являются параллельными. Пусть сила  $\mathbf{F}_3$  непараллельна  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Докажем, что в этом случае существует плоскость  $S$ , проходящая через линию действия силы  $\mathbf{F}_3$  и пересекающая линии действия сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Введем систему координат с осями  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , направив ось  $\mathbf{k}$  параллельно вектору  $\mathbf{F}_3$ . Пусть вектор  $\mathbf{p}$ , параллельный плоскости  $S$  и ортогональный оси  $\mathbf{k}$ , составляет угол  $\varphi$  с осью  $\mathbf{i}$  (рис. 5). Тогда

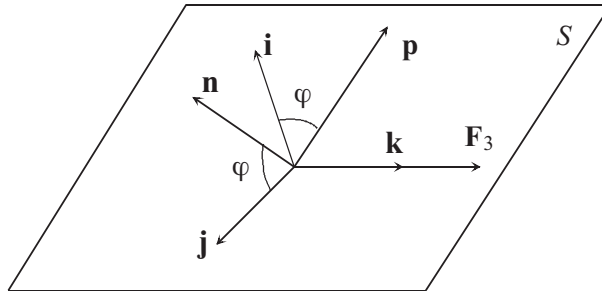


Рис. 5. Плоскость  $S$ .

единичная нормаль  $\mathbf{n}$  к плоскости  $S$ , ортогональная векторам  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ , имеет следующее разложение по базису  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi.$$

Векторы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  представим в виде

$$\mathbf{F}_k = a_k \mathbf{i} + b_k \mathbf{j} + c_k \mathbf{k}, \quad k = 1, 2.$$

Линия действия силы  $\mathbf{F}_1$  не пересекает плоскость  $S$ , если вектор  $\mathbf{F}_1$  лежит в плоскости, параллельной  $S$ . В этом случае векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{F}_1$  ортогональны, т. е.  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_1 = 0$ . Подставив в последнее равенство разложения векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{F}_1$ , получим  $a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi = 0$ . Если  $a_1 = b_1 = 0$ , то равенство  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_1 = 0$  выполняется для любых  $\varphi$ . Однако в случае  $a_1 = b_1 = 0$  вектор  $\mathbf{F}_1$  параллелен вектору  $\mathbf{F}_3$ , что противоречит предположению о том, что эти векторы непараллельны. Следовательно, хотя бы одно из чисел  $a_1$  и  $b_1$  должно быть отлично от нуля, а тогда равенство  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_1 = 0$  выполняется только для углов  $\varphi$  таких, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Аналогичным образом получаем, что линия действия силы  $\mathbf{F}_2$  не пересекает плоскость  $S$ , если

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b_2}{a_2}.$$

Выбрав угол  $\varphi$  так, чтобы его тангенс не равнялся числам  $-b_1/a_1$  и  $-b_2/a_2$  мы получим плоскость  $S$ , которую пересекают линии действия обеих сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Очевидно, что таких плоскостей имеется бесчисленное множество.

Пусть линии действия сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  пересекают плоскость  $S$  в точках  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 6).

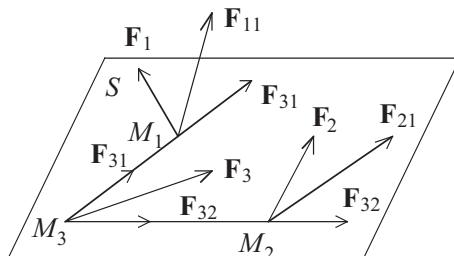


Рис. 6. Случай непараллельных сил.

Заменим вектор  $\mathbf{F}_3$  суммой двух сил, направленных вдоль отрезков  $M_3M_1$  и  $M_3M_2$ :  $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$ , перенесем силы  $\mathbf{F}_{31}$  и  $\mathbf{F}_{32}$  вдоль линий их действия в точки  $M_1$  и  $M_2$  и сложим с силами

$(\mathbf{F}_1, M_1)$  и  $(\mathbf{F}_2, M_2)$  соответственно. Получим систему из двух сил  $(\mathbf{F}_{11}, M_1)$  и  $(\mathbf{F}_{21}, M_2)$  (см. рис. 6), где

$$\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_2.$$

Перейдем к завершающему этапу доказательства теоремы 2. Рассмотрим две системы сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  и  $(\mathbf{F}'_{i'}, M'_{i'})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $i' = 1, 2, \dots, n'$ , имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты, и покажем, что вторая система может быть получена из первой путем элементарных преобразований. Добавим к системе  $(\mathbf{F}_i, M_i)$   $n'$  нулевых сил, приложенных в точках  $M'_{i'}$ , и заменим их системой  $(\mathbf{F}'_{i'}, M'_{i'})$ ,  $(-\mathbf{F}'_{i'}, M'_{i'})$ . Систему сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ ,  $(-\mathbf{F}'_{i'}, M'_{i'})$ , имеющую нулевой главный вектор и нулевой главный момент, элементарными преобразованиями сведем к двум силам. Полученная система из двух сил  $(\mathbf{F}''_1, M''_1)$ ,  $(\mathbf{F}''_2, M''_2)$ , по теореме 1 тоже будет иметь нулевой главный вектор  $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}''_1 + \mathbf{F}''_2$  и нулевой главный момент  $\mathbf{m}''_O$ . Из равенства нулю главного вектора следует, что  $\mathbf{F}''_2 = -\mathbf{F}''_1$ , поэтому главный момент имеет вид

$$\mathbf{m}''_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}''_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}''_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}''_1,$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — векторы из некоторой точки  $O$  в точки  $M''_1$  и  $M''_2$ . Главный момент  $\mathbf{m}''_O$  равен нулю, если 1)  $\mathbf{F}''_1 = 0$ , 2)  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , 3)  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{F}''_1$ . В первом случае обе силы будут нулевыми. Исключив нулевые силы, получим систему сил  $(\mathbf{F}'_i, M'_i)$ . Во втором случае  $M''_1 = M''_2$ . Сложив силы  $\mathbf{F}''_1$  и  $\mathbf{F}''_2$ , приложенные в одной точке, получим нулевую силу, которую можно исключить. Наконец, в третьем случае силы  $\mathbf{F}''_1$  и  $\mathbf{F}''_2$  лежат на одной прямой. Сдвиг силы  $\mathbf{F}''_2$  по линии ее действия в точку  $M''_1$  сводит третий случай ко второму. Теорема 2 доказана. Тем самым доказана равносильность определений 1 и 2.

Определение эквивалентности, основанное на введении элементарных преобразований, легче проверить экспериментально, однако при теоретических исследованиях удобнее пользоваться определением, данным в терминах главного вектора и главного момента.

### 4.3. Приведение системы сил к простейшему виду

Будем искать наиболее простую систему сил (содержащую наименьшее возможное число сил), эквивалентную заданной системе  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ . Рассмотрим различные возможные случаи.



$$1) \mathbf{F} = \mathbf{m}_O = 0$$

Система сил эквивалентна нулевой системе.

$$2) \mathbf{F} \neq 0, \mathbf{m}_P = 0$$

Система  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  эквивалентна системе  $(\mathbf{F}, P)$ . В этом случае говорят, что система сводится к равнодействующей. Вопрос о том, для каких систем существует такая точка  $P$ , что  $\mathbf{m}_P = 0$ , будет рассмотрен далее. Здесь мы ограничимся обсуждением двух важных частных случаев.

### Пример 1

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил  $\mathbf{F}_i$  пересекаются в одной точке (рис. 7).

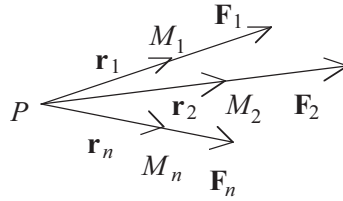


Рис. 7. Сходящаяся система сил.

Очевидно, что  $\mathbf{m}_P = 0$ , где  $P$  — точка пересечения линий действия сил.

### Пример 2

В разделе 2 установлено, что система  $(F_{i\tau}, M_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\tau = 1$ , состоящая из двух параллельных сил, в случае  $F_{1\tau} \neq -F_{2\tau}$  эквивалентна равнодействующей силе  $((F_{1\tau} + F_{2\tau})\tau, P)$ . Найдем вектор  $\mathbf{p}$ , задающий положение точки  $P$  относительно начала координат. По теореме 1 момент равнодействующей и главный момент системы из двух сил равны между собой. Следовательно,

$$\mathbf{p} \times (F_{1\tau} + F_{2\tau})\tau = \mathbf{r}_1 \times F_{1\tau}\tau + \mathbf{r}_2 \times F_{2\tau}\tau,$$

где вектора  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  задают положение точек  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 8).

