

Глава 6

Частные задачи динамики точки

6.1. Простейшие случаи прямолинейного движения точки

Рассмотрим движение материальной точки массой m по прямой. Выберем эту прямую в качестве оси Ox и спроектируем на нее уравнение 2-го закона Ньютона $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$. Получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

которое можно записать в виде

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad f = \frac{F}{m}. \quad (6.1)$$

Предположим, что

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (6.2)$$

В общем случае аналитическое решение задачи Коши для уравнения (6.1) с начальными условиями (6.2) отсутствует, однако в частных случаях решение этой задачи может быть получено в квадратурах. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

1. Функция f зависит только от времени, то есть $f = f(t)$.

В этом случае решение легко найти интегрированием уравнения (6.1) по времени:

$$\dot{x} = \int f(t)dt + C_1, \quad x = \int \left(\int f(t)dt \right) dt + C_1t + C_2.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Пример 1

Пусть $f(t) = \sin t$, $x_0 = v_0 = 0$. Интегрируя по времени уравнение $\ddot{x} = \sin t$, получаем $\dot{x} = -\cos t + C_1$. Подставляя формулу для \dot{x} в начальное условие $\dot{x}(0) = 0$ находим $C_1 = 1$. Интегрирование выражения $\dot{x} = 1 - \cos t$ дает равенство $x = t - \sin t + C_2$. Из начального условия $x(0) = 0$ следует, что $C_2 = 0$. Решение задачи Коши для рассматриваемого примера имеет вид $x = t - \sin t$.

2. Функция f зависит только от скорости, то есть $f = f(\dot{x})$.

Обозначим $v = \dot{x}$ и запишем уравнение (6.1) в виде $dv/dt = f(v)$. Следовательно,

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}.$$

Принимая во внимание, что $dx = vdt = vdv/f(v)$, получаем, что

$$x = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} + x_0.$$

Полученные формулы для $t(v)$ и $x(v)$ дают неявную зависимость x от t .

Пример 2.

Рассмотрим падение точки под действием силы тяжести с учетом силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости. Уравнение (6.1) для этого случая принимает вид

$$\ddot{x} = g - k\dot{x}^2,$$

где k — коэффициент сопротивления. Предположим, что в момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат, а скорость ее равна нулю. Тогда $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Уравнение движения точки

$$kdt = \frac{dv}{v_*^2 - v^2},$$

где $v_*^2 = g/k$, после замены переменной $v = v_*u$ принимает вид

$$\alpha dt = \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du.$$

Здесь $\alpha = v_*k$. Интегрирование этого дифференциального уравнения дает формулу

$$\alpha t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} + C.$$

Из начальных условий вытекает равенство $C = 0$. Следовательно,

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2\alpha t}, \quad u = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}} = \operatorname{th}(\alpha t), \quad v = v_* \operatorname{th}(\alpha t).$$

На рис. 1 изображен график функции $v(t)$. С течением времени t скорость точки сначала растет, а затем постепенно приближается к предельному значению $v_* = \sqrt{g/k}$. Это предельное значение будет

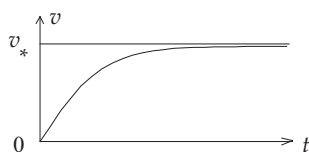


Рис. 1. Зависимость скорости падения точки от времени.

тем меньше, чем больше коэффициент сопротивления k , поэтому при прыжке с парашютом с большой высоты скорость падения на землю будет значительно меньше, чем при прыжке без парашюта.

3. Функция f зависит только от координаты, то есть $f = f(x)$.

Записав уравнение (6.1) в виде $dv/dt = f(x)$, умножим обе его части на dx . Принимая во внимание, что $dx/dt = v$, получаем равенство $v dv = f(x) dx$. Интегрирование этого равенства в пределах от x_0 до x дает формулу

$$v^2 - v_0^2 = g(x), \quad g(x) = 2 \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

из которой следует, что

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g(x) + v_0^2, \quad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + g(x)}}, \quad t = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + g(x)}}.$$

Последняя формула дает связь между координатой x и временем t . Знак перед интегралом в выражении для t совпадает со знаком

функции \dot{x} , поэтому плюс выбирается на тех промежутках изменения времени, где функция $x(t)$ возрастает. Если $x(t)$ убывает, то перед интегралом должен стоять знак минус.

На рис. 2 представлен график функции $x(t)$, имеющей максимум $x = x_*$ во внутренней точке интервала $[0, t_k]$ изменения времени. Для такой функции время движения t_k можно найти по формуле

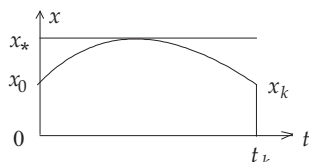


Рис. 2. График функции $x(t)$, имеющей максимум $x = x_*$.

$$t_k = \int_{x_0}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + g(x)}} - \int_{x_*}^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + g(x)}}.$$

Пример 3.

Рассмотрим прямолинейное поступательное движение груза с массой m , прикрепленного к пружине жесткости c (рис. 3). Груз

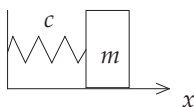


Рис. 3. Простейшая колебательная система.

можно считать материальной точкой. Направим ось x по линии движения груза. За начало координат примем положение равновесия груза. В этом положении пружина не деформирована.

Из второго закона Ньютона следует, что $m\ddot{x} = -cx$ или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = c/m, \quad f(x) = -\omega^2 x.$$

Тогда

$$g(x) = -\omega^2 x^2, \quad v^2 = v_0^2 - \omega^2 x^2.$$

Пусть $x_0 = 0$, $v_0 > 0$. На начальном этапе движения $\dot{x} > 0$, поэтому

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}}.$$

После замены переменной $z = \omega x/v_0$, получаем табличный интеграл:

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin z = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega x}{v_0}.$$

Из последней формулы вытекает равенство

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (6.3)$$

Неравенство $\dot{x} = v_0 \cos \omega t > 0$ справедливо при $0 \leq \omega t < \pi/2$, поэтому решением (6.3) можно пользоваться только при $0 \leq t < \pi/(2\omega)$, однако непосредственная подстановка решения (6.3) в дифференциальное уравнение показывает, что это решение удовлетворяет уравнению при любом t .

6.2. Свободные колебания точки

Рассмотрим свободные вертикальные колебания груза массой m , прикрепленного к пружине жесткости c . На рис. 4 слева изображена нерастянутая пружина. Если к пружине прикреплен груз, то

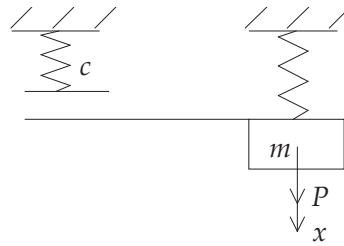


Рис. 4. Статическое удлинение пружины.

на него будут действовать сила веса $P = mg$ и сила $F = c\delta$ упругости пружины, где δ – удлинение пружины. В положении равновесия, изображенном на рис. 4 справа, $P = F$, поэтому пружина будет растянута на величину $\delta = P/c = mg/c$. Эта величина называется *статическим удлинением пружины*.

Выберем за начало координат O положение равновесия груза. Тогда уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} = -c(\delta + x) + mg,$$

так как удлинение пружины при колебаниях складывается из статического удлинения δ и дополнительного удлинения x , возникающего за счет отклонения груза от положения равновесия. Следует отметить, что линейная зависимость силы упругости от координаты x имеет место только при малых отклонениях груза от положения равновесия.

Подставляя в это уравнение выражение для δ и вводя обозначение $\omega^2 = c/m$, получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.4) можно искать в виде $x = e^{\gamma t}$. После подстановки этого решения в уравнение получим квадратное уравнение $\gamma^2 + \omega^2 = 0$ для определения γ . Уравнение имеет два корня $\gamma_{1,2} = \pm i\omega$, соответствующие двум линейно независимым решениям $x_1 = e^{i\omega t}$ и $x_2 = e^{-i\omega t}$.

Составим линейные комбинации решений x_1 и x_2

$$\frac{x_1 - x_2}{2i} = \sin \omega t, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = \cos \omega t,$$

образующие пару вещественных линейно независимых решений. Общее решение уравнения (6.4) является линейной комбинацией этих двух решений:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Используя начальные условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, находим значения произвольных постоянных: $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/\omega$. Таким образом, решение уравнения (6.4) можно представить в виде

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Введение обозначений $x_0 = A \sin \alpha$ и $v_0/\omega = A \cos \alpha$ позволяет записать это решение в форме

$$x = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Величина $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ называется *амплитудой колебаний* и представляет собой величину максимального отклонения

груза от положения равновесия. Угол α , вычисляемый по формуле $\alpha = \arctg(x_0\omega/v_0)$, носит название *начальной фазы*. Параметр $\omega = \sqrt{c/m}$ называется *частотой колебаний*, а величина $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/c}$ — *периодом колебаний*. Отметим, что период колебаний не зависит от амплитуды. На рис. 5 приведен график функции $x(t)$ в случае $A = 2$, $\omega = 1$, $\alpha = -\pi/6$. При частоте $\omega = 1$ период

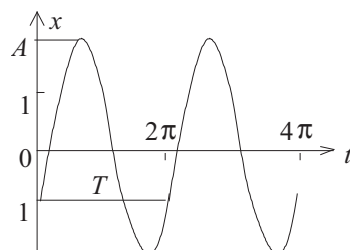


Рис. 5. Свободные колебания при отсутствии сопротивления.

