# Глава 5

# Общие теоремы динамики

Динамика изучает движение твердых тел под действием приложенных к ним сил и составляет основную часть теоретической механики.

## 5.1. Законы Ньютона

В некоторых случаях можно пренебречь размерами реального движущегося тела и рассматривать его как точку. Предположим, что положение такой точки относительно прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (системы отсчета) задано вектором $\mathbf{r}(t)$. Поставим в соответствии этой точке скалярную величину m, которую будем называть массой точки. Точка, снабженная массой, называется *материальной точкой.*

Материальная точка может взаимодействовать с другими телами. Воздействие этих тел на материальную точку определяется вектором $\mathbf{F}$, который называется силой. Сила может возникать как при непосредственном соприкосновении тел, так и в том случае, когда тела находятся на некотором расстоянии друг от друга (сила всемирного тяготения, сила взаимодействия между заряженными телами, и т. д.)

Если взаимодействия материальной точки с другими телами отсутствует т.е. $\mathbf{F}$=0, то материальная точка называется *изолированной.*

**Первый закон Ньютона.** Изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, т. е. ее вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ сохраняет постоянное значение: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. В частности, при

$\mathbf{v}_0 = 0$ материальная точка находится в равновесии.

Система отсчета $Oxyz$ называется *инерциальной*, если в ней выполняется первый закон Ньютона.

Если $Oxyz$ инерциальная система отсчета, то любая система $O_1x_1y_1z_1$, движущаяся поступательно относительно $Oxyz$ с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$ тоже будет инерциальной. Действительно, по теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r$$

и, следовательно, скорость изолированной материальной точки в новой системе координат

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$$

тоже будет постоянной.

**Второй закон Ньютона.** В инерциальной системе отсчета выполняется равенство

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}$$

где $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$ — *количество движения (импульс)* материальной точки.

Обычно во время движения материальной точки ее масса не меняется. Исключением из этого правила является, например, движение ракеты, масса которой уменьшается по мере сгорания топлива. В дальнейшем, если не оговорено обратное, масса материальной точки считается постоянной. В этом случае

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{w}$$

где $\mathbf{w} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ — ускорение материальной точки, и второй закон Ньютона принимает вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

т. е. вектор ускорения пропорционален вектору силы.

В правильности второго закона можно убедиться экспериментально. Силу измеряют динамометром, а для определения массы пользуются формулой $m = P/g$, где $P$ — вес тела, $g$ — ускорение свободного падения. Разумеется все величины должны измеряться

| Сист. ед. | Длина | Время | Масса | Сила |
|---|---|---|---|---|
| СИ | м | с | кг | Н |
| МКС | м | с | т.е.м. | кГ |
| СГС | см | с | г | дина |

с помощью одной и той же системы единиц. В таблице приведены единицы измерения основных механических величин для трех систем единиц.

Основной системой единиц в России является система СИ (метр, секунда, килограмм массы, Ньютон). По определению 1 Н — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с$^2$. Следовательно, 1 Н=1 кг·м/с$^2$.

До введения системы СИ, вместо нее использовалась система МКС (метр, секунда, техническая единица массы, килограмм силы). По определению 1 кГ — вес тела, имеющего массу 1 кг. Ввиду этого 1 кГ=1 кг·9.8 м/с$^2$=9,8 Н. Технической единицей массы (т.е.м.) называется масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с$^2$. Таким образом, 1 т.е.м=1 кГ/1 м/с$^2$= 9,8 Н/1 м/с$^2$=9,8 кг.

Применяется и система СГС (сантиметр, секунда, грамм, дина). По определению 1 дина=1 г·см/с$^2$=$10^{-3}$кг·$10^{-2}$м/с$^2$=$10^{-5}$ Н.

Следует пользоваться наиболее удобной для рассматриваемой задачи системой единиц. При решении сложных задач целесообразно вводить безразмерные переменные.

**Третий закон Ньютона.** Силы взаимодействия $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ двух материальных точек направлены в противоположные стороны и равны по величине: $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ (равенство действия и противодействия). Следует отметить, что силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к разным телам.

В примечании к указанным трем законам Ньютон рассматривал совместное действие сил.

**Совместное действие сил.** Действие на материальную точку двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ эквивалентно действию на нее одной равнодействующей силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Следовательно, действие на материальную точку $n$ сил $\mathbf{F}_i$ эквивалентно действию одной равнодействующей силы

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

Если равнодействующая $\mathbf{F} = 0$, то материальная точка ведет себя как изолированная.

## 5.2. Прямая и обратная задача динамики

Предположим, что на материальную точку с массой $m$, положение которой определяется вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, действует сила $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Спроектировав векторное уравнение второго закона Ньютона

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

на оси прямоугольной декартовой системы координат $Ox$, $Oy$, $Oz$, получим три скалярных уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

Точкой обозначена производная по времени $t$.

**Прямая задача динамики.** Пусть задано движение материальной точки, т. е. известны функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Требуется найти силу, действующую на материальную точку.

Из уравнений движения следует, что для определения проекций вектора $\mathbf{F}$ надо два раза продифференцировать по времени функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и умножить эти производные на массу точки.

**Обратная задача динамики.** Пусть задана сила $\mathbf{F}$, действующая на материальную точку, а также положение и скорость материальной точки в некоторый момент времени $t = t_0$: $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Предполагается, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ т. е. сила может зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости. Требуется найти закон движения материальной точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

В этом случае уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

рассматриваются как система дифференциальных уравнений шестого порядка для определения неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Решение системы (5.1) должно удовлетворять шести начальным условиям:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}. \end{aligned}$$

Таким образом, обратная задача сводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений движения.

Пусть общее решение системы (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= f(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ y &= g(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ z &= h(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}$$

Подстановка общего решения в начальные условия дает систему шести алгебраических уравнений для определения постоянных $C_1$, $C_2$, …, $C_6$:

$$\begin{aligned} f(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= x_0, & \dot{f}(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= v_{x0},\\ g(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= y_0, & \dot{g}(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= v_{y0},\\ h(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= z_0, & \dot{h}(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_6) &= v_{z0}. \end{aligned}$$

Определив из этой системы постоянные $C_1$, $C_2$, …, $C_6$, получим решение обратной задачи.

**Пример.** Рассмотрим движение материальной точки под действием силы веса $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}$. Система уравнений движения имеет вид

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Выберем начальные условия, соответствующие падению материальной точки с высоты $h$ с нулевой начальной скоростью:

$$x = y = 0, \quad z = h, \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0, \quad \text{при} \quad t = 0,$$

Подставив общее решение

$$\begin{gathered} \dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2, \quad \dot{z} = -gt + C_3,\\ x = C_1 t + C_4, \quad y = C_2 t + C_5, \quad z = -gt^2/2 + C_3 t + C_6 \end{gathered}$$

в начальные условия, получим

$$\begin{gathered} C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0, \quad C_6 = h,\\ x = y = 0, \quad z = h - gt^2/2. \end{gathered}$$

Пусть $z = 0$ при $t = t_1$. Тогда $h = gt_1^2/2$, где $t_1$ — время падения материальной точки с высоты $h$.