Введем обозначение

$$\mathbf{r}_c = (\mathbf{r}_1 F_{1\tau} + \mathbf{r}_2 F_{2\tau}) / (F_{1\tau} + F_{2\tau}).$$

Из двух последних равенств вытекает, что

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_c) \times \tau = 0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{r}_c + \lambda\tau,$$

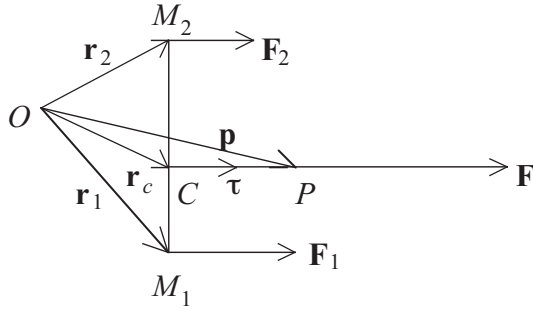


Рис. 8. Равнодействующая параллельных сил.

где  $\lambda$  — произвольное вещественное число. Задача об определении вектора  $\mathbf{p}$ , как и следовало ожидать, имеет бесчисленное множество решений. Изменению числа  $\lambda$  соответствует смещение точки  $P$  вдоль линии приложения равнодействующей силы. Точка  $C$ , положение которой определяется вектором  $\mathbf{r}_c$ , лежит на прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Выберем начало координат в точке  $C$ . Тогда  $\mathbf{r}_c = 0$  и, следовательно,

$$\mathbf{r}_1 F_{1\tau} + \mathbf{r}_2 F_{2\tau} = 0.$$

Пусть  $F_{1\tau} F_{2\tau} > 0$ , т. е. параллельные силы направлены в одну сторону. В этом случае  $\mathbf{r}_2 = -(r_2/r_1)\mathbf{r}_1$ ,  $r_1 F_{1\tau} = r_2 F_{2\tau}$ . Принимая во внимание, что  $F_i = |F_{i\tau}|$ ,  $i = 1, 2$ , получаем равенство  $r_1 F_1 = r_2 F_2$ , которое является условием равновесия рычага. Рычагом называется стержень, вращающийся вокруг неподвижной оси. Пусть к концам стержня приложены одинаково направленные параллельные силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , а расстояния от оси вращения до точек приложения сил составляют  $r_1$  и  $r_2$  соответственно (рис. 9).

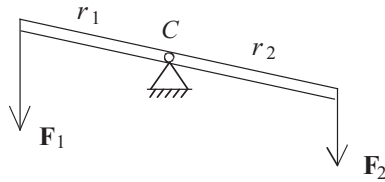


Рис. 9. Рычаг.

Если  $r_1 F_1 = r_2 F_2$ , то система двух сил, действующая на рычаг,

эквивалентна равнодействующей силе  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , приложенной к оси вращения. Под действием такой силы рычаг будет находиться в равновесии. В случае  $r_1 F_1 \neq r_2 F_2$  равнодействующая будет приложена к точке, не лежащей на оси вращения, и вызовет поворот рычага.

3)  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{m}_O \neq 0$

В данном случае из формулы (2) следует, что вектор главного момента не зависит от выбора точки  $O$ . Система сил эквивалентна паре  $(\mathbf{F}_1, M_1)$ ,  $(-\mathbf{F}_1, M_2)$  с главным моментом  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_O$  (рис. 10). Главный момент пары  $\mathbf{m}$  называется *моментом пары*. Пусть  $\mathbf{r}$  —

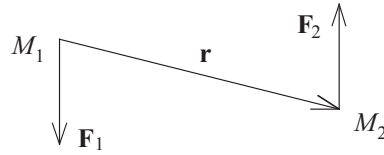


Рис. 10. Пара сил.

вектор, направленный из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ . Тогда момент пары  $\mathbf{m} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1$ . Очевидно, что существует бесчисленное множество пар, эквивалентных рассматриваемой системе сил.

4)  $\mathbf{F} \neq 0$ ,  $\mathbf{m}_O \neq 0$

Прежде всего выясним, при каком условии существует такая точка  $P$ , что

$$\mathbf{m}_P = \mathbf{m}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{F} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  — искомый вектор из точки  $O$  в точку  $P$ . Умножим уравнение (3) скалярно на вектор  $\mathbf{F}$ . Ввиду равенства нулю смешанного произведения  $(\mathbf{p} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}$  получим, что

$$\mathbf{m}_O \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (4)$$

Для того, чтобы найти вектор  $\mathbf{p}$ , удовлетворяющий уравнению (3), умножим это уравнение векторно слева на вектор  $\mathbf{F}$ . После преобразования двойного векторного произведения в правой части полученного равенства оно примет вид

$$\mathbf{F} \times \mathbf{m}_O = \mathbf{p} F^2 - \mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}).$$

Решение, удовлетворяющее условию  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{p} = 0$ , определяется по формуле  $\mathbf{p} = (\mathbf{F} \times \mathbf{m}_O)/F^2$ . Векторное умножение уравнения (3) на

вектор  $\mathbf{F}$  может привести к появлению лишних решений, поэтому выполним проверку, подставив полученное выражение для вектора  $\mathbf{p}$  в уравнение (3). С учетом условия (4) получим

$$\mathbf{m}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_O + \frac{\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{m}_O)}{F^2} = \mathbf{m}_O + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{m}_O)}{F^2} - \frac{\mathbf{m}_O(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})}{F^2} = 0.$$

Следовательно, в случае 4) система сил эквивалентна равнодействующей  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $P$ . Отметим, что уравнение (3) имеет бесчисленное множество решений вида  $\mathbf{p} = (\mathbf{F} \times \mathbf{m}_O)/F^2 + \lambda \mathbf{F}$ , где  $\lambda$  — произвольное вещественное число. Эти решения соответствуют сдвигу равнодействующей по линии её действия.

Полученные результаты аналогичны некоторым результатам кинематики твердого тела. Так, например, в общем случае движения твердого тела при  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_0 = 0$  существует точка  $P$ , скорость которой  $\mathbf{v}_P = 0$ . Положение точки  $P$  относительно точки  $O$  определяется вектором  $\mathbf{p} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0)/\omega^2$ . Заменяя в этом утверждении векторы  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_P$  векторами  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{m}_O$  и  $\mathbf{m}_P$  соответственно, получим один из результатов данного раздела.

Подведем итоги исследования задачи о приведении системы сил к простейшему виду. Произвольная система сил, как показано в предыдущем разделе, эквивалентна системе, состоящей из двух сил. При  $\mathbf{m}_O \cdot \mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{F} \neq 0$  система эквивалентна одной силе (равнодействующей). Наконец, при  $\mathbf{F} = 0$  и  $\mathbf{m}_O = 0$  система сил эквивалентна нулевой системе. Только под действием такой системы сил тело может находиться в равновесии.

#### 4.4. Уравнения равновесия

Пусть под действием некоторой системы сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  твердое тело находится в положении равновесия, т. е. скорости всех его точек равны нулю. Тогда главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{m}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$  — вектор из начала прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$  в точку приложения силы  $\mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{i} + F_{iy} \mathbf{j} + F_{iz} \mathbf{k}$ . Уравнения (5) называются *уравнениями*

равновесия в векторном виде. Спроектировав их на оси координат, получим шесть скалярных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0, & \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При решении задач статики удобно пользоваться понятием *момента силы относительно оси*. Рассмотрим ось  $OL$ , положение которой в пространстве определяется единичным вектором  $\mathbf{l}$  ( $l = 1$ ). Моментом силы  $\mathbf{F}$  относительно оси  $OL$  называется скаляр

$$m_l(\mathbf{F}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l},$$

который является проекцией вектора  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  на ось  $OL$  ( $\mathbf{r}$  — вектор из точки  $O$  в точку  $M$  приложения силы).

Покажем, что величина  $m_l(\mathbf{F})$  не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $OL$ . Пусть  $O'$  — другая точка на оси  $OL$ ,  $\mathbf{r}'$  — вектор из точки  $O'$  в точку  $M$ , а  $\mathbf{r}_0$  — вектор из точки  $O$  в точку  $O'$ , параллельный вектору  $\mathbf{l}$  (рис. 10).

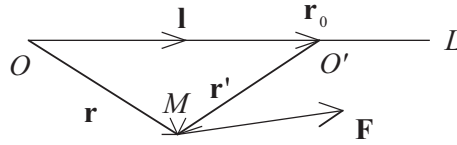


Рис. 10. Момент силы относительно оси.

Тогда

$$m'_l(\mathbf{F}) = (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = m_l(\mathbf{F}).$$

Рассмотрим плоскость  $S$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{l}$  и проходящую через точку приложения силы  $M$  (рис. 11).