колебаний $T = 2\pi$.

6.3. Затухающие колебания

Свободные колебания реальных механических систем затухают из-за наличия сил сопротивления. Появление сил сопротивления часто связано с сопротивлением воздуха или другой среды, в которой происходят колебания. Другой причиной затухания колебаний является внутреннее трение в материале. Так, например, при колебаниях груза на пружине в вакууме амплитуда колебаний будет уменьшаться из-за рассеяния энергии при деформации пружины.

Уравнение затухающих свободных колебаний прикрепленной к пружине жесткости c материальной точки массой m имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - n\dot{x}$$

В это уравнение входит сила сопротивления $n\dot{x}$, пропорциональная скорости движения точки. Разделив уравнение на m , получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (6.5)$$

где $\omega = c/m$, $2h = n/m$. Будем искать решение уравнения (6.5), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Под-

ставив в (6.5) решение $x = e^{\gamma t}$, получаем квадратное уравнение

$$\gamma^2 + 2h\gamma + \omega^2 = 0. \quad (6.6)$$

Двум корням этого уравнения

$$\gamma_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

соответствуют два линейно независимых решения x_1 и x_2 уравнения (6.5), вид которых зависит от знака подкоренного выражения $h^2 - \omega^2$. Рассмотрим три возможных случая.

1. Случай малого сопротивления ($h < \omega$).

В этом случае

$$\gamma_{1,2} = -h \pm ik, \quad k = \sqrt{\omega^2 - h^2}, \quad x_1 = e^{-ht} e^{ikt}, \quad x_2 = e^{-ht} e^{-ikt}.$$

Общее решение уравнения (6.5) имеет вид

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt).$$

Из начальных условий следует, что $C_1 = x_0$, $C_2 = (v_0 + hx_0)/k$,

$$x = e^{-ht} \left(x_0 \cos kt + \frac{v_0 + hx_0}{k} \sin kt \right).$$

Введение обозначений

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad \frac{v_0 + hx_0}{k} = A \cos \alpha$$

позволяет записать решение в следующей форме

$$x = Ae^{-ht} \sin(kt + \alpha).$$

Его график приведен на рис. 6. Амплитуда затухающих колебаний Ae^{-ht} монотонно убывает со временем, поэтому функция $x(t)$ не является периодической.

Пусть функция $x(t)$ имеет максимум в точке $t = t_1$. Покажем, что следующий максимум достигается в точке $t_2 = t_1 + 2\pi/k$. Стационарные точки функции $x(t)$ определяются из уравнения

$$\dot{x} = Ae^{-ht} [-h \sin(kt + \alpha) + k \cos(kt + \alpha)] = 0,$$

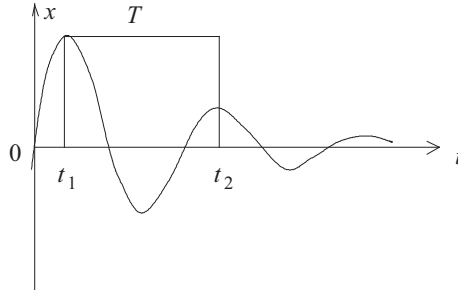


Рис. 6. Свободные колебания при наличии сопротивления.

эквивалентного уравнению

$$\operatorname{tg}(kt + \alpha) = k/h.$$

Соседние корни последнего уравнения находятся на расстоянии π/k друг от друга. Исследование знака производной \dot{x} в интервалах между корнями, показывает, что корням соответствуют чередующиеся максимумы и минимумы (см. также рис. 6). Следовательно, расстояние между двумя ближайшими максимумами в точках $t = t_i$ и $t = t_{i+1}$ равно $T = 2\pi/k$. Величину T называют периодом затухающих колебаний. Если $h \ll \omega$, т. е. коэффициент сопротивления мал, то $k \simeq \omega$, и период $2\pi/k$ затухающих колебаний мало отличается от периода $2\pi/\omega$ свободных колебаний без сопротивления.

Отношение двух соседних максимумов функции $x(t)$

$$\frac{x(t_i)}{x(t_{i+1})} = \frac{Ae^{-ht_i} \sin(kt_i + \alpha)}{Ae^{-h(t_i+T)} \sin(k(t_i + 2\pi/k) + \alpha)} = e^{hT}$$

называется *декрементом затухания*, а величина

$$hT = \ln \frac{x(t_i)}{x(t_{i+1})}$$

— *логарифмическим декрементом затухания*. Последняя формула позволяет найти величину коэффициента сопротивления при помощи эксперимента.

2. Случай большого сопротивления ($h > \omega$).

Если $h > \omega$, то оба корня уравнения (6.6)

$$\gamma_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad \gamma_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

вещественны и отрицательны, а общее решение уравнения (6.5)

$$x = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$

представляет собой линейную комбинацию двух экспоненциально убывающих функций. Подстановка общего решения и его производной

$$\dot{x} = \gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 t} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 t}$$

в начальные условия позволяет найти произвольные постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{v_0 - \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad C_2 = \frac{v_0 - \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Так же, как и в случае малого сопротивления, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В качестве упражнения предлагается найти значения начальной скорости v_0 , при которых для всех $t > 0$ выполняется неравенство $x(t) > 0$, если $x_0 > 0$.

3. Случай $h = \omega$.

При $h = \omega$ корни уравнения (6.6) совпадают: $\gamma_1 = \gamma_2 = -h$. Два линейно независимых решения уравнения (6.5) имеют вид

$$x_1 = e^{-ht}, \quad x_2 = te^{-ht}.$$

В том, что решение x_2 удовлетворяет уравнению (6.5) при $h = \omega$ нетрудно убедиться путем подстановки этого решения в уравнение.

Постоянные C_1 и C_2 в общем решении

$$x(t) = e^{-ht}(C_1 + C_2 t)$$

находятся из начальных условий. Выражения для них в рассматриваемом случае имеют вид

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 + hx_0.$$

При любых начальных условиях $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В рассмотренных трех случаях колебания затухают, так $\operatorname{Re} \gamma_j < 0$ для $j = 1, 2$. Решение вида $e^{\gamma_j t}$ убывает тем быстрее, чем больше величина $|\operatorname{Re} \gamma_j|$. Скорость затухания общего решения определяется тем из двух линейно независимых решений, которое затухает медленнее. Следовательно, чем больше величина

$$\gamma_* = \min(|\operatorname{Re} \gamma_1|, |\operatorname{Re} \gamma_2|),$$

тем быстрее затухает общее решение.

При $h < \omega$ справедливы равенства $|\operatorname{Re} \gamma_1| = |\operatorname{Re} \gamma_2| = h$, т. е. $\gamma_* = h$. При $h > \omega$ имеем

$$\gamma_* = \left| -h + \sqrt{h^2 - \omega^2} \right| = \frac{\omega^2}{h + \sqrt{h^2 - \omega^2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty.$$

Функция $\gamma_*(h)$ достигает максимума при $h = \omega$ (рис. 7), поэтому

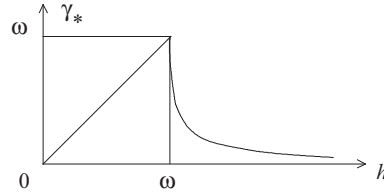


Рис. 7. Зависимость γ_* от h .

колебания затухают быстрее всего в случае $h = \omega$.

6.4. Вынужденные колебания без учета сопротивления

Рассмотрим колебания груза массой m , прикрепленного к пружине жесткости c , происходящие под действием внешней силы $F(t)$. Пренебрегая силами сопротивления, получаем уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad \omega^2 = c/m, \quad f = F/m. \quad (6.7)$$

Если сила является периодической функцией времени: $F(t) = P \sin \nu t$, то $f(t) = B \sin \nu t$, где $B = P/m$, и уравнение (6.7) приобретает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = B \sin \nu t.$$

Общее решение этого уравнения

$$x = x_0 + x_*,$$

где $x_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, а x_* — частное решение неоднородного уравнения.