В качестве упражнения найти решение этой задачи для начальных условий

$$x = y = z = 0, \quad \dot{x} = v_0 \sin\alpha, \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha \quad \dot{z} = 0, \quad \text{при} \quad t = 0,$$

соответствующих движению тела, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту. Определить значение угла, при котором дальность полета будет наибольшей.

Рассмотрим теперь систему из $N$ материальных точек с массами $m_i$, положения которых определяются векторами $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. При исследовании движения планет солнечную систему можно рассматривать как систему материальных точек. Для каждой из точек выполняется второй закон Ньютона.

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

где $\mathbf{F}_i$ — главный вектор сил, действующих на $i$-ю точку. Для системы материальных точек можно сформулировать прямую и обратную задачи динамики.

**Прямая задача.** Если заданы законы движения точек $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, то силы $\mathbf{F}_i$ можно найти дифференцированием.

**Обратная задача.** Если заданы силы,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}, \ldots \dot{\mathbf{r}_N}),$$

действующие на каждую из точек, и начальные условия

$$\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то для определения $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, мы получаем систему $3N$ дифференциальных уравнений второго порядка, проектируя уравнения второго закона Ньютона на оси координат:

$$\begin{array}{l} m_i\ddot{x}_i = F_{ix}(t, x_1, x_2, \ldots z_N, \dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots \dot{z_N}), \\ m_i\ddot{y}_i = F_{iy}(t, x_1, x_2, \ldots z_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{z_N}), \\ m_i\ddot{z}_i = F_{iz}(t, x_1, x_2, \ldots z_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{z}_N). \end{array} \tag{5.2}$$

Система (5.2) имеет порядок $6N$, поэтому ее общее решение зависит от $6N$ произвольных постоянных. Эти постоянные находятся после подстановки общего решения в начальные условия.

### 5.3. Интегралы системы уравнений движения

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — решение системы (5.1). Тогда функция $\varphi$ называется интегралом системы (5.1), если

$$\varphi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C,$$

где $C$ — константа.

Если $\varphi$ — интеграл, то интегралом будет любая функция $F(\varphi)$, так как из равенства $\varphi = C$, вытекает, что $F(\varphi) = F(C)$.

Интегралы системы (5.1) можно использовать для нахождения ее общего решения. Предположим, что известны 6 интегралов системы (5.1):

$$\varphi_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots 6. \tag{5.3}$$

Если система уравнений (5.3) разрешима относительно неизвестных $x$, $y$, $z$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при любых $C_i$, то интегралы называются независимыми, а решение системы (5.3)

$$\begin{aligned} x &= f(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ y &= g(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ z &= h(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \end{aligned}$$

представляет собой общее решение системы дифференциальных уравнений (5.1).

Отметим, что интегралы $\varphi$ и $F(\varphi)$ не являются независимыми, так как система уравнений

$$\varphi = C_1, \quad F(\varphi) = C_2$$

не имеет решений при $C_2 \neq F(C_1)$.

Для задачи о движении материальной точки под действием силы веса (см. пример из раздела 5.2) независимыми интегралами являются функции

$$\varphi_1 = \dot{x}, \quad \varphi_2 = \dot{y}, \quad \varphi_3 = \dot{z} + gt,$$
$$\varphi_4 = x - \dot{x}t, \quad \varphi_5 = y - \dot{y}t, \quad \varphi_6 = z - \dot{z}t - gt^2/2.$$

Определение шести независимых интегралов дает полную информацию о движении материальной точки. Если известно меньше шести интегралов, то информация о движении будет неполной, однако и эта информация может быть полезной.

Интегралами уравнений движения материальной точки под действием силы веса очевидно являются функции

$$\varphi_3^2 = \dot{z}^2 + 2\dot{z}gt + (gt)^2, \quad 2g\varphi_6 = 2gz - 2\dot{z}gt - (gt)^2$$

и их сумма

$$\varphi_3^2 + 2g\varphi_6 = \dot{z}^2 + 2gz.$$

Следовательно, $\dot{z}^2 + 2gz = C$, где $C$ — произвольная постоянная. Положив $C = 2gh$, где $h$ — новая произвольная постоянная, получим следующую зависимость $\dot{z}$ от $z$

$$\dot{z}^2 = 2g(h - z). \tag{5.4}$$

Эту зависимость удобно представить графически. На фазовой плоскости с координатными осями $Oz$, $O\dot{z}$ (рис. 5.1) для различных значений постоянной $h$ можно построить параболы (фазовые траектории), заданные уравнением (5.4).

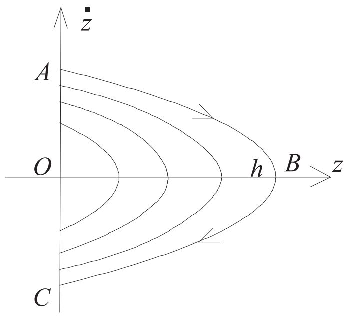


Рис. 5.1. Фазовые траектории.

Реальному движению материальной точки соответствует движение по фазовой траектории изображающей точки с координатами $(z, \dot{z})$. Направление движение изображающей точки по траектории указано на рис. 5.1. стрелками. В верхней полуплоскости $\dot{z} > 0$, поэтому $z$ увеличивается. Ввиду того, что постоянная $h$ зависит от начальных условий, разным траекториям соответствуют движения с разными начальными условиями.

С помощью рис. 5.1 можно предсказать характер движения материальной точки при любых начальных условиях $z_0$, $v_{zo}$. Пусть, например, точка, лежащая на поверхности Земли ($z = 0$), имеет скорость, направленную вверх ($\dot{z} > 0$). Таким начальным условиям соответствует точка $A$ на фазовой плоскости. Движению изображающей точки по фазовой траектории от точки $A$ до точки $B$ соответствует движение материальной точки вверх с постепенно уменьшающейся проекцией скорости на ось $z$. Точке $B$ соответствует подъем материальной точки на максимальную высоту $h$ и обращение в нуль $\dot{z}$. Движение изображающей точки от $B$ до $C$ соответствует падению материальной точки с высоты $h$ на поверхность Земли, причем величина $\dot{z}$ при $z = 0$ равна по модулю $v_{zo}$.

Отметим, что для построения фазовых траекторий нам понадобился всего один интеграл (5.4).

Построив $6N$ независимых интегралов системы уравнений движения (5.2), можно получить полную информацию о движении системы материальных точек. В следующих разделах этой главы будут определены условия существования некоторых интегралов систем (5.1) и (5.2).