Представим вектор  $\mathbf{F}$  в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_s$ , где  $\mathbf{F}_l \parallel \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{F}_s \in S$ . Пусть  $O$  — точка пересечения оси  $OL$  и плоскости  $S$ , а  $\mathbf{r}$  — вектор

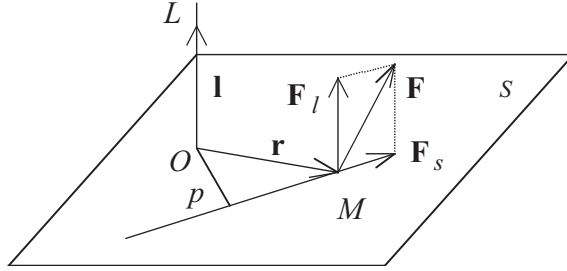


Рис. 11. Величина момента силы относительно оси.

из точки  $O$  в точку  $M$ . Тогда

$$m_l(\mathbf{F}) = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_s)] \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_s) \cdot \mathbf{l},$$

причем  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_s \parallel \mathbf{l}$ . Следовательно,

$$|m_l(\mathbf{F})| = m_O(\mathbf{F}_s) = pF_s,$$

где  $p$  — плечо силы  $\mathbf{F}_s$  (см. раздел 1).

Если  $p = 0$  или  $F_s = 0$ , то момент силы относительно оси равен нулю. В первом случае линия действия силы пересекает ось, во втором случае сила  $\mathbf{F}$  параллельна оси.

Таким образом, для вычисления модуля момента силы относительно оси следует найти проекцию этой силы на плоскость  $S$ , перпендикулярную оси, и определить величину момента этой проекции относительно точки пересечения оси и плоскости. Для определения знака момента силы надо посмотреть на плоскость  $S$  со стороны конца вектора  $\mathbf{l}$ . Если сила  $\mathbf{F}_s$  стремится повернуть тело против часовой стрелки, то  $m_l(\mathbf{F}) > 0$ , если по часовой стрелке, то  $m_l(\mathbf{F}) < 0$ .

Умножив уравнения равновесия (5) скалярно на орты  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , и  $\mathbf{k}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_x(\mathbf{F}_i)$ ,  $m_y(\mathbf{F}_i)$ ,  $m_z(\mathbf{F}_i)$  — моменты силы  $\mathbf{F}_i$  относительно осей координат. Ввиду того что умножение вектора на орт эквивалент-

но его проектированию на ось координат, уравнения (7) являются другой формой записи уравнений равновесия (6).

Если рассматривается система из  $n$  твердых тел, то для каждого из них можно записать шесть уравнений равновесия вида (6) или (7). Таким образом, число скалярных уравнений равновесия для системы из  $n$  твердых тел составляет  $6n$ .

#### 4.5. Решение уравнений равновесия

Уравнения равновесия могут иметь бесчисленное множество решений, если число входящих в них неизвестных сил больше, чем число уравнений. В этом случае задача называется статически неопределимой. Статически неопределимые задачи не могут быть решены до конца в рамках статики. При их решении к уравнениям равновесия нужно добавлять уравнения теории деформируемых твердых тел. Сравнивая число уравнений равновесия с числом неизвестных сил следует учитывать, что для конкретных задач некоторые из уравнений могут оказаться зависимыми. В частности, несколько уравнений могут превратиться в тождества. При выяснении вопроса о том, является ли задача статически неопределимой, нужно сравнивать число неизвестных с числом независимых уравнений равновесия. Рассмотрим две системы сил, для которых из шести уравнений (7) независимыми являются не более чем три уравнения.

##### 1) Сходящаяся система сил

Выберем начало координат  $O$  в точке, где пересекаются линии действия всех сил. Ввиду того что главный момент  $\mathbf{m}_O \equiv 0$ , три уравнения равновесия превращаются в тождества и для определения проекций сил остаются три уравнения

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (8)$$

При выборе начала координат в точке  $P$ , положение которой относительно точки  $O$  задано вектором  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$ , уравнений равновесия станет шесть, однако три из них, полученные проектированием на оси координат главного момента  $\mathbf{m}_P = -\mathbf{p} \times \mathbf{F}$ , будут линейными комбинациями уравнений (8) с коэффициентами  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ .

## 2) Плоская система сил

Пусть все силы лежат в плоскости  $S$ . Выберем в качестве начала координат точку  $O \in S$  и направим ось  $Oz$  перпендикулярно плоскости  $S$ . Тогда в силу равенств  $F_{iz} = 0$ ,  $z_i = 0$  три скалярных уравнения равновесия обращаются в тождества. Оставшиеся три уравнения

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (9)$$

используются для решения задач статики в случае плоской системы сил. Для плоской сходящейся системы сил третье уравнение превращается в тождество, если выбрать начало координат в точке пересечения линий действия сил.

Рассмотрим задачу о равновесии однородного стержня длиной  $l$ , опирающегося концами  $A$  и  $B$  на две абсолютно гладкие перпендикулярные плоскости (рис. 12).

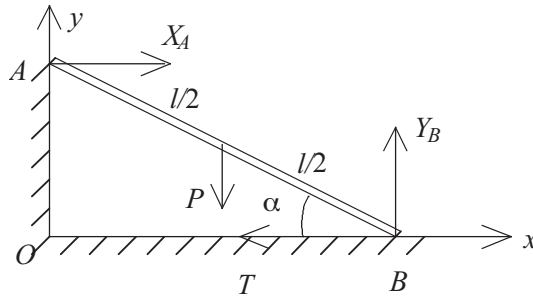


Рис. 12. Равновесие стержня.

Стержень лежит в плоскости  $Oxy$ . К концу стержня  $B$  привязана нить, второй конец которой закреплен в точке  $O$ . Приложенная к середине стержня сила веса  $P$  и угол  $\alpha \neq 0$  между отрезками  $BO$  и  $BA$  известны. Требуется найти силу натяжения нити  $T$  и реакции  $X_A$  и  $Y_B$ , которые из-за отсутствия трения направлены перпендикулярно к соответствующим плоскостям.

Уравнения (9) для рассматриваемой задачи принимают вид

$$X_A - T = 0, \quad -P + Y_B = 0, \quad -X_A l \sin \alpha + P \frac{l}{2} \cos \alpha = 0.$$



Третье уравнение получено из условия  $\mathbf{m}_B = 0$ . Система уравнений имеет решение

$$X_A = T = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad Y_B = P.$$

Предположим, что к концу стержня  $B$  привязана еще одна нить, второй конец которой закреплен в одной из внутренних точек отрезка  $OA$ . В этом случае система уравнений будет содержать дополнительную неизвестную — силу натяжения второй нити  $T'$ , и задача станет статически неопределимой. При ее решении необходимо учитывать растяжение нитей.

Если система сил не является сходящейся или плоской, то для решения задачи могут понадобиться шесть уравнений равновесия.

Рассмотрим задачу о равновесии однородной прямоугольной двери, имеющей петли в точках  $A$  и  $B$  (рис. 13). Выберем нача-

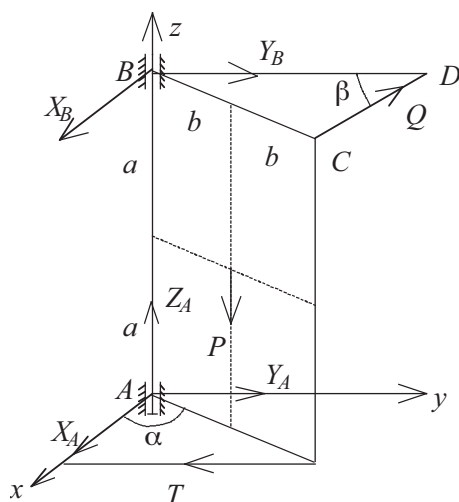


Рис. 13. Равновесие двери.

ло координат в точке  $A$  и направим ось  $z$  по оси вращения двери. Кроме силы веса  $P$ , параллельной оси  $Oz$ , на дверь действуют силы  $T$  и  $Q$ , лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси  $z$ .

Силы  $P$ ,  $Q$  и углы  $\alpha$ ,  $\beta$  заданы,  $AB = 2a$ ,  $BC = 2b$ . Неизвестными являются реакции  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$  и сила  $T$ .

Удобно заменить силу  $\mathbf{Q}$  суммой  $\mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y$ , где силы  $\mathbf{Q}_x$  и  $\mathbf{Q}_y$  параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$ ,

$$Q_x = Q \sin \beta, \quad Q_y = Q \cos \beta$$

(см. рис. 14, на котором изображен вид на дверь сверху).

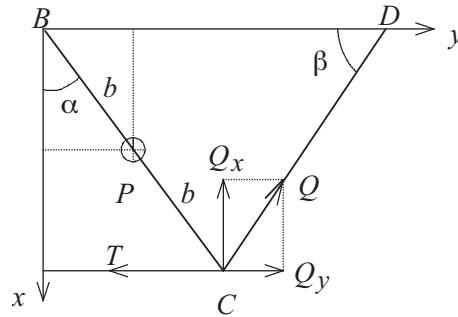


Рис. 14. Разложение силы  $\mathbf{Q}$ .