Подстановка $x_* = A_* \sin \nu t$ в уравнение (6.7) при $\nu \neq \omega$ дает равенство $A_* = B/(\omega^2 - \nu^2)$. Случай резонанса $\nu = \omega$ рассматривается

ниже. В нерезонансном случае $\nu \neq \omega$ частное решение уравнения (6.7) находится по формуле

$$x_* = \frac{B}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t.$$

Принимая во внимание, что

$$A_* = \frac{B/\omega^2}{1 - \nu^2/\omega^2}, \quad B/\omega^2 = P/c = \delta,$$

где δ — статический прогиб, получаем

$$A_* = \delta \eta(\nu), \quad \eta(\nu) = \frac{1}{1 - \nu^2/\omega^2}.$$

Безразмерная величина η называется *коэффициентом динамичности*, причем $\eta(0) = 1$, $\eta \rightarrow 0$ при $\nu/\omega \rightarrow \infty$.

Введем обозначение $A = |A_*|$. Тогда частное решение можно представить в виде

$$x_* = A \sin(\nu t + \beta), \quad \beta = \begin{cases} 0, & \nu < \omega \\ -\pi, & \nu > \omega. \end{cases}$$

Величины A и β называются *амплитудой* и *фазой* вынужденных колебаний. Приведенные на рис. 8 графики функций $A(\nu)$ и $\beta(\nu)$,

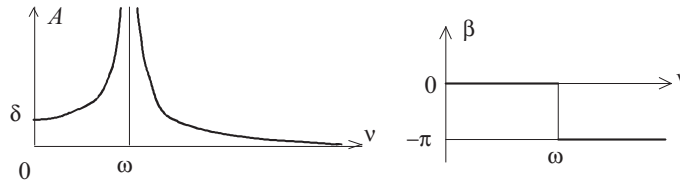


Рис. 8. АЧХ и ФЧХ при отсутствии сопротивления.

называют амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками (сокращенно АЧХ и ФЧХ) вынужденных колебаний.

В случае резонанса, когда $\nu = \omega$, частное решение ищем в виде $x_* = Dt \cos \nu t$. Подстановка x_* в уравнение (6.7) дает $D = -B/2\nu$. Следовательно,

$$x_* = -\frac{Bt}{2\nu} \cos \nu t.$$

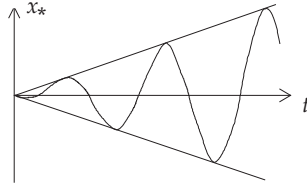


Рис. 9. Нарастание колебаний при резонансе.

При резонансе амплитуда колебаний растет пропорционально времени. График функции $x_*(t)$ приведен на рис. 9.

Для построения частного решения в том случае, когда $f(t)$ является произвольной функцией времени, воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Частное решение ищем в виде

$$x_* = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t.$$

В выражении для производной

$$\dot{x}_* = \dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t - C_1(t)\omega \sin \omega t + C_2(t)\omega \cos \omega t.$$

положим

$$\dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t = 0. \quad (6.8)$$

Тогда

$$\ddot{x}_* = -C_1(t)\omega^2 \cos \omega t - C_2(t)\omega^2 \sin \omega t - \dot{C}_1(t)\omega \sin \omega t + \dot{C}_2(t)\omega \cos \omega t.$$

Подставив x_* и \ddot{x}_* в уравнение (6.7), получим

$$-\dot{C}_1(t) \sin \omega t + \dot{C}_2(t) \cos \omega t = f/\omega. \quad (6.9)$$

Решение системы (6.8), (6.9) имеет вид

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{f}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{f}{\omega} \cos \omega t.$$

Интегрирование этих равенств при условии $C_1(0) = C_2(0) = 0$ дает формулы

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad C_2(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Подставляя найденные выражения для $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в формулу для x_* , получаем

$$x_*(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, называется интегралом Дюамеля. Из равенств $C_1(0) = C_2(0) = 0$ следует, что решение $x_*(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям, т. е. $x_*(0) = \dot{x}_*(0) = 0$.

В качестве упражнения предлагается с помощью интеграла Дюамеля получить решения случаях $f(\tau) = B \sin \nu \tau$ ($\nu \neq \omega$) и $f(\tau) = B \sin \omega \tau$.

6.5. Вынужденные колебания при наличии сопротивления

Уравнение, описывающее колебания материальной точки массой m под действием силы упругости $-cx$ силы сопротивления $-n\dot{x}$ и внешней периодической силы $F(t) = P \sin \nu t$, можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = B \sin \nu t, \quad (6.10)$$

где $2h = n/m$, $\omega^2 = c/m$, $B = P/m$. Общее решение уравнения (6.10) является суммой общего решения x_0 однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, причем $x_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Частное решение ищем в виде $x_* = A \sin(\nu t + \beta)$. Подставим это решение в уравнение (6.10). Принимая во внимание, что

$$\sin \nu t = \sin[(\nu t + \beta) - \beta] = \sin(\nu t + \beta) \cos \beta - \cos(\nu t + \beta) \sin \beta,$$

приравняем нулю коэффициенты при $\sin(\nu t + \beta)$ и $\cos(\nu t + \beta)$. Получим систему уравнений для определения неизвестных A и β :

$$A(\omega^2 - \nu^2) = B \cos \beta, \quad 2h\nu A = -B \sin \beta.$$

Решение системы имеет вид

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4h^2\nu^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{2h\nu}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Разделив на ω^2 числитель и знаменатель дроби в выражении для A , получим

$$A = \frac{\delta}{\sqrt{g(z)}}, \quad g(z) = (1-z)^2 + 4kz, \quad z = \frac{\nu^2}{\omega^2}, \quad k = \frac{h^2}{\omega^2},$$

где $\delta = B/\omega^2 = P/c$ — статический прогиб.

Производная функции $g(z)$ обращается в нуль при

$$z = z_* = 1 - 2k.$$

Ввиду того, что $z \geq 0$, функция $g(z)$ имеет минимум в точке $z = z_*$, если $k = h^2/\omega^2 \leq 1/2$. В этом случае в точке $z = z_*$ амплитуда A имеет максимум

$$A_* = \frac{\delta}{2\sqrt{k(1-k)}} = \frac{\delta}{2\frac{h}{\omega}\sqrt{1-\frac{h^2}{\omega^2}}}.$$

При уменьшении коэффициента сопротивления h максимум амплитуды увеличивается и сдвигается вправо, а величина частоты внешней силы ν , при которой достигается максимум, приближается к значению собственной частоты колебаний ω . На рис. 10 слева изображены амплитудно-частотные характеристики, соответствующие разным значениям h .

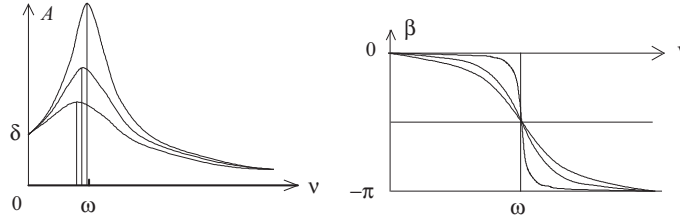


Рис. 10. АЧХ и ФЧХ при наличии сопротивления.

В случае $h^2/\omega^2 > 1/2$, т. е. при достаточно большом сопротивлении, наибольшее значение амплитуды $A_* = \delta$ достигается при $\nu = 0$.

Фазово-частотные характеристики для различных значений коэффициента сопротивления h приведены на рис. 10 справа. При

уменьшении h форма фазово-частотной характеристики приближается к разрывной функции, соответствующей отсутствию сопротивления, график которой изображен на рис. 8.

В случае произвольной внешней силы $F(t)$ частное решение $x_*(t)$ можно найти методом вариации произвольных постоянных.

6.6. Математический маятник

Рассмотрим материальную точку M массой m , которая движется в вертикальной плоскости S под действием силы веса $P = mg$. Пусть во все время движения расстояние от точки M до неподвижной точки O , принадлежащей плоскости S , равно l (рис. 11). Такая механическая система называется математическим маятником.

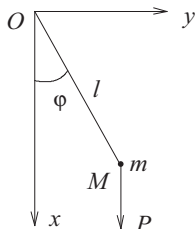


Рис. 11. Математический маятник.

Она, в частности, описывает движение груза, привязанного к нерастяжимой нити, второй конец которой закреплен в точке O , если во время движения груза нить натянута. Траекторией движения точки M является окружность, а положение точки на этой окружности определяется значением угла φ между осью x и отрезком OM (см. рис. 11).

Для вывода уравнения движения математического маятника воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{L}$. Проектируя это равенство на ось z и принимая во внимание, что для рассматриваемой задачи

$$l_z = lmv = ml^2\dot{\varphi}, \quad L_z = -mgl \sin \varphi,$$

получаем

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega^2 = g/l. \quad (6.11)$$

В случае малых колебаний, когда $\varphi \ll 1$, имеет место приближенное равенство $\sin \varphi \simeq \varphi$. Заменяв в уравнении (6.11) $\sin \varphi$ углом φ , получим линейное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

общее решение которого

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

имеет период $T_0 = 2\pi/\omega$, не зависящий от начальных условий.

В том случае, когда угол φ не является малым, общее решение уравнения (6.11) не выражается через элементарные функции, однако построение фазовых траекторий рассматриваемой системы дает возможность изучить качественный характер движения математического маятника при различных начальных условиях.