### 5.4. Теорема об изменении количества движения

Для материальной точки имеет место второй закон Ньютона:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$. Умножив это равенство на $dt$, получим закон об изменении количества движения в дифференциальной форме:

$$d\mathbf{K} = \mathbf{F}dt,$$

Проинтегрировав полученное равенство по промежутку $[t_0, t_1]$, получим интегральную форму закона об изменении количества движения:

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0 = \mathbf{S},$$

где

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(t_0), \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(t_1),$$

а вектор

$$\mathbf{S} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\, dt$$

называется *импульсом силы*. В случае $\mathbf{F} = 0$ количество движения сохраняется: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$, где $\mathbf{K}_0$ — постоянный вектор, и система уравнений движения имеет три независимых интеграла:

$$mv_x = C_1, \quad mv_y = C_2, \quad mv_z = C_3,$$

Если только одна из проекций силы равна нулю, например $F_x = 0$, то система имеет один интеграл такого вида, а именно $mv_x = C_1$.

Для системы из $N$ материальных точек количество движения $\mathbf{K}$ определяется как сумма количеств движений всех материальных точек:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k$$

Для каждой из материальных точек выполняется второй закон Ньютона

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, 2 \ldots N.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — главный вектор всех сил, действующих на систему материальных точек.

Главный вектор сил, действующих на $k$-ю материальную точку, можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)},$$

где $\mathbf{F}_k^{(e)}$ — равнодействующая внешних сил, $\mathbf{F}_k^{(i)}$ — сумма внутренних сил, т. е. сил взаимодействия между $k$-й материальной точкой и остальными материальными точками системы.

Аналогичным образом, главный вектор системы сил, действующих на систему материальных точек, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^{(e)}, \quad \mathbf{F}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^{(i)}.$$

Рассмотрим систему, состоящую из трех материальных точек (рис. 5.2). Для такой системы

$$\mathbf{F}_1^{(i)} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \quad \mathbf{F}_2^{(i)} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}, \quad \mathbf{F}_3^{(i)} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}.$$

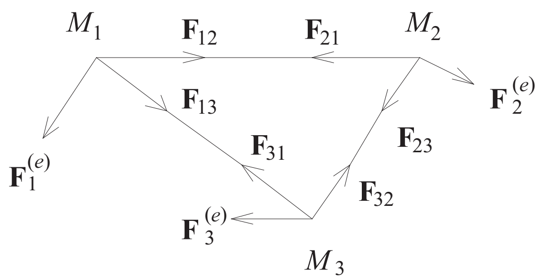


Рис. 5.2. Внутренние силы.

В соответствии с третьим законом Ньютона

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}, \quad \mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23},$$

поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(i)} + \mathbf{F}_3^{(i)} = 0.$$

Очевидно, что и в общем случае сумма всех внутренних сил $\mathbf{F}^{(i)}$ обращается в нуль, так как в силу третьего закона Ньютона все слагаемые этой суммы взаимно уничтожаются. Следовательно, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)}$, и закон изменения количества движения системы материальных точек принимает вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)},$$

где $\mathbf{F}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, действующих на систему материальных точек.

При отсутствии внешних сил количество движения системы материальных точек сохраняется. Закон сохранения количества движения дает три интеграла системы уравнений движения.

**Теорема о движении центра масс.** Положение центра тяжести системы материальных точек относительно начала координат определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k, \quad m = \sum_{k=1}^{N} m_k.$$

Скорость центра тяжести

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{K}}{m}.$$

Следовательно, $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Последнее равенство, переписанное в виде

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = \mathbf{F}^{(e)},$$

называется теоремой о движении центра масс.

Таким образом, при движении системы материальных точек ее центр масс движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, причем приложенная к ней сила равна главному вектору всех внешних сил. Если $\mathbf{F}^{(e)} = 0$, то $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_0$, и точка $C$ движется прямолинейно и равномерно. В том случае когда $\mathbf{F}^{(e)} = 0$ и, кроме того, в начальный момент времени $\mathbf{v}_c = 0$, положение центра масс не изменяется.

При поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс $C$, поэтому определение с помощью теоремы о движении центра масс закона движения точки $C$ дает закон движения твердого тела. Следовательно, поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку $C$, масса которой равна массе тела.

### 5.5. Элементарная теория удара

Наблюдая за процессом соударения твердых тел можно установить некоторые особенности их движения. Рассмотрим падение шарика массой $m$ с высоты $h$ на гладкий горизонтальный пол под действием силы веса $P = mg$ (рис. 5.3). Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ скорость шарика равна нулю. Изменение его количества движения за время падения $t_1$ равно импульсу $\mathbf{S}$ силы $\mathbf{P}$:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{S}, \quad mv = Pt_1.$$

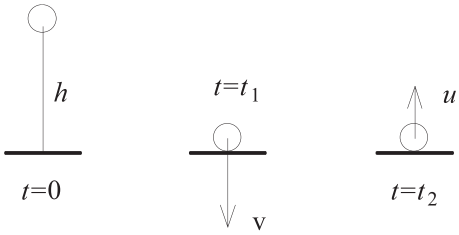


Рис. 5.3. Падение шарика на пол.

Следовательно, величина скорости падения шарика на пол $v = gt_1$, а высота $h = gt_1^2/2 = vt_1/2$.

Пусть время удара $\tau = t_2 - t_1$. В момент времени $t_2$ шарик приобретает скорость $\mathbf{u}$ и отрывается от пола. Изменение величины количества движения за время удара

$$m(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{S}_\tau + \mathbf{S}_u, \quad m(v + u) = -P\tau + \int_{t_1}^{t_2} F_u \, dt,$$

где $\mathbf{S}_P$ и $\mathbf{S}_u$— импульсы силы веса и ударной силы за время $\tau$, $F_u$ величина ударной силы, действующей на тело со стороны пола. Последнее равенство можно записать в виде

$$m(v + u) = (-P + F_u^*)\tau,$$

где $F_u^*$ — среднее значение величины ударной силы.

Предположим, что высота $h$ достаточно велика. Тогда время удара $\tau$ оказывается гораздо меньше, чем время падения $t_1$. Так, например, при падении стального шарика радиуса 1 см с высоты 5 см на стальную плиту $t_1 = \sqrt{2h/g} = 0.1$ с, а $\tau = 0.8 \cdot 10^{-4}$ с. В случае $\tau/t_1 \ll 1$ получаем, что

$$\frac{F_u^*}{P} = \frac{m(v + u)}{\tau P} + 1 = \frac{Pt_1 + mu}{\tau P} + 1 > \frac{t_1}{\tau} \gg 1.$$

Следовательно, $S_\tau \ll S_u$ и имеет место приближенное равенство

$$m(v + u) \simeq F_u^* \tau = S_u,$$

которое означает, что при вычислении изменения величины количества движения шарика за время удара можно принимать во внимание только ударную силу.