Спроектировав главный вектор системы сил на оси координат, получим первые три уравнения равновесия

$$X_A + X_B - Q_x = 0, \quad Y_A + Y_B - T + Q_y = 0, \quad Z_A - P = 0.$$

При составлении уравнений равновесия, содержащих моменты сил относительно осей координат, следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче большая часть этих моментов обращается в нуль. Так, например, моменты реакций  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $Z_A$  относительно всех осей координат равны нулю, так как каждая из этих сил параллельна одной из осей и пересекает две другие. В приведенной таблице знак  $+$  означает, что сила дает отличный от нуля момент относительно указанной оси и, следовательно, входит в соответствующее уравнение равновесия.

Ось	$X_B$	$Y_B$	$T$	$P$	$Q_x$	$Q_y$
$Ox$	-	+	-	+	-	+
$Oy$	+	-	-	+	+	-
$Oz$	-	-	+	-	+	+

Используя таблицу и рис. 13, 14, получаем остальные три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} -2Y_B a - Pb \sin \alpha - 2Q_y a &= 0, & 2X_B a + Pb \cos \alpha - 2Q_x a &= 0, \\ -2Tb \cos \alpha + 2Q_x b \sin \alpha + 2Q_y b \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

При  $\alpha \neq \pi/2$  решение системы уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} X_A &= \gamma P \cos \alpha, & Y_A &= T + \gamma P \sin \alpha, & Z_A &= P, \\ X_B &= Q_x - X_A, & Y_B &= -Q_y - \gamma P \sin \alpha, & T &= Q \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \end{aligned}$$

где  $\gamma = b/2a$ .

В случае  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $Q \neq 0$  решений нет (дверь не может находиться в равновесии). Если  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ , то шестое уравнение равновесия превращается в тождество, и задача становится статически неопределимой.

#### 4.6. Центр параллельных сил. Центр масс

Рассмотрим систему параллельных сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ , для которой

$$\mathbf{F}_i = F_{i\tau} \boldsymbol{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = 1.$$

Предположим, что главный вектор

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \tau \sum_{i=1}^n F_{i\tau} \neq 0.$$

Тогда и

$$F_\tau = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} \neq 0.$$

Покажем, что существует такая точка  $P$ , что  $\mathbf{m}_P = 0$ . Пусть  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{p}$  вектора из начала координат  $O$  в точку приложения  $M_i$  силы  $\mathbf{F}_i$ , из точки  $P$  в точку  $M_i$  и из точки  $O$  в точку  $P$  соответственно. Главный момент относительно точки  $P$

$$\mathbf{m}_P = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i) = \left[ \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) F_{i\tau} \right] \times \boldsymbol{\tau} = \left[ \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i F_{i\tau}) - \mathbf{p} F_\tau \right] \times \boldsymbol{\tau}$$

будет равен нулю, если

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i F_{i\tau}) - \mathbf{p} F_\tau = \lambda \boldsymbol{\tau},$$

где  $\lambda$  — любое вещественное число. Следовательно, для точки  $P$ , положение которой определяется вектором

$$\mathbf{p} = F_\tau^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_{i\tau} - \lambda \boldsymbol{\tau} \right),$$

справедливо равенство  $\mathbf{m}_P = 0$ . Таких точек, соответствующих всевозможным значениям  $\lambda$ , имеется бесчисленное множество. Они лежат на прямой, параллельной вектору  $\boldsymbol{\tau}$ .

Предположим, что  $\mathbf{m}_P = 0$  для системы параллельных сил  $(\mathbf{F}_i, M_i)$ , и рассмотрим систему параллельных сил  $(\mathbf{F}'_i, M_i)$ , полученную из системы  $(\mathbf{F}_i, M_i)$  поворотом всех сил на один и тот же угол. Для такой системы

$$\mathbf{F}'_i = F_{i\tau} \boldsymbol{\tau}', \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau' = 1.$$

Главный момент системы сил  $(\mathbf{F}'_i, M_i)$  относительно точки  $P$

$$\mathbf{m}'_P = \left[ \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i F_{i\tau}) - \mathbf{p} F_\tau \right] \times \boldsymbol{\tau}' = \lambda \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}'$$

будет равен нулю при любых  $\boldsymbol{\tau}'$  только в случае  $\lambda = 0$ . Точка  $C$ , которой соответствует  $\lambda = 0$ , называется *центром параллельных сил*. Положение точки  $C$  определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = F_\tau^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_{i\tau} \right).$$

Центр параллельных сил  $C$  является единственной точкой, для которой главный момент системы параллельных сил остается равным нулю при любом повороте всех сил на один и тот же угол.

Если размерами тела, имеющего массу  $m$ , можно пренебречь, то такое тело называют *материальной точкой* с массой  $m$ . Рассмотрим систему из  $n$  материальных точек  $M_i$  с массами  $m_i$ , находящуюся в поле силы тяжести. Тогда на каждую из точек действует сила

веса  $\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения. Центр параллельных сил системы  $(\mathbf{P}_i, M_i)$  называется *центром тяжести* системы материальных точек. Его положение определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = P^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i P_i \right), \quad P = \sum_{i=1}^n P_i.$$

Учитывая, что  $P_i = m_i g$ , получаем

$$\mathbf{r}_c = m^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i \right), \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Ввиду последнего равенства точку  $C$  называют также *центром масс* системы материальных точек. Ее координаты находятся по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{m},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты точки  $M_i$ .

Рассмотрим теперь вопрос об определении центра масс твердого тела. Пусть для любой части твердого тела отношение ее массы  $\Delta m$  к объему  $\Delta V$  есть постоянная величина  $\rho = \Delta m / \Delta V$ . В частности,  $m/V = \rho$ , где  $m$  — масса всего тела, а  $V$  — его объем. Тогда тело называется *однородным*, а  $\rho$  — его *плотностью*.

Разделим однородное тело плотностью  $\rho$  на  $n$  частей, имеющих массы  $\Delta m_i$ . Вектор  $\mathbf{r}'_c$ , приближенно определяющий положение центра масс твердого тела, находится по формуле

$$\mathbf{r}'_c = m^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta m_i \right),$$

где  $m$  — масса тела,  $\mathbf{r}_i$  — вектор из начала координат в некоторую точку  $i$ -й части тела. Учитывая, что  $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$ ,  $m = \rho V$ , получаем

$$\mathbf{r}'_c = V^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta V_i \right),$$

где  $V$  — объем тела. По определению вектор  $\mathbf{r}_c$ , задающий положение центра масс твердого тела, является пределом, к которому стремится вектор  $\mathbf{r}'_c$  при

$$n \rightarrow \infty, \quad \max_i \Delta V_i \rightarrow 0. \quad (10)$$

При предельном переходе (10) интегральная сумма в правой части равенства для  $\mathbf{r}'_c$  превращается в интеграл по объему (тройной интеграл). Следовательно,

$$\mathbf{r}_c = V^{-1} \int_G \mathbf{r} dV = V^{-1} \iiint_G \mathbf{r}(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $G$  — область пространства, занятая твердым телом.

Координаты центра масс твердого тела определяются по формулам

$$x_c = V^{-1} \int_G x dV, \quad y_c = V^{-1} \int_G y dV, \quad z_c = V^{-1} \int_G z dV.$$

Определенный интеграл является аддитивной функцией:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a \leq c \leq b.$$

Интеграл по объему тоже обладает свойством аддитивности. Разобьем область  $G$ , занимаемую твердым телом на две непересекающиеся части  $G_1$  и  $G_2$ . Тогда

$$\int_G f dV = \int_{G_1} f dV + \int_{G_2} f dV. \quad (11)$$

Предположим, что известны положения центров масс  $C_1$  и  $C_2$  частей тела  $G_1$  и  $G_2$ :

$$\mathbf{r}_{c1} = V_1^{-1} \int_{G_1} \mathbf{r} dV, \quad \mathbf{r}_{c2} = V_2^{-1} \int_{G_2} \mathbf{r} dV.$$

В этом случае положение центра масс  $C$  всего тела можно найти с помощью формулы (11):

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int_G \mathbf{r} dV}{V} = \frac{\int_{G_1} \mathbf{r} dV + \int_{G_2} \mathbf{r} dV}{V_1 + V_2} = \frac{\mathbf{r}_{c1}V_1 + \mathbf{r}_{c2}V_2}{V_1 + V_2}. \quad (12)$$

Отметим, что центр масс тела лежит на отрезке  $C_1C_2$ . Проще всего убедиться в этом, выбрав за начало координат точку  $C_1$ . Тогда  $\mathbf{r}_{c1} = 0$ , и из формулы (12) следует, что

$$\mathbf{r}_c = \alpha \mathbf{r}_{c2}, \quad \alpha = V_2/(V_1 + V_2).$$

Ввиду того что  $0 \leq \alpha \leq 1$ , последнее равенство означает, что точка  $C$  принадлежит отрезку  $C_1C_2$  (рис. 15).