Умножение уравнения (6.11) на $\dot{\varphi}$ позволяет записать его в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2 \cos \varphi \right) = 0,$$

поэтому $\dot{\varphi}^2/2 - \omega^2 \cos \varphi = c$, $\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2(c + \omega^2 \cos \varphi)}$.

Постоянная c удовлетворяет неравенству

$$c = \dot{\varphi}^2/2 - \omega^2 \cos \varphi \geq -\omega^2 \cos \varphi \geq -\omega^2.$$

Наименьшему значению $c = -\omega^2$ соответствует положение равновесия маятника, для которого $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

Введем обозначение $f(\varphi) = -\omega^2 \cos \varphi$. Тогда

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2[c - f(\varphi)]}. \quad (6.12)$$

Формулу (6.12) можно использовать для построения фазовых траекторий, как с помощью компьютера, так и графоаналитическим методом. Во втором случае необходимо сначала построить график функции $y = f(\varphi)$. Непосредственно под этим графиком изображается фазовая плоскость, причем осью $\dot{\varphi}$ служит продолжением оси y графика $f(\varphi)$ (рис. 12). Для построения одной из фазовых траекторий следует выбрать значение постоянной c , удовлетворяющее неравенству $c \geq -\omega^2$ и провести прямую $y = c$. Если $f(\varphi) < c$, то

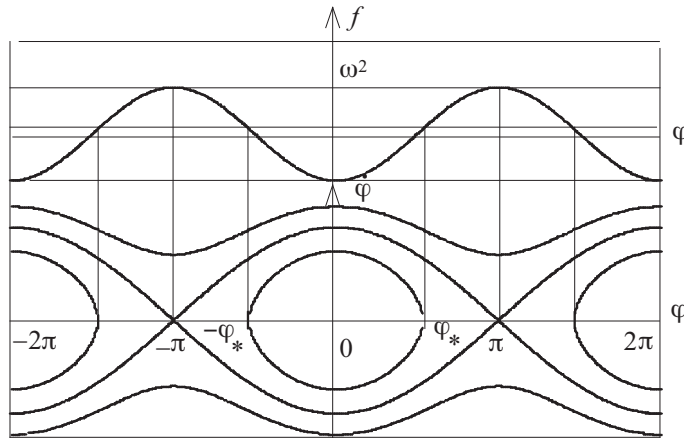


Рис. 12. Фазовые траектории математического маятника.

каждому значению φ соответствуют 2 точки на фазовой плоскости, координаты которых определяются по формуле (6.12). В случае $f(\varphi_*) = c$ на фазовой плоскости имеется одна точка с координатами $(\varphi_*, 0)$. Наконец, для φ , удовлетворяющих неравенству $f(\varphi) > c$, точки на фазовой плоскости отсутствуют (см. рис. 12).

Если $c = -\omega^2$ равенство $f(\varphi) = c$ имеет место при $\varphi = 2\pi k$, где k — произвольное целое число, причем $f(\varphi) > c$ для остальных значений φ . Фазовые траектории представляют собой точки с координатами $(0, 2\pi k)$. Этим точкам соответствует нижнее положение равновесия маятника.

В случае $-\omega^2 < c < \omega^2$ фазовыми траекториями являются замкнутые кривые, поэтому происходят периодические колебания маятника. При $c > \omega^2$ маятник вращается вокруг точки подвеса. Кривая, для которой $c = \omega^2$, разделяет области колебательных и вращательных движений маятника и называется *сепаратрисой*.

Направление движения фазовой точки по фазовой траектории указано стрелками. В верхней полуплоскости $\dot{\varphi} > 0$, поэтому угол φ возрастает с течением времени.

Предположим, что $|c| < \omega^2$, т. е. маятник совершает колебания. Если $\dot{\varphi}(\varphi_*) = 0$, то из формулы (6.12) следует, что $\cos \varphi_* = -c/\omega^2$. Подстановка этого равенства в (6.12) дает формулу

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2(\cos \varphi - \cos \varphi_*) \geq 0. \quad (6.13)$$

Следовательно,

$$\cos \varphi_* \leq \cos \varphi, \quad |\varphi| \leq \varphi_*,$$

где $\varphi_* = \arccos(-c/\omega^2)$ — амплитуда колебаний (см. рис. 12).

Формулу (6.13) запишем в виде

$$dt = \pm H(\varphi) d\varphi, \quad H(\varphi) = \frac{1}{\omega \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_*)}}$$

и проинтегрируем. Получим

$$t = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} H(\varphi) d\varphi,$$

где $\varphi_0 = \varphi(0)$, а знаки $+$ и $-$ соответствуют $\dot{\varphi} > 0$ и $\dot{\varphi} < 0$.

Период колебаний T представляет собой время, за которое фазовая точка проходит по замкнутой фазовой траектории, возвращаясь в исходное положение. Выберем в качестве исходного положения точку A с абсциссой $\varphi = 0$ (см. рис. 12). При движении фазовой точки по первой четверти фазовой траектории угол φ меняется от 0 до φ_* , а $\dot{\varphi} > 0$, поэтому время движения определяется по формуле

$$T_1 = \int_0^{\varphi_*} H(\varphi) d\varphi.$$

Аналогичным образом находим время движения по каждой из оставшихся трех четвертей:

$$T_2 = - \int_{\varphi_*}^0 H(\varphi) d\varphi, \quad T_3 = - \int_0^{-\varphi_*} H(\varphi) d\varphi, \quad T_4 = \int_{-\varphi_*}^0 H(\varphi) d\varphi.$$

Очевидно, что $T_2 = T_1$, $T_4 = T_3$. В справедливости равенства $T_4 = T_1$, можно убедиться, сделав замену переменной $\psi = -\varphi$ в последнем интеграле. Принимая во внимание, что

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 4T_1,$$

получаем

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_*} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_*)}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\varphi_*} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_*/2) - \sin^2(\varphi/2)}}.$$

Замена переменной интегрирования φ на u

$$\sin(\varphi/2) = k \sin u, \quad k = \sin(\varphi_*/2)$$

позволяет получить равенство

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{4}{\omega} K(k), \quad (6.14)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Отметим, что период колебаний получился зависящим от амплитуды φ_* , так как от φ_* зависит параметр k . Если $\varphi_* \ll 1$, то $k \ll 1$ и $T \simeq 2\pi/\omega = T_0$, т. е. период T близок к периоду малых колебаний.

Чтобы вывести более точную формулу для периода T , разложим подынтегральное выражение из формулы (6.14) в ряд по степеням параметра k и оставим в этом разложении два первых слагаемых:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \simeq \frac{1}{1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 u} \simeq 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 u.$$

Подстановка этого приближенного выражения в (6.14) дает формулы

$$K(k) \simeq \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 u\right) du = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right), \quad T \simeq \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

Полученная приближенная формула для периода позволяет оценить погрешность теории малых колебаний математического маятника при различных значениях амплитуды колебаний. Так, например, в случае $\varphi_* = \pi/3 = 60^\circ$ имеем

$$k = \sin \frac{\varphi_*}{2} = \frac{1}{2}, \quad T \simeq \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{17}{16} T_0,$$

и погрешность теории малых колебаний при вычислении периода составляет около 6%.

6.7. Движение точки под действием силы всемирного тяготения

Сила притяжения двух материальных точек с массами m и M , находящимися на расстоянии r , по закону всемирного тяготения

равна

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2} = k \frac{m}{r^2},$$

где $k = \gamma M$, γ — гравитационная постоянная. Так, например, на поверхности Земли на точку массой m действует сила $mg = km/R^2$. Следовательно, для Земли $k = gR^2$.

Выберем начало координат O в точке с массой M . Тогда сила

$$\mathbf{F} = -k \frac{m\mathbf{r}}{r^3},$$

действующая на точку с массой m (рис. 13), является центральной.



Рис. 13. Силы притяжения.

По теореме об изменении момента количества движения

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0,$$

поэтому $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{l}_0$ — постоянный вектор, причем $\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} = 0$.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ при $t = 0$. Направим ось Ox по вектору \mathbf{r}_0 , а направление оси Oy выберем так, чтобы $\mathbf{v}_0 \in Oxy$. Тогда вектор $\mathbf{l}_0 = \mathbf{r}_0 \times m\mathbf{v}_0$ будет параллелен оси Oz , а точка с массой m будет принадлежать плоскости Oxy при любом $t > 0$, так как $\mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{r} = 0$ (рис. 14).

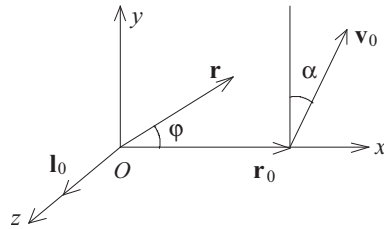


Рис. 14. Системы координат.