Во время первого этапа удара длительностью $\tau_1$ шарик движется вниз, а его скорость уменьшается от значения $v$ до нуля. Путь, пройденный шариком за это время $s = v_u\tau_1$, где $v_u$ — среднее значение скорости на интервале $[t_1, t_1 + \tau_1]$, причем $v_u < v$. На втором этапе удара шарик движется вверх, проходя за время $\tau_2 = \tau - \tau_1$ тот же самый путь $s$, причем скорость шарика увеличивается до величины $u$. Отношение $s/h$ является малой величиной, так как

$$\frac{s}{h} = \frac{2v_u\tau_1}{vt_1} < \frac{2\tau_1}{t_1} \ll 1.$$

Следовательно, перемещением шарика за время удара можно пренебречь.

В элементарной теории удара предполагается, что время удара $\tau = 0$. В результате удара положения соударяющихся тел не меняются, а их скорости изменяются на конечную величину. Разность между количествами движений тела после удара и до удара принимается равной импульсу ударной силы.

**Удар материальной точки о неподвижную преграду.** Рассмотрим удар материальной точки массой $m$ об абсолютно гладкую неподвижную плоскость. Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорости точки до и после удара. Тогда

$$m(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{S}, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{S}$ — импульс ударной силы. Вектор $\mathbf{S}$ ортогонален плоскости. Предположим, что удар является прямым, т. е. $\mathbf{v} \parallel \mathbf{S}$. Выберем систему координат так, чтобы направление оси $Ox$ совпадало с вектором $\mathbf{S}$. Спроектировав (5.5) на ось $Ox$, получим равенство

$$m(u_x - v_x) = S_x,$$

которое можно переписать в виде

$$m(u + v) = S.$$

Таким образом, для определения двух неизвестных $u$ и $S$ имеется лишь одно уравнение. В элементарной теории удара используется дополнительное уравнение

$$k = u/v = -u_x/v_x,$$

позволяющее найти $u = kv$ и $S = (1 + k)mv$. Число $k \in [0, 1]$ называется *коэффициентом восстановления* и определяется экспериментально. Коэффициент восстановления $k$ зависит от материала соударяющихся тел, их формы, скорости $v$ и качества обработки соударяющихся поверхностей. Если шар движется со скоростью 3 м/с, то для дерева $k = 1/2$, для стали $k = 5/9$, для слоновой кости $k = 8/9$, для стекла $k = 15/16$. Если $k = 1$, то удар называется абсолютно упругим, если $k = 0$ — абсолютно неупругим.

Для определения $k$ можно использовать довольно простой эксперимент. Пусть тело падает на горизонтальную плоскость с высоты $h_1$ без начальной скорости. Измерим высоту $h_2$, на которую шарик поднимется после удара о неподвижную плоскость. Принимая во внимание, что

$$v = \sqrt{2gh_1}, \quad u = \sqrt{2gh_2},$$

получаем, что

$$k = u/v = \sqrt{h_2/h_1}.$$

Рассмотрим теперь косой удар, когда вектор $\mathbf{v}$ составляет угол $\alpha$ с нормалью к плоскости. Выбрав ось $Ox$ так же как в предыдущем случае, направим ось $Oy$ так, чтобы вектор $\mathbf{v}$ лежал в плоскости $Oxy$ (рис. 5.4).

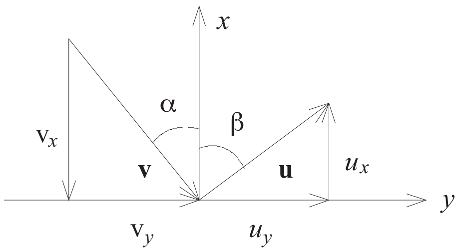


Рис. 5.4. Косой удар.

Проекция (5.5) на ось $Oy$ имеет вид

$$m(u_y - v_y) = 0.$$

Следовательно, $u_y = v_y$. Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{u_y}{u_x},$$

где $\beta$ — угол между вектором $\mathbf{u}$ и нормалью к плоскости. Для коэффициента восстановления справедлива формула

$$k = -\frac{u_x}{v_x} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Если $k = 1$, то $\alpha = \beta$, т. е. при абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения.

### 5.6. Соударение двух шаров

Рассмотрим соударение двух однородных шаров с массами $m_1$ и $m_2$, которые до удара движутся поступательно со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленными по прямой $l$, соединяющей их центры (рис. 5.5).

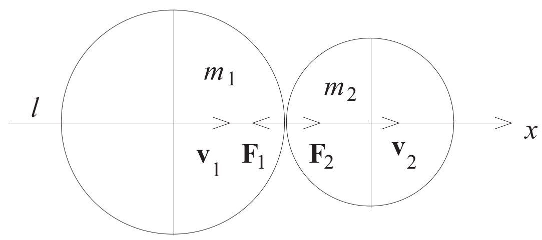


Рис. 5.5. Соударение шаров.

Направим ось $Ox$ по прямой $l$. Предположим, что $v_{2x} < v_{1x}$. В момент удара в точке соприкосновения шаров возникают ударные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, причем по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. Следовательно, ударные импульсы удовлетворяют равенству $\mathbf{S}_1 = -\mathbf{S}_2$. Обозначим скорости шаров после удара $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

По теореме об изменении количества движения

$$m_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{S}_1, \quad m_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{S}_2.$$

Спроектировав сумму этих равенств на ось $x$, получим

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) + m_2(u_{2x} - v_{2x}) = 0.$$

При соударении двух тел коэффициент восстановления равен отношению относительной скорости тел после удара к их относительной скорости до удара:

$$k = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}.$$

Таким образом, для определения неизвестных скоростей $u_{1x}$ и $u_{2x}$ имеем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, \\
-u_{1x} + u_{2x} = k(v_{1x} - v_{2x}),
\end{gathered}
$$

решение которой можно записать в следующем виде

$$
\begin{gathered}
(m_1 + m_2) u_{1x} = (m_1 - m_2 k) v_{1x} + m_2 (1 + k) v_{2x}, \\
(m_1 + m_2) u_{2x} = m_1 (1 + k) v_{1x} + (m_2 - m_1 k) v_{2x}.
\end{gathered}
$$

Разделив два последних равенства на $m_2$, получим

$$
\begin{gathered}
(\eta + 1) u_{1x} = (\eta - k) v_{1x} + (1 + k) v_{2x}, \\
(\eta + 1) u_{2x} = \eta (1 + k) v_{1x} + (1 - k\eta) v_{2x},
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

где $\eta = m_1/m_2$.

Если $m_2 \to \infty$, то $\eta \to 0$. Случай $\eta = 0$, $v_{2x} = 0$ соответствует удару первого шара о неподвижную преграду. Решение системы (5.6) для этого случая $u_{1x} = -k v_{1x}$, $u_{2x} = 0$ совпадает с полученным ранее решением задачи об ударе материальной точки о неподвижную преграду.