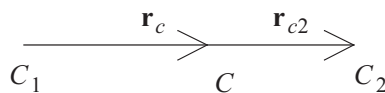


Рис. 15. Центры масс тела и его частей.

### Пример 1

Найдем положение центра масс однородного прямоугольного параллелепипеда шириной  $a$ , длиной  $b$  и высотой  $c$  (рис. 16).

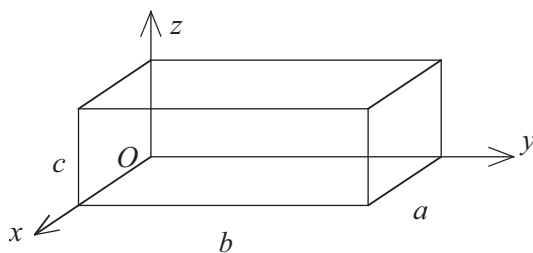


Рис. 16. Центр масс прямоугольного параллелепипеда.

Для области  $G$  в виде прямоугольного параллелепипеда интеграл по объему сводится к повторному интегралу:

$$\int_G f dV = \int_0^c \int_0^b \int_0^a f dx dy dz.$$

Следовательно,

$$x_c = V^{-1} \int_0^c \int_0^b \int_0^a x \, dx dy dz = V^{-1} \int_0^c \int_0^b \frac{a^2}{2} dy dz = \frac{a^2 bc}{2abc} = \frac{a}{2}.$$

Аналогичным образом получаем  $y_c = b/2$ ,  $z_c = c/2$ .

Если высота прямоугольного параллелепипеда  $c$  намного меньше его ширины и длины, то при определении его центра масс можно считать параллелепипед прямоугольником, полагая  $c = 0$ . Таким образом, центр масс прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  имеет координаты  $x_c = a/2$ ,  $y_c = b/2$ .

В случае  $a, c \ll b$  прямоугольный параллелепипед можно рассматривать как тонкий стержень длиной  $b$ . Центр масс стержня находится в его середине ( $y_c = b/2$ ).

### Пример 2

Найдем положение центра масс однородного круга. Выберем начало координат в центре круга и разделим его вертикальный диаметр на  $n$  равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные оси  $Ox$  (рис. 17). При достаточно большом значе-

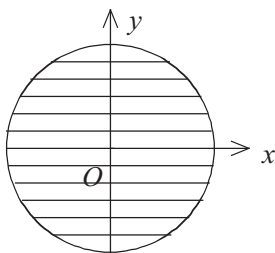


Рис. 17. Центр масс круга.

нии  $n$  каждую из частей круга, лежащую между двумя соседними прямыми, можно рассматривать как стержень. Центры масс всех этих стержней лежат на оси  $Oy$ . Следовательно, на оси  $Oy$  будет находиться и центр масс круга. Разбивая круг на части прямыми, параллельными оси  $Oy$ , получим, что центр масс круга лежит на оси  $Ox$ . Таким образом, центр масс круга совпадает с его центром ( $x_c = y_c = 0$ ).

### Пример 3



Используем тот же метод для определения положения центра масс треугольника (рис. 18). Разделив треугольник на части пря-

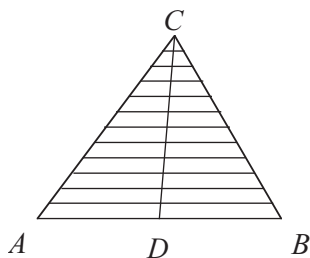


Рис. 18. Центр масс треугольника.

мыми, параллельными стороне  $AB$ , получим, что его центр масс лежит на медиане  $CD$ . Точно так же доказывается, что центр масс треугольника принадлежит двум другим медианам. Следовательно, центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан.

#### Пример 4

Найдем положение центра масс плоской фигуры, состоящей из квадрата со стороной  $a$  и прямоугольного равнобедренного треугольника (рис. 19).

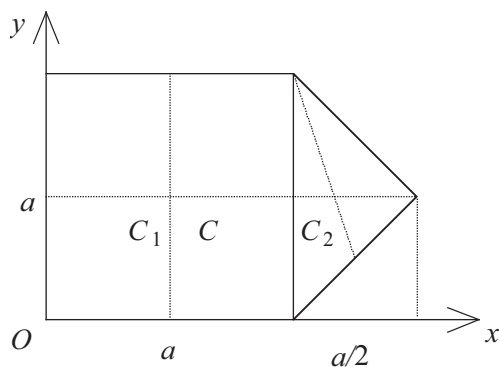


Рис. 19. Центр масс плоской фигуры.

Центры масс квадрата и треугольника  $C_1$  и  $C_2$  имеют координаты

наты

$$x_{c1} = y_{c1} = a/2, \quad x_{c2} = 7a/6, \quad y_{c2} = a/2.$$

Ввиду того что центр масс  $C$  всей плоской фигуры лежит на отрезке  $C_1C_2$ , его координата  $y_c = a/2$ . Координату центра масс  $x_c$ , можно найти с помощью формулы (12), учитывая, что для плоской фигуры объемы в (12) следует заменить площадями:

$$x_c = (x_{c1}S_1 + x_{c2}S_2)/(S_1 + S_2). \quad (13)$$

Подставив в формулу (13) значения координат центров масс и площадей квадрата  $S_1 = a^2$  и треугольника  $S_2 = a^2/4$ , получим

$$x_c = 19a/30.$$

### Пример 5

Найдем координаты центра масс  $C_1$  плоской фигуры, полученной вырезанием из круга радиуса  $R$  круга радиуса  $R/2$  (рис. 20).

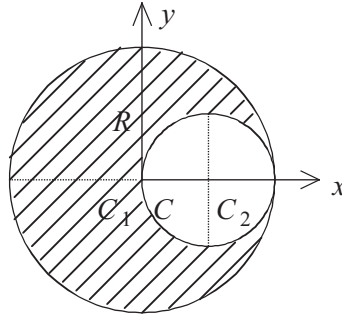


Рис. 20. Центр масс круга с вырезом.

Центр масс большого круга  $C$  принадлежит отрезку  $C_1C_2$ , где  $C_2$  центр масс малого круга. Следовательно, точка  $C_1$  лежит на оси  $Ox$  слева от точки  $C$ . Ее координата  $x_{c1}$  находится из уравнения (13), решение которого можно представить в виде

$$x_{c1} = (x_c S - x_{c2} S_2)/(S - S_2),$$

где  $S$  и  $S_2$  — площади большого и малого кругов. Учитывая, что

$$x_c = 0, \quad x_{c2} = R/2, \quad S = \pi R^2, \quad S_2 = \pi R^2/4,$$

получаем  $x_{c1} = -R/6$ .

#### 4.7. Равновесие ферм

*Фермой* называется конструкция, состоящая из прямолинейных стержней. Точки соединения стержней между собой и свободные концы стержней называются *узлами* фермы. В дальнейшем предполагается, что во всех узлах фермы имеются шарниры, а внешние силы приложены только к узлам фермы. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется *плоской*. Ферма называется *неизменяемой*, если она не меняет форму под действием любой приложенной к ней системы сил. В противном случае ферма называется *изменяемой*. Плоская ферма, изображенная на рис. 21,*a*, является неизменяемой, а ферма, изображенная на рис. 21,*b* и 21,*c*, — изменяемой. В зависимости от вида приложенной нагрузки изменяемая ферма либо складывается (рис. 21,*b*), либо сохраняет форму (рис. 21,*c*).

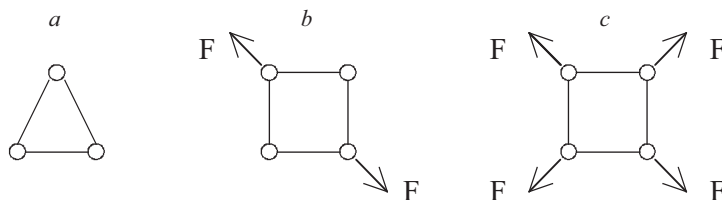


Рис. 21. Изменяемые и неизменяемые фермы.

Будем рассматривать далее только плоские фермы. При добавлении одного узла неизменяемая плоская ферма останется неизменяемой, если добавленный узел соединить с другими узлами не менее чем двумя стержнями. Простейшая неизменяемая ферма состоит из одного стержня и двух узлов, расположенных на его концах. Любая ферма может быть получена из простейшей добавлением к ней стержней и узлов. Пусть ферма, полученная таким способом из простейшей фермы, является неизменяемой и содержит  $s$  стержней и  $n$  узлов. Тогда число  $s - 1$  добавленных стержней должно быть больше удвоенного числа  $2(n - 2)$  добавленных узлов или равно ему, т. е.  $s - 1 \geq 2(n - 2)$  или

$$s \geq 2n - 3.$$

Неизменяемая ферма называется *простой*, если она содержит минимально возможное число стержней, т. е.  $s = 2n - 3$ .