На плоскости Oxy введем полярную систему координат (r, φ) . Начальные условия примут вид

$$\varphi = 0, \quad r = r_0, \quad v_r = \dot{r} = v_0 \sin \alpha, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = v_0 \cos \alpha \quad \text{при } t = 0,$$

где α – угол между вектором \mathbf{v}_0 и осью Oy .

По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{w} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Проектирование этого равенства на оси полярной системы координат дает равенства

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (6.15)$$

Из второй формулы (6.15) вытекает, что

$$r^2 \dot{\varphi} = c = rv_\varphi = r_0 v_0 \cos \alpha. \quad (6.16)$$

Если $v_0 = 0$ или $\alpha = \pi/2$, то $c = 0$, $\varphi = 0$ и движение будет прямолинейным.

Рассмотрим случай $c \neq 0$. Положим $u = 1/r$. Принимая во внимание, что $\dot{\varphi} = cu^2$, получим

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} cu^2 = -c \frac{du}{d\varphi}. \quad (6.17)$$

Следовательно,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = c^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{u^2} c^2 u^4 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right].$$

Полученное равенство называют первой формулой Бине.

Продифференцировав формулу (6.17) по времени, получим

$$\ddot{r} = -\frac{d}{dt} \left(c \frac{du}{d\varphi} \right) = -c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \dot{\varphi} = -c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}.$$

Подставка этого выражение в первую формулу (6.15) дает вторую формулу Бине

$$w_r = -c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u} c^2 u^4 = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

и уравнение для определения $u(\varphi)$:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{c^2}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{k}{c^2}.$$

Произвольные постоянные A и B определяются с помощью начальных условий и формулы (6.17):

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2}, \quad B = -\frac{v_0 \sin \alpha}{c}, \quad c \neq 0.$$

Выражение для u можно записать в виде

$$u = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{c^2},$$

где $\cos \varphi_0 = A/\sqrt{A^2 + B^2}$, $\sin \varphi_0 = B/\sqrt{A^2 + B^2}$. Обозначив

$$p = \frac{c^2}{k}, \quad e = p\sqrt{A^2 + B^2},$$

с учетом равенства $r = 1/u$ получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Последнее уравнение задает в полярной системе координат кривую второго порядка, которая является траекторией движения точки. Величина p называется фокальным параметром, а e — эксцентриситетом. Форма кривой зависит от величины эксцентриситета. В случае $e = 0$ траекторией является окружность, при $0 < e < 1$ — эллипс, при $e = 1$ — парабола, при $e > 1$ — гипербола.

Из закона всемирного тяготения вытекают три закона Кеплера.

1. Каждая из планет движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. В силу равенства (6.16) секторная скорость

$$\dot{S} = r^2 \dot{\varphi} / 2 = c/2$$

постоянна.

3. Для эллипса $c^2 = kp = kb^2/a$, $\dot{T} = \pi ab$, где a и b длины большой и малой полуосей эллипса, T — время обращения планеты. Следовательно,

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\dot{S}^2} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{k}$$

или

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}. \quad (6.18)$$

Формула (6.18) показывает, что квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллипсов. Равенство (6.18) можно записать в виде

$$k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Подставив в формулу для эксцентриситета e выражения для постоянных A и B , с учетом равенства (6.16) получим

$$e = \frac{c^2}{k} \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{c^2}} = \sqrt{\frac{r_0^2 v_0^4 \cos^2 \alpha}{k^2} - 2 \frac{r_0 v_0^2 \cos^2 \alpha}{k} + 1}.$$

При движении точки по окружности

$$e = 0, \quad r = p = c^2/k = r_0, \quad \dot{\varphi} = c/r_0^2$$

и круговая скорость точки v_c определяется по формуле

$$v_c = r_0 \dot{\varphi} = c/r_0 = \sqrt{k/r_0}.$$

Используя выражение для v_c , формулу для e запишем в виде

$$e = \sqrt{\frac{v_0^4}{v_c^4} \cos^2 \alpha - 2 \frac{v_0^2}{v_c^2} \cos^2 \alpha + 1} = \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{v_c^2} \left(\frac{v_0^2}{v_c^2} - 2\right) \cos^2 \alpha}.$$

Если $0 < v_0 < \sqrt{2}v_c$, то $0 \leq e < 1$, и траекторией точки является эллипс. Равенство $e = 0$, соответствующее движению по окружности, имеет место при $v_0 = v_c$, $\alpha = 0$. В случае $v_0 = \sqrt{2}v_c$ эксцентриситет e равен единице, что соответствует параболической траектории. Скорость $v_p = \sqrt{2}v_c = \sqrt{2k/r_0}$ называется параболической скоростью. При $v_0 > v_p$ точка движется по гиперболе.

Пусть небесное тело имеет форму шара радиуса R . Круговая скорость $v_1 = \sqrt{k/R}$, соответствующая $r_0 = R$, называется первой космической скоростью для этого небесного тела. Учитывая, что

постоянная k выражается через ускорение свободного падения у поверхности тела g по формуле $k = gR^2$, получаем

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

Параболическая скорость $v_2 = \sqrt{2k/R}$, соответствующая $r_0 = R$, называется второй космической скоростью для этого небесного тела. Это та минимальная скорость, при которой точка, находящаяся на поверхности тела, может уйти от него на бесконечное расстояние. Очевидно, что

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1.$$

Для Земли $R=6371$ км, $g=9.82$ м/с, $v_1=7.91$ км/с, $v_2=11.2$ км/с.

6.8. Перелет по эллипсу Гомана

С развитием космонавтики в задачах о движении тел под действием сил всемирного тяготения появился новый фактор — управление. Управление производится включением реактивной тяги, при этом можно считать, что изменение вектора скорости космического аппарата происходит мгновенно, так как время действия тяги мало по сравнению с полным временем движения. Переход с одной орбиты на другую, при котором k раз включается управляющий двигатель, называется k -импульсным переходом. Среди двухимпульсных переходов особое значение имеет переход с одной круговой орбиты на другую, лежащую в той же плоскости.

Пусть космический аппарат, рассматриваемый как материальная точка, движется по окружности радиуса r_1 и имеет круговую скорость $v_{1c} = \sqrt{k/r_1}$. При мгновенном увеличении скорости в точке A на величину u_1 скорость аппарата становится равной v_1 , и он переходит с круговой орбиты на эллиптическую (рис. 15). В точке B , где эллипс касается окружности радиуса r_2 , происходит увеличение скорости аппарата v_2 на величину u_2 , благодаря которому он приобретает скорость $v_{2c} = \sqrt{k/r_2}$ и переходит на круговую орбиту радиуса r_2 . Следовательно,

$$v_1 = v_{1c} + u_1, \quad v_2 + u_2 = v_{2c}.$$

Скорости v_{1c} и v_{2c} известны, поэтому для определения управляющих импульсов u_1 и u_2 достаточно найти скорости v_1 и v_2 , которые аппарат имеет в точках A и B эллиптической орбиты.

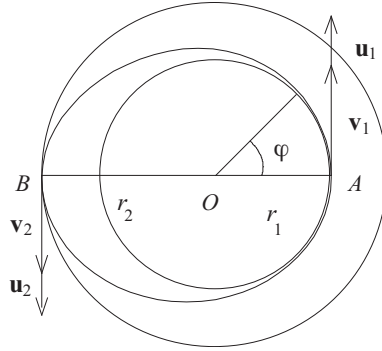


Рис. 15. Эллипс Гомана.

В точке A проекция скорости $v_r = 0$, поэтому $v_1 = v_\varphi$. Учитывая, что $r^2 \dot{\varphi} = rv_\varphi = c$, получаем, что $r_1 v_1 = c$ или

$$v_1^2 = c^2/r_1^2 = pk/r_1^2.$$

Аналогичным образом выводится формула

$$v_2^2 = c^2/r_2^2 = pk/r_2^2.$$

Подставив в уравнение эллипса

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, соответствующие точкам A и B , найдем r_1 и r_2 :

$$r_1 = \frac{p}{1 + e}, \quad r_2 = \frac{p}{1 - e}$$

С учетом последних формул выражения для v_1^2 и v_2^2 можно записать в виде

$$v_1^2 = \frac{(1 + e)k}{r_1}, \quad v_2^2 = \frac{(1 - e)k}{r_2}.$$

Наконец, принимая во внимание формулу для эксцентриситета эллипса

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2},$$

получаем

$$v_1^2 = \frac{2r_2 k}{r_1(r_1 + r_2)}, \quad v_2^2 = \frac{2r_1 k}{r_2(r_1 + r_2)}.$$

Можно доказать, что маневр, предложенный Гоманом, обеспечивает переход с одной круговой орбиты на другую с минимальными энергетическими затратами. Эти затраты определяются величиной суммарного импульса $u = u_1 + u_2$.