Пусть теперь оба шара имеют одинаковую массу, т. е. $\eta = 1$. При $k = 1$ (абсолютно упругий удар) решение системы (5.6) имеет вид

$$
u_{1x} = v_{2x} \quad u_{2x} = v_{1x}.
$$

Следовательно, при абсолютно упругом ударе шары обмениваются скоростями, При $k = 0$ (абсолютно неупругий удар) решение системы (5.6)

$$
u_{1x} = u_{2x} = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{2}
$$

показывает, что скорости шаров после удара одинаковы и равны среднему арифметическому их начальных скоростей.

### 5.7. Уравнение Мещерского

В большинстве задач механики масса материальной точки считается постоянной величиной, однако имеется ряд задач, при решении которых необходимо учитывать зависимость массы от времени. К числу таких задач относятся, прежде всего, задачи о движении ракеты или реактивного самолета. При работе реактивного двигателя масса ракеты уменьшается за счет отделения от ракеты частиц сгоревшего топлива.

Рассмотрим поступательное движение тела переменной массы $m = m(t)$. Пусть в момент времени $t$ скорость тела равна $\mathbf{v}(t)$. В момент времени $t + \Delta t$ масса тела

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta m,$$

где $\Delta m$ — масса отделившейся части тела, а скорость тела

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v}.$$

Предположим, что отделившаяся часть тела движется поступательно со скоростью $\mathbf{u}$ (рис. 5.6).

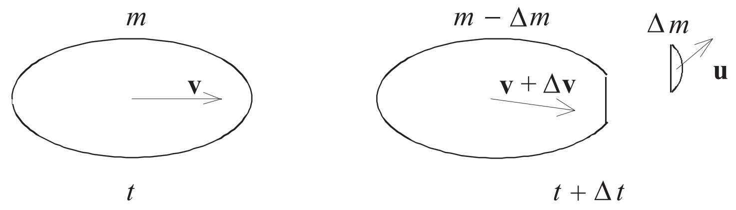


Рис. 5.6. Движение тела переменной массы.

По теореме об изменении количества движения

$$(m - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m \mathbf{u} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}_*^{(e)} \Delta t,$$

где $\mathbf{F}_*^{(e)}$ среднее значение равнодействующей внешних сил. Разделим полученное равенство на $\Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{\Phi}, \tag{5.7}$$

где
$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{c}\frac{dm}{dt}$$
— *реактивная сила*, $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ — относительная скорость отделившейся части тела. Уравнение (5.7) называется уравнением Мещерского.

Уравнение (5.7) выведено для случая $dm/dt < 0$. В качестве упражнения показать, что оно справедливо и в случае $dm/dt > 0$.

**Пример.** Рассмотрим вертикальный взлет ракеты с поверхности Земли. Направим ось $Oz$ вертикально вверх перпендикулярно поверхности Земли. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ скорость ракеты $v = 0$, а ее масса меняется по закону

$$m = m_0 - \alpha t,$$

где $m_0$ — стартовая масса, $\alpha > 0$. Будем считать, что на ракету действует только сила веса. Силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Предположим, что относительная скорость $\mathbf{c}$ отделяющихся частиц сгоревшего топлива направлена в сторону, противоположную оси $Oz$. Тогда $c_z = -c$, $c > 0$.

Проектирование уравнение Мещерского (5.7) на ось $Oz$ дает в рассматриваемом случае следующее скалярное уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + c_z\frac{dm}{dt}.$$

Разделив это уравнение на $m$ и подставив в него зависимость $m$ от времени, получим
$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\alpha c}{m_0 - \alpha t}.$$
Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $v(0) = 0$, имеет вид

$$v = -gt + c\ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}.$$

Пусть $t_k$ — момент времени, соответствующий выгоранию всего топлива. Тогда $t_k = (m_0 - m_k)/\alpha$, где $m_k$ — масса ракеты без топлива. Скорость ракеты $v_k$ в момент времени $t = t_k$ определяется по формуле
$$v_k = -g\frac{m_0 - m_k}{\alpha} + c\ln\frac{m_0}{m_k}.$$

Для вывода ракеты на околоземную орбиту необходимо, чтобы $v_k$=7.9 км/с, т. е. после выгорания топлива ракета должна приобрести первую космическую скорость. В этом случае скорость $c$ должна быть достаточно велика, поэтому можно пренебречь первым слагаемым в формуле для $v_k$ и воспользоваться приближенной формулой

$$v_k \simeq c \ln \frac{m_0}{m_k},$$

из которой следует, что

$$m_k \simeq m_0 e^{-v_k/c}.$$

Масса $m_k = m_e + m_u$, где $m_e$ — масса баков и двигателей, $m_u$ — полезная масса. Увеличить массу $m_k$ при заданной стартовой массе $m_0$ можно за счет увеличения скорости $c$. Однако при этом трудно добиться увеличения полезной массы $m_u$, т.к. для увеличения $c$ приходится увеличивать массу двигателей, т. е. увеличивать $m_e$. Кроме того, возрастание $c$ приводит к возрастанию ускорения ракеты, что особенно нежелательно в том случае, когда в ракете находятся люди. В связи с этим для увеличения отношения полезной массы $m_u$ к стартовой массе $m_0$ используются многоступенчатые ракеты.

## 5.8. Теорема об изменении момента количества движения

**Материальная точка.** Пусть положение материальной точки относительно начала координат $O$ задано вектором $\mathbf{r}$. *Моментом количества движения* материальной точки относительно начала координат называется вектор

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Найдем производную $d\mathbf{l}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{L},$$

где $\mathbf{L}$ — момент силы относительно точки $O$. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}. \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) представляет собой запись теоремы об изменении момента количества движения для материальной точки.

Момент силы $\mathbf{L} = 0$, если $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{r}$. В этом случае сила $\mathbf{F}$ называется *центральной*. Если $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{r}$, то момент количества движения сохраняется, т. е. $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, где $\mathbf{l}_0$ — постоянный вектор.

Вектор $\mathbf{r}$ ортогонален вектору $\mathbf{l}$, так как $\mathbf{l}\cdot\mathbf{r} = (\mathbf{r}\times m\mathbf{v})\cdot\mathbf{r} = 0$. Для центральной силы $\mathbf{l}_0\cdot\mathbf{r} = 0$, поэтому движение материальной точки происходит в плоскости перпендикулярной постоянному вектору $\mathbf{l}_0$.

Равенство $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0 = \mathbf{i}C_1 + \mathbf{j}C_2 + \mathbf{k}C_3$ дает 3 интеграла системы уравнений движения:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1, \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2, \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3.$$

**Система материальных точек.** Момент количества движения системы из $N$ материальных точек определяется как сумма моментов количества движения всех материальных точек системы:

$$\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{l}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times m_k\mathbf{v}_k,$$

где вектор $\mathbf{r}_k$ определяет положение $k$-й материальной точки относительно начала координат $O$. Пусть

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$$

— главный момент системы сил, действующей на систему материальных точек, относительно точки $O$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}.$$

Вектор $\mathbf{L}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(e)} + \mathbf{L}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{L}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}, \quad \mathbf{L}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(i)},$$

$\mathbf{F}_k^{(e)}$ — внешние силы, $\mathbf{F}_k^{(i)}$ — внутренние силы.