Задача расчета фермы состоит в определении по заданным внешним силам внутренних усилий в стержнях и опорных реакций фермы. Рассмотрим в качестве примера расчет фермы, изображенной на рис. 22.

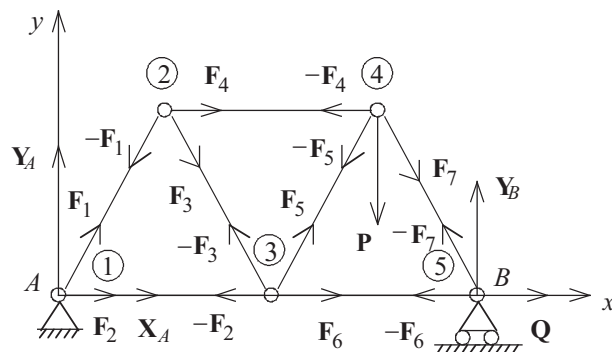


Рис. 22. Ферма из пяти стержней.

Ферма, состоит из семи одинаковых стержней, лежащих в плоскости  $xy$ . Она является простой, так как число стержней  $s = 7$  и число узлов  $n = 5$  удовлетворяют равенству  $s = 2n - 3$ . Неизвестными являются усилия в стержнях  $F_i$ ,  $i = 1, 2 \dots 7$  и реакции  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ . Внешние силы  $P$  и  $Q$  заданы.

Ферма будет находиться в равновесии, если находятся в равновесии все входящие в нее стержни и узлы. Узлы считаем точкам, пренебрегая их размерами. Каждый стержень подвергается воздействию двух сил, приложенных к его концам. Он будет находиться в равновесии, если эти силы равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль стержня. Силы действия стержней на узлы равны и противоположны силам действия узлов на стержни. Уравнения равновесия узлов для рассматриваемой фермы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A &= 0, & -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 &= 0, \\ -\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 &= 0, & -\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_7 + \mathbf{P} &= 0, \\ -\mathbf{F}_6 - \mathbf{F}_7 + \mathbf{Q} + \mathbf{Y}_B &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{F}_i$  — силы, действующие на узлы со стороны стержней. Векторные уравнения (14) эквивалентны десяти скалярным уравнениям. Таким образом, число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Направления неизвестных сил  $\mathbf{F}_i$  соответствуют растягивающим усилиям в стержнях. Если после решения задачи окажется, что  $F_i < 0$ , то это будет означать, что  $i$ -й стержень сжат.

Сложив уравнения (14), получим, что главный вектор внешних сил, действующих на ферму обращается в нуль:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A + \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{Y}_B = 0.$$

Пусть положения узлов относительно некоторой точки  $O$  заданы векторами  $\mathbf{r}_k$ . Умножим  $k$ -е уравнение (14) векторно на  $\mathbf{r}_k$  и сложим полученные равенства. Векторные произведения, содержащие вектор  $\mathbf{F}_i$ , в сумме дают нуль. Действительно,

$$\mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_i - \mathbf{r}_q \times \mathbf{F}_i = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \times \mathbf{F}_i = 0,$$

так как  $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \parallel \mathbf{F}_i$ . Следовательно, равен нулю и главный момент внешних сил:

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{X}_A + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{Y}_A + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_5 \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_5 \times \mathbf{Y}_B = 0.$$

Ввиду того что  $\mathbf{F} = 0$ , для любой точки  $P$  имеет место равенство  $\mathbf{m}_P = 0$ .

Очевидно, что приведенные выкладки справедливы для любой плоской фермы, находящейся в положении равновесия. Следовательно, ферма, рассматриваемая как твердое тело, находится в равновесии под действием внешних сил. Если задача для фермы как твердого тела статически определима, т. е. содержит три неизвестные внешние силы, то общее число неизвестных внешних и внутренних сил составляет  $s + 3$ . Число уравнений равновесия узлов равно  $2n$ . Если ферма простая, то  $2n = s + 3$  и задача в целом будет статически определимой.

Спроектировав уравнения (14) на оси  $x$  и  $y$ , получим

$$\begin{aligned} X_A + \frac{1}{2}F_1 + F_2 &= 0, & Y_A + \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 &= 0, \\ -\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_3 + F_4 &= 0, & -\frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_3 &= 0, \\ -F_2 - \frac{1}{2}F_3 + \frac{1}{2}F_5 + F_6 &= 0, & \frac{\sqrt{3}}{2}F_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_5 &= 0, \\ -F_4 - \frac{1}{2}F_5 + \frac{1}{2}F_7 &= 0, & -\frac{\sqrt{3}}{2}F_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 - P &= 0, \\ -F_6 - \frac{1}{2}F_7 + Q &= 0, & \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 + Y_B &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При решении системы (15) удобно использовать уравнения равновесия фермы как твердого тела

$$X_A + Q = 0, \quad Y_A + Y_B - P = 0, \quad -\frac{3}{2}Pl + 2lY_B = 0, \quad (16)$$

где  $l$  — длина стержня. Третье уравнение (16) получено из условия  $\mathbf{m}_A = 0$ . Систему уравнений, равносильную (16), можно получить исключением из системы (15) неизвестных  $F_1, F_2, \dots, F_7$ . Решение системы (16) имеет вид

$$X_A = -Q, \quad Y_B = \frac{3}{4}P, \quad Y_A = \frac{1}{4}P.$$

Подставив эти выражения в систему (15), получим

$$F_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}P, \quad F_2 = Q + \frac{1}{4\sqrt{3}}P, \quad F_3 = -F_1, \\ F_4 = F_5 = F_1, \quad F_6 = Q + \frac{\sqrt{3}}{4}P, \quad F_7 = 3F_1.$$

#### 4.8. Силы трения

Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой плоскости. Сила веса  $\mathbf{P}$ , действующая на тело уравновешивается реакцией  $\mathbf{N}$  (рис. 23).

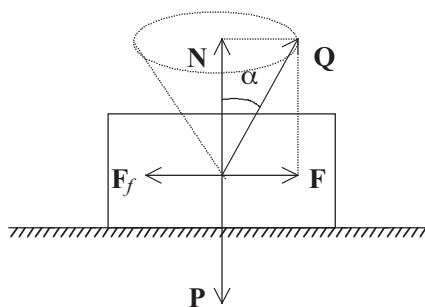


Рис. 23. Конус трения.

Если приложить к телу горизонтальную силу  $\mathbf{F}$  такую, что  $F \leq fN$ , где  $f$  — коэффициент трения, то тело останется в равновесии из-за того, что возникнет сила трения покоя  $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}$

(рис. 23). Коэффициент трения  $f$  зависит от материала и свойств соприкасающихся поверхностей и определяется экспериментально. В случае  $F > fN$  тело начнет скользить по плоскости. При движении тела сила трения направлена в сторону, противоположную скорости тела, а ее величина определяется равенством  $F_f = f_s N$ . Коэффициент трения  $f_s$  зависит от скорости движения, но во многих задачах эту зависимость можно игнорировать и считать, что  $f_s = f$ . Отметим, что в положении равновесия направление и величина силы трения определяются величиной и направлением силы  $\mathbf{F}$ , причем  $0 \leq F_f \leq fN$ . При движении тела направление и величина силы трения  $F_f = fN$  не будут зависеть от силы  $\mathbf{F}$ , если пренебречь зависимостью коэффициента трения от скорости.

Конус с углом полураствора  $\alpha = \operatorname{arctg} f$ , ось которого направлена вдоль вектора  $\mathbf{N}$ , называется *конусом трения* (рис. 23). Если вектор  $\mathbf{Q} = \mathbf{N} + \mathbf{F}$  лежит внутри конуса трения, то тело находится в равновесии. Действительно, в этом случае  $F/N \leq \operatorname{tg} \alpha = f$ .

Рассмотрим цилиндр радиуса  $R$ , лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости. Предположим, что на цилиндр действуют сила веса  $\mathbf{P}$ , равнодействующая сил реакции  $\mathbf{N} = -\mathbf{P}$ , горизонтальная сила  $\mathbf{F}$  и сила трения  $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}$  (рис. 24).

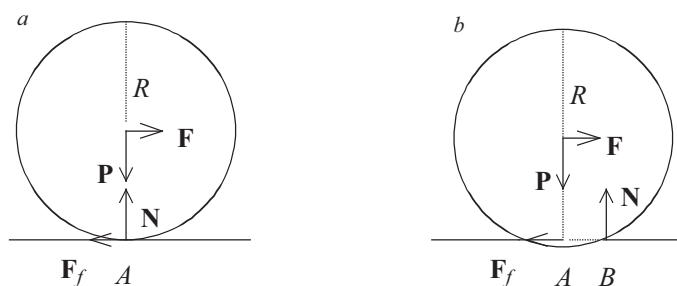


Рис. 24. Трение качения.