Используя выражения для v_i и v_{ic} , получаем

$$u = v_1 - v_{1c} + v_{2c} - v_2 = v_{1c} \left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{\kappa}} - \sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}} \right),$$

где $\kappa = r_2/r_1$. Функция

$$f(\kappa) = \frac{u}{v_{1c}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{\kappa}} - \sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}}$$

характеризует относительные энергетические затраты на перелет по эллипсу Гомана. Она обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f(\kappa) &\rightarrow -\infty \text{ при } \kappa \rightarrow 0, & f(\kappa) &\rightarrow \sqrt{2} - 1 \text{ при } \kappa \rightarrow \infty, \\ f(1) &= 0, & \max_{\kappa} f(\kappa) &= f(15.6) = 0.536. \end{aligned}$$

График функции $f(\kappa)$ изображен на рис. 16.

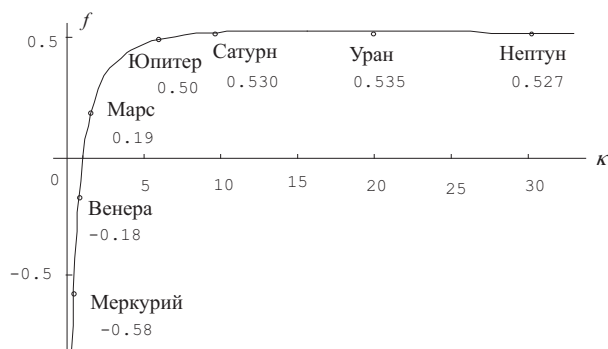


Рис. 16. График функции $f(\kappa)$.

Орбита Земли лежит практически в одной плоскости с орбитами всех планет, поэтому функцию $f(\kappa)$ можно использовать для оценки энергетических затрат на переход космического аппарата с орбиты Земли на орбиты других планет. В этом случае $\kappa = 1$

соответствует орбите Земли, $v_{1c} = 30$ км/с. Значения κ для других планет солнечной системы приведены на рис. 16. Наибольшие затраты энергии необходимы для перелета на орбиту Меркурия.

6.9. Задача двух тел

Задачей двух тел называется задача о движении двух материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. До сих пор рассматривалась так называемая ограниченная задача двух тел, когда начало координат выбиралось в одной из точек. Такая система отсчета, вообще говоря, не является инерциальной, поэтому в данном разделе мы изучим движение двух тел в инерциальной системе отсчета $Oxyz$, не связанной ни с одним из тел.

Пусть положения материальных точек с массами m и M заданы векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (рис. 17). Сила притяжения определяется по

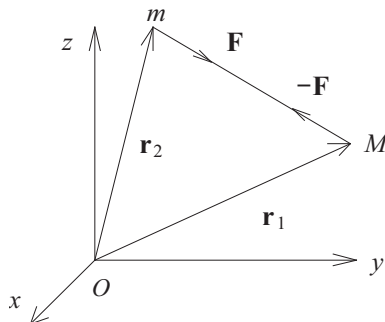


Рис. 17. Задача двух тел.

формуле

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma mM}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Из уравнений второго закона Ньютона

$$M\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\gamma mM}{r^3} \mathbf{r}, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma mM}{r^3} \mathbf{r}$$

вытекает уравнение для определения \mathbf{r}

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k_*}{r^3} \mathbf{r}, \quad k_* = \gamma(m + M). \quad (6.19)$$

Уравнение (6.19) отличается от уравнения из раздела 7

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}, \quad k = \gamma M$$

только выражением для постоянного коэффициента.

После замены k на $k_* = k(1+m/M)$ все результаты, полученные в разделе 7, можно использовать в задаче двух тел. Так, например, при замене k на k_* в формуле $T^2/a^3 = 4\pi^2/k$, получаем уточненный третий закон Кеплера:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = k \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Следовательно, отношение a^3/T^2 не является одинаковым для всех планет и зависит от массы планеты. Однако это уточнение незначительно, так как даже для самой большой планеты, Юпитера, отношение $m/M \simeq 0,001$. Точность измерений, доступных Кеплеру, не позволила обнаружить этот эффект.

Уточнение закона Кеплера оказывается более существенным в задаче о движении Луны вокруг Земли, так как в этом случае $m/M \simeq 0,0123$, где m – масса Луны, M – масса Земли.

Для ограниченной задачи двух тел

$$k = gR^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \quad g = \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2}.$$

Учитывая, что $R = 6,371 \cdot 10^6$ м, $T = 27,3$ дня = $2,358 \cdot 10^6$ с, $a = 3,844 \cdot 10^8$ м, получаем значение $g=9,936$ м/с², которое заметно отличается от ускорения свободного падения на поверхности Земли.

Замена k на $k_* = k(1+m/M) = gR^2(1+m/M)$ дает более точное значение для ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2 (1+m/M)} = \frac{9,936}{1+m/M} = \frac{9,936}{1,0123} = 9,82 \text{ м/с}^2$$

На движение Луны вокруг Земли влияют и другие тела Солнечной системы, поэтому полученный результат тоже является приближенным.

Из теоремы о движении центра масс

$$(m+M)\mathbf{w}_c = \mathbf{F}^{(e)} = 0$$

следует, что

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \quad (6.20)$$

где \mathbf{v}_0 и \mathbf{r}_0 находятся по заданным начальным условиям,

$$\mathbf{r}_c = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \quad m\mathbf{r}_2 + M\mathbf{r}_1 = (M + m)\mathbf{r}_c,$$

получаем следующее решение задачи двух тел:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c - \frac{m}{m + M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c + \frac{M}{m + M}\mathbf{r}.$$

Здесь \mathbf{r}_c определяется по формуле (6.20), а \mathbf{r} является решением уравнения (6.19).

Если выбрать начало координат в центре масс рассматриваемой системы из двух тел, то $\mathbf{r}_c = 0$,

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m}{m + M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{M}{m + M}\mathbf{r}.$$

В пределе при $m/M \rightarrow 0$ это решение задачи двух тел переходит в решение ограниченной задачи двух тел, так как $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0$, $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}$, $k_* \rightarrow k$.

В прошлом много усилий было потрачено на поиски аналитического решения задачи n тел (задачи о движении n материальных точек, притягивающихся по закону всемирного тяготения), однако даже для $n = 3$ аналитическое решение при произвольных начальных условиях неизвестно. В наше время благодаря появлению мощных компьютеров для решения задачи n тел можно использовать методы численного интегрирования.

6.10. Динамика относительного движения точки

Предположим, что наряду с инерциальной системой отсчета с ортами $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$, имеется подвижная система с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (рис. 18).

Пусть положение материальной точки с массой m относительно инерциальной системы отсчета задается вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}$, где

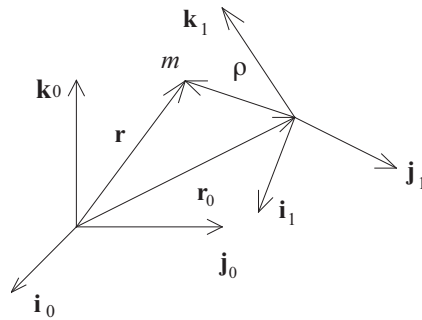


Рис. 18. Системы координат при относительном движении.

вектор \mathbf{r}_0 определяет положение начала подвижной системы отсчета относительно неподвижной, а вектор $\boldsymbol{\rho}$ задает положение точки относительно подвижной системы отсчета.

Движение точки по отношению к неподвижной системе называется абсолютным, а по отношению к подвижной системе — относительным. Переносным движением называют движение точки, жестко связанной с подвижной системой отсчета и совпадающей в рассматриваемый момент времени с материальной точкой.

Если задан вектор силы \mathbf{F} , действующей на точку, то закон абсолютного движения точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ можно найти с помощью уравнения второго закона Ньютона

$$m\mathbf{w}_a = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{w}_a = d^2\mathbf{r}/dt^2$ — абсолютное ускорение.

Для вывода уравнения, описывающего относительное движение, воспользуемся теоремой о сложении ускорений из главы 3:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c, \quad (6.21)$$

где $\mathbf{w}_r = \tilde{d}^2\boldsymbol{\rho}/dt^2$ — относительное ускорение,

$$\mathbf{w}_e = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

— переносное ускорение, $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ — ускорение Кориолиса, $\mathbf{v}_r = \tilde{d}\boldsymbol{\rho}/dt$ — относительная скорость, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы, $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ — угловое ускорение.

Подставив выражение (6.21) в уравнение второго закона Ньютона, получим уравнение движения в подвижной системе координат:

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c, \quad (6.22)$$

где $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e$ — сила инерции переносного движения, $\mathbf{J}_c = -m\mathbf{w}_c$ — сила инерции Кориолиса.

Система координат, жестко связанная с Землей, не является инерциальной прежде всего из-за вращения Земли вокруг своей оси. Рассмотрим влияние вращения Земли на равновесие и движение материальных точек вблизи ее поверхности.

Пример 1. Сила веса.