Покажем, что $\mathbf{L}^{(i)} = 0$. В соответствии с третьим законом Ньютона, все внутренние силы можно разбить на пары $(\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{F}_{kj})$, $j \neq k$ так, что $\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk}$. Каждой такой паре соответствуют два слагаемых $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk}$ и $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}$ в выражении для $\mathbf{L}^{(i)}$. Их сумма

$$\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = 0,$$

так как вектора $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ и $\mathbf{F}_{jk}$ параллельны. Следовательно, $\mathbf{L}^{(i)} = 0$, и теорема об изменении момента количества движения системы материальных точек может быть записана в виде равенства

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}^{(e)},$$

где $\mathbf{L}^{(e)}$ — главный момент системы внешних сил.

**Пример.** Рассмотрим невесомый стержень, вращающийся вокруг неподвижной вертикальной оси с угловой скоростью $\omega$. На концах стержня на одинаковом расстоянии $a$ от оси вращения находятся две материальные точки, каждая из которых имеет массу $m$ (рис. 5.7).

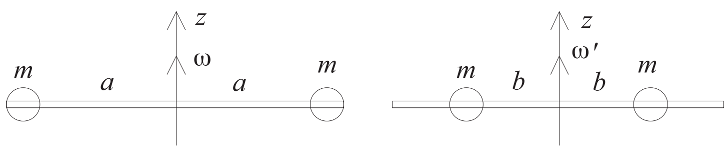


Рис. 5.7. Вращающийся стержень.

Проекция момента количества движения системы из двух материальных точек на ось $Oz$, совпадающую с осью вращения, определяется по формуле

$$l_z = 2amv = 2m\omega a^2.$$

Предположим, что расстояния материальных точек до оси вращения уменьшились до величины $b$. Силы, за счет которых материальные точки сдвигаются к оси вращения, пересекают ось $Oz$, поэтому проекции их моментов на эту ось равны нулю. Следовательно, проекция момента количества движения на ось $Oz$ сохранится. В новом положении проекция момента количества движения

$$l'_z = 2bmv' = 2m\omega' b^2 = l_z = 2m\omega a^2.$$

Из последнего равенства получаем, что

$$\omega' = \omega\frac{a^2}{b^2} > \omega.$$

Этот способ увеличения угловой скорости используют фигуристы, прижимая к себе руки при вращении.

### 5.9. Момент количества движения твердого тела

Ограничимся определением проекции момента количества движения однородного твердого тела на неподвижную ось вращения.

Выберем систему координат так, чтобы ось $Oz$ совпадала с осью вращения. Разделим твердое тело на $N$ частей с массами $\Delta m_i$. Предполагая, что эти части достаточно малы, будем рассматривать их как материальные точки. Момент количества движения $i$-й части тела

$$\Delta\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i,$$

где $\Delta m_i = \rho\Delta V_i$, $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, $\rho$ — плотность тела, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$ — его угловая скорость, $\varphi$ — угол поворота, $\Delta V_i$ — объем $i$-й части тела. Приближенное выражение для момента количества движения твердого тела имеет вид

$$\mathbf{l}^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\rho\Delta V_i.$$

Момент количества движения твердого тела по определению является пределом, к которому стремится вектор $\mathbf{l}^{(N)}$ при

$$N \to \infty, \quad \max_i \Delta V_i \to 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{l} = \int\limits_G \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, \rho\, dV,$$

где $G$ — область пространства, занятая твердым телом.

Ввиду того, что

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)\boldsymbol{\omega} - \dot{\varphi} z \mathbf{r},$$

выражение для $\mathbf{l}$ можно записать в виде

$$\mathbf{l} = \int\limits_G [(x^2 + y^2 + z^2)\boldsymbol{\omega} - \dot{\varphi} z \mathbf{r}]\rho\, dV.$$

Проектируя на ось $Oz$, получаем

$$l_z = \dot{\varphi} \int\limits_G (x^2 + y^2)\, \rho\, dV.$$

Величина

$$J_z = \int\limits_G (x^2 + y^2)\, \rho\, dV = \rho \int\limits_G p^2\, dV,$$

где $p$ — расстояние от точки твердого тела до оси вращения, называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси $Oz$.

Таким образом,

$$l_z = J_z \dot{\varphi},$$

и из теоремы об изменении момента количества движения следует, что

$$\frac{dl_z}{dt} = J_z \ddot{\varphi} = L_z,$$

где $L_z$ сумма моментов действующих на тело сил, относительно оси $Oz$. Последнее равенство позволяет найти закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, если заданы начальные значения угла $\varphi$ и угловой скорости $\dot{\varphi}$.

**Пример вычисления момента инерции.** Найдем момент инерции однородного круглого диска, имеющего толщину $h$, радиус

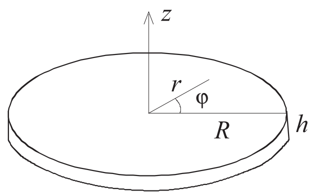


Рис. 8. Круглый диск.

$R$ и плотность $\rho$, относительно оси $Oz$, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. Введем цилиндрическую систему координат $r$, $\varphi$, $z$ (рис. 8.), для которой $p = r$, $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$.

Тогда

$$J_z = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^3\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\, dr = \frac{\rho\pi h R^4}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

где $m = \rho\pi h R^2$ — масса диска. Момент инерции круглого диска в два раз меньше момента инерции $J = mR^2$ тонкого кольца, имеющего такой же радиус и массу.

## 5.10. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Умножив уравнение второго закона Ньютона

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

скалярно на вектор $d\mathbf{r}$, получим

$$md\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Следовательно,

$$m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{5.9}$$

где скалярная величина

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z})dt$$

называется *элементарной работой*. Ввиду того, что

$$dv^2 = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v},$$

равенство (5.9) можно записать в виде

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{5.10}$$

где

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

— *кинетическая энергия* материальной точки. Соотношение (5.10) называется теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. Проинтегрировав (5.10) по переменной $t$ на интервале $[t_0, t_1]$, получим

$$T(t_1) - T(t_0) = A, \tag{5.11}$$

где величина

$$A = \int\limits_{t_0}^{t_1} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt$$

называется *работой* силы **F**. Соотношение (5.11) означает, что изменение кинетической энергии материальной точки равно работе приложенной к ней силы, и называется теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Рассмотрим вычисление работы $A$ для двух частных случаев.