Если цилиндр и плоскость являются абсолютно твердыми, то моменты сил  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}_f$  относительно точки  $A$ , лежащей на линии касания цилиндра и плоскости, равны нулю (см. рис. 24, *a*). В этом случае любая как угодно малая горизонтальная сила  $\mathbf{F}$  вызовет качение цилиндра по плоскости, так как главный момент  $\mathbf{m}_A = \mathbf{m}_A(\mathbf{F})$  системы сил, действующих на цилиндр, не будет равен нулю.

Однако опыт показывает, что обычно качение начинается только после того, как горизонтальная сила достигнет определенного ненулевого значения. Этот факт объясняется деформированием цилиндра и плоскости, возникающим вследствие давления цилиндра на плоскость. Благодаря этой деформации цилиндр и плоскость соприкасаются не по прямой линии, а вдоль некоторой площадки. С увеличением силы  $\mathbf{F}$  точка  $B$  приложения силы реакции  $\mathbf{N}$  смещается в направлении действия силы  $\mathbf{F}$  (см. рис. 24,  $b$ ). Это смещение приводит к возникновению момента  $\mathbf{m}_A(\mathbf{N})$  реакции  $\mathbf{N}$  относительно точки  $A$ . При достаточно малых значениях  $F$  главный момент

$$m_A = m_A(\mathbf{F}) + m_A(\mathbf{N}) = 0$$

и цилиндр находится в равновесии.

Длина отрезка  $AB$  не может быть больше некоторой величины  $k$ , зависящей от свойств материалов соприкасающихся тел. Величина  $k$ , имеющая размерность длины, называется *коэффициентом трения качения*. До тех пор пока  $m_A(\mathbf{F}) = FR \leq Nk$ , цилиндр находится в равновесии. При  $FR > Nk$  цилиндр покатится по плоскости.

Следовательно, условием начала качения цилиндра является неравенство

$$F > Nk/R.$$

Сравнивая это условие с условием начала скольжения цилиндра по плоскости

$$F > fN,$$

можно сделать вывод, что в случае

$$k/R < f$$

при увеличении  $F$  цилиндр покатится прежде, чем начнет скользить.

### Формула Эйлера

Рассмотрим нить, касающуюся поверхности кругового цилиндра вдоль дуги с центральным углом  $\alpha$  (рис. 25,  $a$ ).

Коэффициент трения нити о цилиндр равен  $f$ . Пусть к одному концу нити приложена сила  $\mathbf{T}_1$ . Найдем наименьшую по величине силу  $\mathbf{T}_0$ , которую надо приложить к другому концу нити для того,



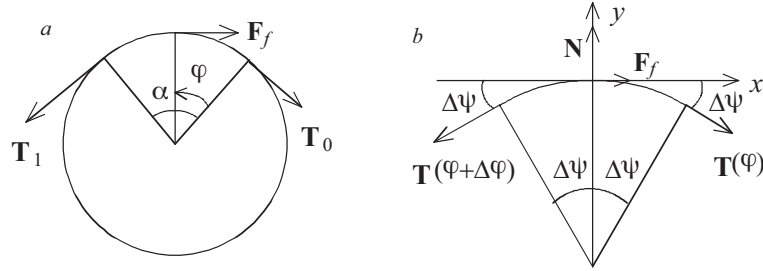


Рис. 25. Задача Эйлера.

чтобы нить находилась в равновесии. Если бы сила трения отсутствовала, то нить находилась бы в равновесии только при  $T_0 = T_1$ . При наличии силы трения равновесие возможно и при  $T_0 \neq T_1$ . Если, например,  $T_1 > T_0$ , то между нитью и цилиндром возникает сила трения, препятствующая движению нити против часовой стрелки (см. рис. 25,а). При заданном значении  $T_1$ , значение  $T_0$  будет наименьшим в том случае, когда сила трения  $F_f$  имеет наибольшую величину  $fN$ .

В качестве координаты точки на нити будем использовать угол  $\varphi$ . Обозначим  $\mathbf{T}(\varphi)$  силу натяжения нити в точке с координатой  $\varphi$ . Если нить находится в равновесии, то и часть нити, ограниченная углами  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$ , будет находиться в равновесии. Следовательно, главный вектор сил, действующих на рассматриваемую часть нити, будет равен нулю (рис. 25,б):

$$\mathbf{T}(\varphi + \Delta\varphi) + \mathbf{T}(\varphi) + \mathbf{N} + \mathbf{F}_f = 0, \quad (17)$$

где  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}_f$  — равнодействующие сил реакции и сил трения соответственно. Спроектировав равенство (17) на оси  $Ox$  и  $Oy$ , получим

$$\begin{aligned} -(T + \Delta T) \cos \Delta\psi + T \cos \Delta\psi + F_f &= 0, \\ -(T + \Delta T) \sin \Delta\psi - T \sin \Delta\psi + N &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\Delta\psi = \Delta\varphi/2$ ,  $\Delta T = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi)$ . Заменяем в равенствах (18) величину силы трения  $F_f$  ее максимальным значением  $fN$ . Тогда из равенств (18) следует, что

$$\Delta T \cos \Delta\psi = f(2T + \Delta T) \sin \Delta\psi.$$

Разделив это равенство на  $\Delta\varphi$  и перейдя к пределу при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ,

получим уравнение для определения функции  $T(\varphi)$

$$\frac{dT}{d\varphi} = fT,$$

решение которого имеет вид

$$T = Ce^{f\varphi}.$$

Принимая во внимание, что  $T = T_0$  при  $\varphi = 0$ , находим значение постоянной  $C = T_0$ . Следовательно,

$$T = T_0e^{f\varphi}, \quad T_1 = T_0e^{f\alpha}, \quad T_0 = T_1e^{-f\alpha}.$$

Последняя формула дает решение поставленной задачи и называется формулой Эйлера.

При трении каната о дерево  $f = 0.5$ . Если обернуть канат вокруг деревянного столба два раза, то

$$T_0 = T_1e^{-4\pi f} = T_1e^{-2\pi} \simeq 0.002T_1.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае силу  $T_1 = 1000$  кГ можно уравновесить силой  $T_0 \simeq 2$  кГ.

#### 4.9. Статика нити

Рассмотрим абсолютно гибкую нить с концами в точках  $A$  и  $B$ , находящуюся в равновесии под действием нагрузки, распределенной вдоль нити. В качестве координаты точки  $M$  на оси нити будем использовать длину  $s$  дуги  $AM$  (рис. 26).

Часть нити от точки  $M$  с координатой  $s$  до точки  $M'$  с координатой  $s + \Delta s$  тоже будет находиться в равновесии. На нее действуют силы натяжения  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$  и  $\mathbf{T}' = -\mathbf{T}(s + \Delta s)$ , приложенные в точках  $M$  и  $M'$ , и равнодействующая распределенных сил  $\Delta\mathbf{F}$  (см. рис. 26).

Вектор  $\mathbf{q}_* = \Delta\mathbf{F}/\Delta s$  называется *средней распределенной нагрузкой* на отрезке  $[s, s + \Delta s]$ , а вектор

$$\mathbf{q} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{q}_* = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta s}$$

— *распределенной нагрузкой* в точке  $M$ . В случае действия на нить силы веса

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta m\mathbf{g} = S\Delta s\rho\mathbf{g}, \quad \mathbf{q} = S\rho\mathbf{g},$$

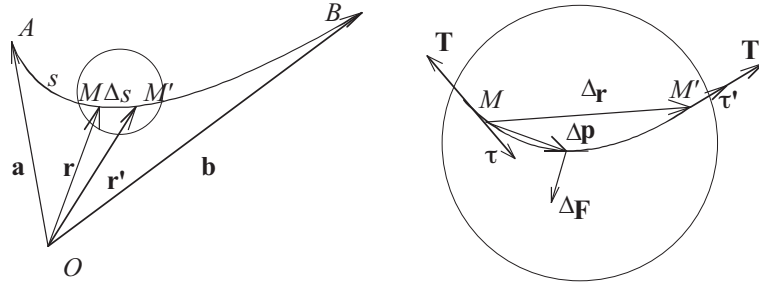


Рис. 26. Равновесие нити.

где  $S$  — площадь поперечного сечения нити,  $\rho$  — плотность нити,  $g$  — ускорение свободного падения.

Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в произвольной точке  $O$ . Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(s + \Delta s)$  — вектора из точки  $O$  в точки  $M$  и  $M'$  соответственно.

Ввиду того что часть нити  $MM'$  находится в равновесии, главный момент действующих на нее сил, относительно любой точки, в том числе и точки  $M$ , равен нулю:

$$\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{T}' + \Delta \mathbf{p} \times \Delta \mathbf{F} = 0.$$

Здесь  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)$ ,  $\Delta \mathbf{p}$  — вектор из точки  $M'$  в точку приложения силы  $\Delta \mathbf{F}$  (см. рис. 26). Последнее равенство поделим на  $\Delta s$  и перейдем к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ . Учитывая, что при предельном переходе

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{T}' \rightarrow -\mathbf{T}, \quad \Delta \mathbf{p} \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s} \rightarrow \mathbf{q},$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной в точке  $M$ , получим равенство

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{T} = 0,$$

которое означает, что сила натяжения  $\mathbf{T} = -T\boldsymbol{\tau}$ , т. е. она направлена по касательной к оси нити, причем  $T > 0$ , так как нить не может находиться в равновесии под действием сжимающей силы.