Будем считать, что Земля представляет собой шар, вращающийся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Выберем систему отсчета с началом в центре Земли и с осями $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$, направленными на удаленные звезды. Такая система координат не будет, строго говоря, инерциальной из-за вращения Земли вокруг Солнца, но связанная с этим движением сила инерции очень мала и учитываться не будет. С Землей жестко свяжем подвижную систему с началом в той же точке и с осями $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0$

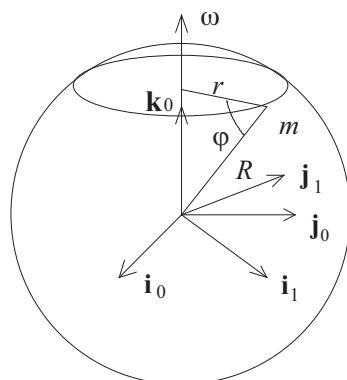


Рис. 19. Земной шар.

Пусть материальная точка с массой m находится в равновесии на поверхности Земли. В этом случае $\mathbf{w}_r = \mathbf{v}_r = 0, \mathbf{w}_c = 0$ и уравнение (6.22) принимает вид

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{N} + \mathbf{J}_e = 0,$$

где $\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}_p$ — сила притяжения Земли, \mathbf{N} — сила реакции, удерживающая точку в равновесии, $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e$ — сила инерции переносного движения. Если материальная точка подвешена на нити, то \mathbf{N} — сила натяжения нити. Нить направлена по линии отвеса.

Переносное движение представляет собой равномерное движение точки по окружности радиуса $r = R \cos \varphi$, где R — радиус Земли, φ — широта параллели, на которой находится точка (см. рис. 19). Следовательно,

$$w_e = r\omega^2 = R\omega^2 \cos \varphi, \quad J_e = mR\omega^2 \cos \varphi.$$

В случае $J_e \neq 0$ сила веса $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = \mathbf{F}_p + \mathbf{J}_e$, параллельная линии отвеса, не совпадает с силой притяжения \mathbf{F}_p , направленной к центру Земли (рис. 20), однако из-за малости отношения J_e/F_p разница между \mathbf{P} и \mathbf{F}_p невелика.

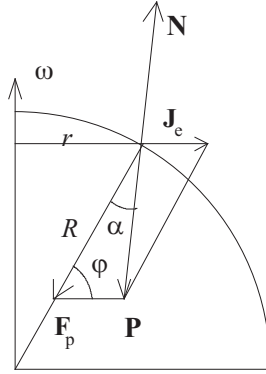


Рис. 20. Сила веса.

По теореме косинусов (см. рис. 20)

$$P^2 = F_p^2 + J_e^2 - 2J_e F_p \cos \varphi,$$

и, следовательно,

$$\frac{P^2}{F_p^2} = 1 + \varepsilon^2 J_e^2 \cos^2 \varphi - 2\varepsilon \cos^2 \varphi,$$

где $\varepsilon = \omega^2 R/g_p \simeq 1/300$ — малый параметр, так как $R = 6.37 \cdot 10^6$, $\omega = \pi/43200$, $g_p = 9.82$. Пренебрегая малыми величинами,

пропорциональными ε^2 , получаем приближенную формулу

$$P(\varphi) = F_p \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos^2 \varphi} \simeq F_p (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi).$$

На полюсе $\varphi = \pi/2$, поэтому $P = F_p$. На экваторе, где $\varphi = 0$, разница между силой притяжения и весом достигает максимума, причем

$$P(0) = F_p \left(1 - \frac{1}{300}\right).$$

Если на полюсе тело имеет вес 300 кГ, то на экваторе оно будет весить 299 кГ.

Найдем приближенное значение угла α между векторами \mathbf{F}_p и \mathbf{P} . Из теоремы синусов

$$\frac{J_e}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin \varphi}$$

следует, что

$$\sin \alpha = \frac{J_e \sin \varphi}{P} \simeq \frac{J_e \sin \varphi}{F_p} = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\varphi \simeq \frac{\sin 2\varphi}{600} \simeq \alpha.$$

Наибольшего значения $\alpha_m \simeq 1/600$ угол α достигает на широте $\varphi \simeq 45^\circ$.

Пример 2. Движение точки по меридиану.

При движении материальной точки по поверхности Земли с относительной скоростью \mathbf{v}_r наряду с силой инерции переносного движения \mathbf{J}_e , возникает сила инерции Кориолиса $\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$.

Пусть точка движется по меридиану с севера на юг в северном полушарии (рис. 21а) В этом случае ускорение Кориолиса направ-

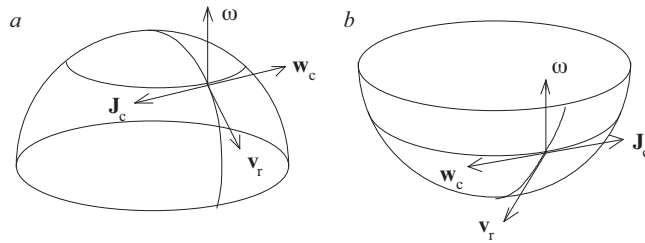


Рис. 21. Движение точки по меридиану.

лено с запада на восток, а сила инерции Кориолиса — с востока на запад. Если поменять направление скорости \mathbf{v}_r на противоположное, то сила инерции Кориолиса будет направлена с запада на восток. Следовательно, частицы воды в реке, текущей в северном полушарии, силой Кориолиса будут прижиматься к правому берегу. Правый берег размывается и оказывается более крутым, чем левый. Это особенность рек носит название закон Бэра.

При движении точки по меридиану с севера на юг в южном полушарии ускорение Кориолиса направлено с востока на запад, а сила инерции Кориолиса — с запада на восток (рис. 21b), поэтому у рек южного полушария, текущих вдоль меридиана, размывается левый берег.

6.11. Падение точки на поверхность Земли

Рассмотрим свободное падение материальной точки вблизи поверхности Земли на широте φ с высоты h с нулевой начальной скоростью. Ось Oz подвижной системы координат направим параллельно силе веса \mathbf{P} , т. е. по отвесной линии вниз, ось Oy — перпендикулярно z в плоскости меридиана (рис. 22a). В качестве начала

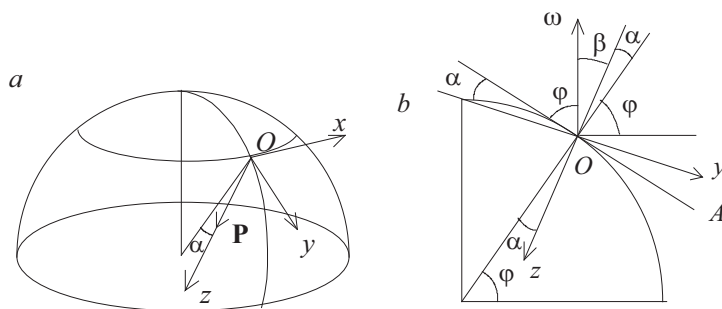


Рис. 22. Падение точки.

декартовой системы координат выберем точку пересечения оси Oz с поверхностью Земли. Тогда начальные условия в момент времени $t = 0$ имеют вид $x = y = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, $z = -h$.

Уравнение (6.22) для рассматриваемой задачи принимает вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{P} + \mathbf{J}_c, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F}_p + \mathbf{J}_e, \quad \mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \quad (6.23)$$

Проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси x, y, z определяются по формулам

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \sin \beta, \quad \omega_z = -\omega \cos \beta.$$

Здесь $\beta = \pi/2 - \alpha - \varphi$ — угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью Oz (рис. 22b). Формулы для проекций $\boldsymbol{\omega}$ можно записать следующим образом:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \cos \psi, \quad \omega_z = -\omega \sin \psi, \quad (6.24)$$

где $\psi = \varphi + \alpha \simeq \varphi$. На полюсе и на экваторе $\alpha = 0$, $\psi = \varphi$.

С помощью равенства

$$\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\omega \cos \psi & -\omega \sin \psi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

проектируем уравнение (6.23) на оси декартовой системы координат и получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2m\omega(\dot{z} \cos \psi - \dot{y} \sin \psi), \\ m\ddot{y} &= 2m\omega\dot{x} \sin \psi, \quad m\ddot{z} = mg - 2m\omega\dot{x} \cos \psi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Интегрирование двух последних уравнений системы (6.25) с учетом начальных условий $\dot{y}(0) = \dot{z}(0)$ дает равенства

$$\dot{y} = 2x\omega \sin \psi, \quad \dot{z} = gt - 2x\omega \cos \psi.$$

Подставив выражения для \dot{y} и \dot{z} в первое уравнение системы (6.25), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 2\omega gt \cos \psi$$

общее решение которого имеет вид

$$x = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t + x_*,$$

где A и B — произвольные постоянные, x_* — частное решение неоднородного уравнения. Подставив в уравнение $x_* = A_* t$, находим $A_* = g \cos \psi / (2\omega)$. Произвольные постоянные

$$A = 0, \quad B = -\frac{g \cos \psi}{4\omega^2}$$

определяются из начальных условий $x(0) = \dot{x}(0)$. Следовательно, отклонение тела к востоку

$$x(t) = \frac{g \cos \psi}{2\omega} t - \frac{g \cos \psi}{4\omega^2} \sin 2\omega t.$$

После подстановки $x(t)$ в выражения для \dot{y} и \dot{z} , отклонение к югу $y(t)$ и функция $z(t)$ находятся интегрированием.