**Пример 1.** При прямолинейном движении точки по оси $Ox$ под действием постоянной силы **F**, направленной под углом $\alpha$ к направлению движения, справедливы равенства

$$\dot{y} = \dot{z} = 0, \quad F_x = F\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$A = F_x \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}\,dt$$

После замены переменной интегрирования $z = x(t)$ учитывая, что $dz = \dot{x}dt$, получаем

$$A == F_x \int\limits_{x_0}^{x_1} dz = F_x(x_1 - x_0) = Fs\cos\alpha,$$

где $x_0 = x(t_0)$ и $x_1 = x(t_1)$ — начальное и конечное положения точки, $s$ — пройденный ею путь.

**Пример 2.** Пусть при движении точки по оси $Ox$ на нее действует сила **F** такая, что $F_x = -cx$. Этому случаю соответствует, в частности, движение точки, прикрепленной к пружине жесткости $c$, расположенной вдоль оси $Ox$, причем при $x = 0$ пружина недеформирована. Если $x(t_0) = 0$, $x(t_1) = x$, то

$$A = -\int\limits_{t_0}^{t_1} cx\dot{x}\,dt = -c\int\limits_{0}^{x} x\,dx = -\frac{1}{2}cx^2.$$

На материальную точку, находящуюся вблизи поверхности Земли, действует сила веса **P**. В этом случае говорят, что материальная точка находится в поле силы тяжести. В общем случае *силовым* *полем* называют область $D$ трехмерного пространства, которая обладает тем свойством, что на материальную точку с координатами $x$, $y$, $z$, находящуюся в $D$, действует сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$.

*Потенциальным силовым полем* называется такое силовое поле, для которого существует функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$\mathbf{F} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

В этом случае функция $u$ называется *потенциалом* силы $\mathbf{F}$, а сила $\mathbf{F}$ — *потенциальной силой.* Если функция $u$ является потенциалом силы $\mathbf{F}$, то и функция $u + C$, где $C$ — произвольная постоянная, тоже будет потенциалом этой силы.

Из единственности разложения вектора $\mathbf{F}$ по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вытекает, что

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно, элементарная работа потенциальной силы

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = du.$$

Пусть сила $\mathbf{F}$, действующая на материальную точку, является потенциальной. В этом случае равенство (5.10) принимает вид

$$dT = du.$$

Функция $\Pi = -u$ называется *потенциальной энергией.* Используя это определение, равенство $dT = du$ запишем в виде

$$d(T + \Pi) = 0.$$

Функция $E = T + \Pi$ является интегралом системы уравнений движения материальной точки, так как $E =$const, и называется *полной механической энергией.* Равенство

$$E = T + \Pi = \mathrm{const}$$

представляет собой закон сохранения полной механической энергии.

Для того, чтобы определить, имеют ли уравнения движения материальной точки интеграл энергии $E$, необходимо выяснить, является ли сила $\mathbf{F}$ потенциальной. Докажем два утверждения, характеризующие свойства потенциальных сил.

1) Для потенциальной силы имеют место равенства

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Действительно,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Аналогичным образом доказываются два других равенства.

2) Работа потенциальной силы при перемещении материальной точки по замкнутой траектории равна нулю. Для доказательства этого утверждения проинтегрируем по времени равенство $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = du$ на промежутке $[t_1, t_2]$. Получим

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} du = u(t_2) - u(t_1).$$

Пусть материальная точка движется по замкнутой траектории, причем в моменты времени $t_1$ и $t_2$ ее координаты совпадают. Тогда

$$A = u(t_2) - u(t_1) = u(x(t_2), y(t_2), z(t_2)) - u(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) = 0.$$

Из доказанного утверждения вытекает, что сила трения не является потенциальной, так как работа силы трения при перемещении материальной точки по замкнутой траектории не равна нулю.

Приведем три примера потенциальных сил.

**1. Сила тяжести.** Вблизи поверхности Земли на материальную точку действует сила веса $\mathbf{P}$. Направим ось $Oz$ в сторону, противоположную направлению вектора $\mathbf{P}$. Тогда $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mgdz = d(-mgz), \quad u = -mgz, \quad \Pi = mgz.$$

**2. Сила упругости.** Пусть левый конец пружины жесткости $c$ прикреплен к неподвижной опоре, а на правом ее конце имеется материальная точка. Направим ось $Ox$ вдоль пружины, а начало координат выберем в точке, совпадающей с правым концом недеформированной пружины. При движении точки по оси $Ox$ на нее действует сила $\mathbf{F}$, имеющая проекции $F_x = -cx$, $F_y = F_z = 0$. Элементарная работа этой силы

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx = -cxdx = -d\Pi.$$

Следовательно, потенциальная энергия пружины

$$\Pi = \int cx\,dx = \frac{cx^2}{2}.$$

**3. Сила всемирного тяготения.** Предположим, что на материальную точку с массой $m$ действует сила

$$\mathbf{F} = -km\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Элементарная работа этой силы

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -km\frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2}dr^2 = rdr,$$

получаем

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{kmdr}{r^2} = d\left(\frac{km}{r}\right) = -d\Pi, \quad \Pi = -\frac{km}{r}.$$

### 5.11. Теорема об изменении кинетической энергии для системы материальных точек

Рассмотрим систему из $N$ материальных точек. Для каждой точки справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$dT_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Просуммировав эти равенства, получим закон изменения кинетической энергии системы материальных точек в дифференциальной форме

$$dT = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i, \tag{5.12}$$

где

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

— кинетическая энергия системы материальных точек. Сумма в правой части формулы (5.12) называется элементарной работой.

Проинтегрировав (5.12) по переменной $t$ на интервале $[t_0, t_1]$, получим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T(t_1) - T(t_0) = A, \quad A = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \right) dt,$$

где $A$ — работа сил $\mathbf{F}_i$.

Представив силы $\mathbf{F}_k$, действующих на систему материальных точек в виде суммы внутренних и внешних сил

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)},$$

получим

$$A = A^{(i)} + A^{(e)},$$

где $A^{(i)}$ — работа внутренних сил, а $A^{(e)}$ — работа внешних сил.

В общем случае $A^{(i)} \neq 0$, но если расстояние между материальными точками не меняется, то $A^{(i)} = 0$. Докажем это утверждение. Элементарную работу внутренних сил можно представить в виде

$$\sum_{j<k} (\mathbf{F}_{jk} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{kj} \cdot d\mathbf{r}_k), \tag{5.13}$$

где $\mathbf{F}_{jk} = f_{jk}\mathbf{r}_{jk}$ и $\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk}$ — силы взаимодействия $j$-й и $k$-й точек, $\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$, причем расстояние $r_{jk}$ между $j$-й и $k$-й точками является постоянной величиной.

Все слагаемые в сумме (5.13) равны нулю, так как

$$\mathbf{F}_{jk} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{kj} \cdot d\mathbf{r}_k = \mathbf{F}_{jk} \cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = -f_{jk}\mathbf{r}_{jk} \cdot d\mathbf{r}_{jk} = -f_{jk} r_{jk} dr_{jk} = 0,$$

так как $dr_{jk} = 0$. Следовательно, работа внутренних сил равна нулю.