Равен нулю и главный вектор сил, действующих на часть нити  $MM'$ :

$$\mathbf{T}' + \mathbf{T} + \Delta \mathbf{F} = 0,$$

где  $\mathbf{T}' = T'\boldsymbol{\tau}'$ ,  $T' = T(s + \Delta s)$ ,  $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}(s + \Delta s)$ . Разделим это равенство на  $\Delta s$  и перепишем в виде

$$\frac{T'\boldsymbol{\tau}' - T\boldsymbol{\tau}}{\Delta s} + \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s} = 0,$$

Перейдя к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{d}{ds}(T\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{q} = 0.$$

Подстановка в это равенство  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$  дает векторное уравнение равновесия нити

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) + \mathbf{q} = 0.$$

Спроектировав это векторное уравнение на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , получим три скалярных уравнения

$$(Tx')' + q_x = 0, \quad (Ty')' + q_y = 0, \quad (Tz')' + q_z = 0,$$

где  $q_x, q_y, q_z$  — проекции распределенной нагрузки на оси координат,  $x' = dx/ds$ .

Для определения четырех неизвестных функций  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  и  $T(s)$  получено только три уравнения. Четвертое уравнение

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$$

следует из равенства  $\tau = 1$ , так как

$$\boldsymbol{\tau} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия нити имеет шестой порядок. Ее общее решение зависит от шести произвольных постоянных. Для их определения используются граничные условия на концах нити. Пусть левому и правому концам нити  $A$  и  $B$  соответствуют координаты  $s = s_1$  и  $s = s_2$ . Тогда граничные условия, определяющие положения концов нити, имеют вид

$$\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}(s_2) = \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — вектора из точки  $O$  в точки  $A$  и  $B$  (см. рис. 26). Последние два векторных равенства эквивалентны шести скалярным граничным условиям.

#### 4.10. Равновесие нити под действием собственного веса

Рассмотрим задачу о равновесии нити под действием ее собственного веса. Пусть концы нити закреплены в точках  $A$  и  $B$ . Выберем за начало координат одну из точек плоскости  $S$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$  и параллельной вектору ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$ . В качестве ортов возьмем единичные вектора  $\mathbf{j} = -\mathbf{g}/g$ ,  $\mathbf{k} \perp S$  и  $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$  (рис. 27).

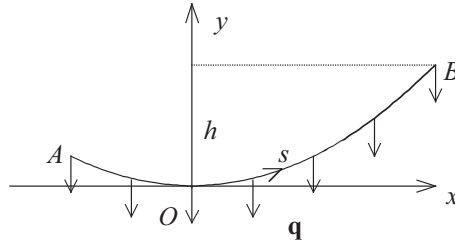


Рис. 27. Равновесие нити под действием силы веса.

Учитывая, что распределенная нагрузка  $\mathbf{q} = S\rho\mathbf{g} = -S\rho g\mathbf{j}$  имеет проекции  $q_x = q_z = 0$ ,  $q_y = -q$ , где  $q = S\rho g$ , запишем уравнения равновесия нити

$$(Tx')' = 0, \quad (Ty')' = q, \quad (Tz')' = 0. \quad (19)$$

На концах нити  $z(s_1) = z(s_2) = 0$ , поэтому функция  $z(s) = 0$  удовлетворяет уравнениям равновесия (19) и граничным условиям. Таким образом, ось нити лежит в плоскости  $Oxy$ .

Предположим, что  $x(s_1) \neq x(s_2)$ . Интегрирование первых двух уравнений (19) дает равенства

$$Tx' = C_1, \quad Ty' = qs + C_2. \quad (20)$$

Пусть в некоторой точке нити  $Ty' = 0$ . Случай, когда ни в одной из точек нити  $Ty' \neq 0$ , мы не рассматриваем, так как для него решение задачи оказывается довольно громоздким. Выберем точку, в которой  $Ty' = 0$  за начало отсчета координаты  $s$ . Тогда  $C_2 = 0$ . Если  $T(0) = 0$ , то  $C_1 = 0$  и либо  $T(s) = 0$ , либо  $x' = 0$ . Равенство  $T(s) = 0$  противоречит уравнениям, а равенство  $x' = 0$  — условию

$x(s_1) \neq x(s_2)$ . Следовательно,  $T(0) \neq 0$ , и  $y' = 0$  при  $s = 0$ . Из уравнения

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 \quad (21)$$

вытекает, что  $x' = 1$  при  $s = 0$ , поэтому  $C_1 = T(0) \equiv T_0 > 0$  и уравнения (20) можно записать в виде

$$Tx' = T_0, \quad Ty' = qs. \quad (22)$$

Возведем уравнения (22) в квадрат и сложим. С учетом уравнения (21), получим

$$T^2 = T_0^2 + q^2 s^2.$$

Следовательно,

$$x' = \frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 + q^2 s^2}}.$$

Введем обозначение  $\beta = T_0/q$  и перепишем это равенство в виде

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + s^2}}.$$

Проведем замену переменной по формуле  $s = \beta \operatorname{sh} v$ . Принимая во внимание, что

$$ds = \beta \operatorname{ch} v dv, \quad \operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v = 1,$$

получим

$$dx = \beta dv, \quad x = \beta v + C_3.$$

Выберем начало координат  $O$  в точке нити с координатой  $s = 0$  (см. рис. 27). Тогда  $C_3 = 0$ ,

$$s = \beta \operatorname{sh} v = \beta \operatorname{sh}(x/\beta).$$

Разделив второе уравнение (22) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{T_0} = \frac{s}{\beta} = \operatorname{sh}(x/\beta), \quad y = \beta \operatorname{ch}(x/\beta) + C_4.$$

Из условия  $y = 0$  при  $s = 0$  вытекает, что  $C_4 = -\beta$ . Следовательно,

$$y = \beta[\operatorname{ch}(x/\beta) - 1],$$

т. е. ось нити является цепной линией.

Обозначим  $x(s_k) = a_k$ ,  $y(s_k) = b_k$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда

$$s_k = \beta \operatorname{sh}(a_k/\beta), \quad b_k = \beta[\operatorname{ch}(a_k/\beta) - 1], \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Рассмотрим случай  $b_1 = b_2 = h$ . Тогда из формул (23) и условия  $a_1 \neq a_2$  следует, что

$$a_1 = -a, \quad a_2 = a, \quad s_1 = -l, \quad s_2 = l,$$

Длина нити

$$L = s_2 - s_1 = 2l = 2\beta \operatorname{sh}(a/\beta),$$

а ее наибольший прогиб

$$h = \beta[\operatorname{ch}(a/\beta) - 1].$$

Введем обозначение  $\alpha = a/\beta$ . Тогда

$$\frac{h}{a} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\alpha}.$$

Предположим, что относительный максимальный прогиб нити  $h/a$  является малой величиной. В этом случае будет малой и величина  $\alpha$ . Разложив в ряд функцию  $\operatorname{ch} \alpha$  и отбросив в этом разложении малые члены, получим следующую приближенную формулу:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots - 1 \right) \simeq \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$h \simeq \frac{qa^2}{2T_0}. \quad (24)$$

Провод, по которому движется токосъемник электрички, можно рассматривать как гибкую нерастяжимую нить. Значительный прогиб провода препятствует нормальному движению электрички. Найдем величину силы натяжения провода, при которой максимальный прогиб составляет 10 см. Пусть расстояние между столбами  $2a = 50$  м, распределенная нагрузка  $q = 0.5$  кГ/м. С помощью формулы (24) получаем

$$T_0 \simeq \frac{qa^2}{2h} = \frac{0.5 \cdot 625}{2 \cdot 0.1} \simeq 1560 \text{ кГ}.$$

В качестве упражнения показать, что при малых  $\alpha$  имеет место приближенное равенство  $T(l) \simeq T_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгольц Н.Н.* Основы теоретической механики. М., 1965.
2. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М., 1992.



## Оглавление

<b>4</b>	<b>Статика</b>	<b>1</b>
4.1.	Основные определения . . . . .	1
4.2.	Эквивалентные системы сил . . . . .	4
4.3.	Приведение системы сил к простейшему виду . . . . .	8
4.4.	Уравнения равновесия . . . . .	12
4.5.	Решение уравнений равновесия . . . . .	15
4.6.	Центр параллельных сил. Центр масс . . . . .	19
4.7.	Равновесие ферм . . . . .	27
4.8.	Силы трения . . . . .	30
4.9.	Статика нити . . . . .	34
4.10.	Равновесие нити под действием собственного веса . . . . .	37