Система, состоящая из материальных точек, расстояния между которыми сохраняются, может рассматриваться как модель абсолютно твердого тела.

Предположим, что существует функция $u(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_N)$ такая, что

$$du = \delta A = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i).$$

В этом случае справедливы равенства

$$F_{ix} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial u}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial u}{\partial z_i},$$

функция $u$ называется потенциалом, функция $\Pi = -u$ — потенциальной энергией, а силы $\mathbf{F}_i$ — потенциальными силами. Из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что

$$dT = du = -d\Pi, \quad dE = d(T + \Pi) = 0,$$

где $E$ — полная механическая энергия системы материальных точек. Следовательно, в случае действия на систему материальных точек потенциальных сил имеет место закон сохранения полной механической энергии и $E = E_0$.

**Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.** Рассмотрим однородное твердое тело, вращающееся с угловой скоростью $\omega$ вокруг неподвижной оси $Oz$ (рис. 5.9).

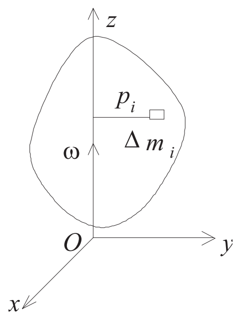


Рис. 5.9. Вращающееся твердое тело.

Разделим твердое тело на $N$ частей с массами $\Delta m_i$. Кинетическая энергия $i$-й части тела

$$\Delta T_i = \frac{1}{2}\Delta m v_i^2,$$

где $v_i = \omega p_i$, $p_i$ — расстояние от оси вращения до некоторой точки $i$-й части тела.

Приближенное значение кинетической энергии всего тела

$$T^{(N)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m v_i^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2\sum_{i=1}^{N} p_i^2 \Delta V_i,$$

где $\rho$ — плотность тела, $\Delta V_i$ — объем его $i$-й части. Кинетическая энергия твердого тела $T$ по определению является пределом, к которому стремится величина $T^{(N)}$ при

$$N \to \infty, \quad \max_i \Delta V_i \to 0.$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \int\limits_G p^2\, dV = \frac{1}{2}J_z\omega^2,$$

где

$$J_z = \rho \int\limits_G p^2\, dV = \rho \int\limits_G (x^2 + y^2)\, dV$$

— момент инерции твердого тела относительно оси $Oz$, $G$ — область пространства, занятая твердым телом.

### 5.12. Общие теоремы динамики в подвижной системе отсчета

Рассмотрим движение системы из $N$ материальных точек относительно подвижной системы отсчета с началом в точке $O'$, движущейся поступательно относительно неподвижной системы отсчета с началом в точке $O$. В этом случае

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где вектора $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{r}'_k$ задают движение $k$-й точки относительно неподвижной и подвижной систем координат, $\mathbf{r}_0$ — вектор из точки $O$ в точку $O'$. По теореме о сложении скоростей

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\mathbf{v}_k$ — абсолютная скорость $k$-й точки, $\mathbf{v}'_k$ — ее относительная скорость, $\mathbf{v}_0$ — переносная скорость, которая в рассматриваемом случае поступательного движения подвижной системы отсчета равна абсолютной скорости точки $O'$.

**1. Теорема об изменении количества движения.** Из теоремы о сложении скоростей следует, что

$$m_k\mathbf{v}_k = m_k\mathbf{v}_0 + m_k\mathbf{v}'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Суммирование всех этих равенств дает формулу

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}', \tag{5.14}$$

где

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{N} m_j\mathbf{v}_j, \quad \mathbf{K}' = \sum_{k=1}^{N} m_k\mathbf{v}'_k, \quad m = \sum_{k=1}^{N} m_k.$$

Вектора $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ являются количествами движения системы материальных точек относительно неподвижной и подвижной систем отсчета.

Продифференцировав равенство (5.14) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{K}'}{dt}.$$

По теореме об изменении количества движения

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Из двух последних равенств получаем теорему об изменении количества движения в подвижной системе отсчета:

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} - m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

Если подвижная система отсчета движется относительно неподвижной с постоянной скоростью, т. е. является инерциальной, то

$d\mathbf{v}_0/dt = 0$, и закон изменения количества движения будет таким же, как в неподвижной системе координат. Этот частный результат является следствием общего принципа относительности Галилея, согласно которому законы механики имеют одинаковый вид в любой инерциальной системе отсчета.

Выберем в качестве начала координат $O'$ подвижной системы отсчета центр масс С. Тогда

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c = m^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j,$$

$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c$. Учитывая равенство $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$ (раздел 5.4), по формуле (5.14) получаем, что $\mathbf{K}' = 0$.

**2. Теорема об изменении момента количества движения.** Моментом количества движения системы материальных точек относительно подвижной системы отсчета является вектор

$$\mathbf{l}' = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times m_j \mathbf{v}'_j.$$

Преобразовав производную этого вектора

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{l}'}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times m_j \frac{d\mathbf{v}'_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times m_j \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_0) = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} - \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) \times m_j \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j - m\mathbf{r}_c \times \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + m\mathbf{r}_0 \times \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}\end{aligned}$$

получим закон изменения момента количества движения в подвижной системе отсчета

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{L}' + m(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c) \times \frac{d\mathbf{v}_0}{dt},$$

где

$$\mathbf{L}' = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j^{(e)},$$

— главный момент внешних сил относительно точки $O'$.

В случаях $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$ и $d\mathbf{v}_0/dt = 0$ закон изменения момента количества движения упрощается и принимает вид

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{L}'.$$

**3. Теорема Кенига.** В некоторых случаях для вычисления кинетической энергии $T$ удобно ввести подвижную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно неподвижной системы отсчета. Обозначим $T'$ кинетическую энергию системы материальных точек относительно подвижной системы отсчета и найдем связь между $T$ и $T'$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\mathbf{v}_k' + \mathbf{v}_0)\cdot(\mathbf{v}_k' + \mathbf{v}_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k (v_k')^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k' + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + T' + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{K}',$$

где

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k (v_k')^2.$$

Если $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$, то $\mathbf{K}' = 0$ и мы получаем равенство

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T',$$

которое называют теоремой Кенига.

**Пример использования теоремы Кенига.** Пусть однородное колесо с радиусом $R$ и массой $m$ катится по рельсу без проскальзывания, причем центр колеса $C$ движется со скоростью $v_c$. Найдем кинетическую энергию колеса.

Введем подвижную систему отсчета с началом в точке $C$, движущуюся поступательно относительно неподвижного рельса. Тогда относительное движение будет представлять собой вращение колеса вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega = v_c/R$, поэтому

$$T' = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

где $J = mR^2/2$ — момент инерции колеса. Следовательно,

$$T' = \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{v_c}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_c^2.$$

По теореме Кенига

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + T' = \frac{3}{4}mv_c^2.$$

## Оглавление