Пусть время падения не слишком велико, то есть $\omega t \ll 1$. Тогда имеет место приближенное равенство

$$\sin 2\omega t \simeq 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!},$$

подстановка которого в выражение для $x(t)$, дает приближенную формулу для восточного отклонения:

$$x \simeq \frac{g\omega \cos \psi}{3} t^3.$$

Используя приближенное выражение для $x(t)$ и начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &\simeq \frac{g\omega^2 t^3 \sin 2\psi}{3}, & \dot{z} &\simeq gt - \frac{2g\omega^2 t^3 \cos^2 \psi}{3}, \\ y &\simeq \frac{g\omega^2 t^4 \sin 2\psi}{12}, & z &\simeq \frac{gt^2}{2} - \frac{g\omega^2 t^4 \cos^2 \psi}{6} - h \simeq \frac{gt^2}{2} - h. \end{aligned}$$

Южное отклонение y намного меньше восточного отклонения x , так как

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \omega t \sin \psi \ll 1.$$

Пример

Пусть падение точки с высоты $h = 500$ м происходит на широте $\varphi = 60^\circ$. Тогда $\psi \simeq 60^\circ$, время движения $t \simeq \sqrt{2h/g} = 10.1$ с, и произведение $\omega t \simeq 7.4 \cdot 10^{-4}$ является малой величиной, так как $\omega \simeq 7.3 \cdot 10^{-5}$. В данном примере восточное отклонение $x \simeq 12$ см, южное отклонение $y \simeq 0.004$ см.

6.12. Маятник Фуко

Исследуем влияние вращения Земли на движение материальной точки массой m , которая находится на заданном расстоянии

l от точки O . Такая механическая система называется маятником. Предположим, что точка O неподвижна относительно поверхности Земли и находится вблизи этой поверхности на широте φ . Начало координат выберем в точке O , а оси направим так же, как в предыдущем разделе (см. рис. 23). Тогда векторное уравнение движения

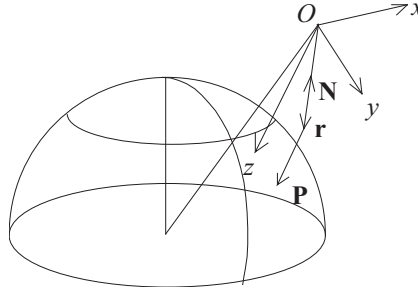


Рис. 23. Маятник Фуко.

маятника будет иметь вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{P} + \mathbf{J}_c + \mathbf{N}, \quad (6.26)$$

где $\mathbf{P} = mg\mathbf{k}$ — вес маятника, $\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ — сила Кориолиса, $\mathbf{N} = -N\mathbf{r}/r$ — сила реакции, $r = l$.

Проектирование векторного уравнения (6.26) на орты \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{k} цилиндрической системы координат ρ , θ , z дает три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} mw_\rho &= -2m(\omega_\theta v_z - \omega_z v_\theta) + N_\rho, \\ mw_\theta &= -2m(\omega_z v_\rho - \omega_\rho v_z) + N_\theta, \\ mw_z &= mg - 2m(\omega_\rho v_\theta - \omega_\theta v_\rho) + N_z, \end{aligned}$$

где

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}, \quad w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad w_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}), \quad w_z = \ddot{z}.$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -N(\rho\mathbf{e}_1 + z\mathbf{k})/l, \quad N_\rho = -N\rho/l, \quad N_\theta = 0, \quad N_z = -Nz/l, \\ \omega_\rho &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = (\omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_1 = \omega_y \sin \theta = -\omega \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_\theta &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 = (\omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_2 = \omega_y \cos \theta = -\omega \cos \theta \cos \psi, \quad \omega_z = -\omega \sin \psi \end{aligned}$$

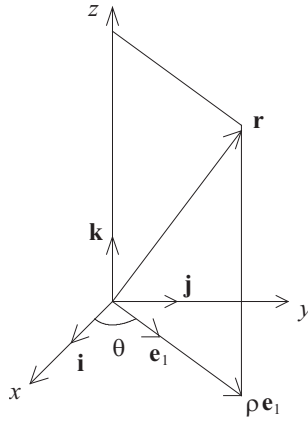


Рис. 24. Цилиндрическая система координат.

(см. рис. 24), получаем следующие уравнения, описывающие колебания маятника Фуко:

$$\begin{aligned}
 mw_{\rho} &= 2m\omega(\dot{z} \cos \theta \cos \psi - v_{\theta} \sin \psi) - N\rho/l, \\
 mw_{\theta} &= 2m\omega(-\dot{z} \sin \theta \cos \psi + v_{\rho} \sin \psi), \\
 m\ddot{z} &= mg + 2m\omega(v_{\theta} \sin \theta - v_{\rho} \cos \theta) \cos \psi - Nz/l,
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Три уравнения (6.27) содержат четыре неизвестных функции ρ , θ , z и N . К уравнениям (6.27) следует добавить уравнение связи

$$\rho^2 + z^2 = l^2, \tag{6.28}$$

которое вытекает из равенства $r = l$.

Система уравнений (6.27), (6.28) в общем случае не имеет аналитического решения. Рассмотрим малые колебания маятника. Для этого перейдем сначала к безразмерным переменным

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \rho' = \frac{\rho}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}.$$

В безразмерных переменных система (6.27), (6.28) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \rho'}{d\tau^2} - \rho' \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 &= 2\omega' \left(\frac{dz'}{d\tau} \cos \theta \cos \psi - \rho' \frac{d\theta}{d\tau} \sin \psi \right) - N' \rho', \\ \frac{1}{\rho'} \frac{d}{d\tau} \left(\rho'^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) &= 2\omega' \left(\frac{dz'}{d\tau} \sin \theta \cos \psi + \frac{d\rho'}{d\tau} \sin \psi \right), \\ \frac{d^2 z'}{d\tau^2} &= 1 + 2\omega' \left(\rho' \frac{d\theta}{d\tau} \sin \theta - \frac{d\rho'}{d\tau} \cos \theta \right) \cos \psi - N' z', \\ \rho'^2 + z'^2 &= 1,\end{aligned}\tag{6.29}$$

где

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad N' = \frac{N}{mg}.$$

Система уравнений (6.29) имеет решение $\rho' = 0$, $z' = 1$, $N' = 1$, соответствующее положению равновесия маятника. Предположим, что отклонение маятника от положения равновесия является малым и будем искать приближенное решение в виде

$$\rho' = \varepsilon \rho_1, \quad z' = 1 + \varepsilon^2 z_1.\tag{6.30}$$

где ε — малый параметр.

Подставив решения (6.30) в последнее уравнение (6.29), получим $z_1 = -\rho_1^2/2$. Приближенные выражения для производных функции z' имеют вид

$$\frac{dz'}{d\tau} = \varepsilon^2 \frac{dz_1}{d\tau}, \quad \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2 z_1}{d\tau^2}\tag{6.31}$$

Подставим решения (6.30) и выражения для производных (6.31) в первые три уравнения (6.29). После отбрасывания малых слагаемых получим следующие приближенные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \rho_1}{d\tau^2} - \rho_1 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 &= -2\omega'_\psi \rho_1 \frac{d\theta}{d\tau} - N' \rho_1, \\ \frac{d}{d\tau} \left(\rho_1^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) &= 2\omega'_\psi \rho_1 \frac{d\rho_1}{d\tau}, \quad N' = 1,\end{aligned}\tag{6.32}$$

где $\omega'_\psi = \omega' \sin \psi$.

Из второго уравнения (6.32) следует, что

$$\rho_1^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \omega'_\psi \rho_1^2 + C,$$

где C — произвольная постоянная. Рассмотрим решение, удовлетворяющее начальному условию $\rho(0) = 0$. Тогда $\rho_1(0) = 0$, $C = 0$ и

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \omega'_\psi, \quad \theta = \omega'_\psi \tau + \theta_0. \quad (6.33)$$

Первое уравнение (6.32) с учетом третьего уравнения и первой формулы (6.33) приобретает вид

$$\frac{d^2\rho_1}{d\tau^2} + (1 + \omega'^2_\psi)\rho_1 = 0. \quad (6.34)$$

Угловая скорость вращения Земли $\omega = 7.28 \cdot 10^{-5}$, а, например, для маятника длиной 100 м. частота малых колебаний $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 0.31$. Поэтому $\omega_\psi \leq \omega' = \omega/\omega_0 \ll 1$, и уравнение (6.34) можно заменить приближенным уравнением

$$\frac{d^2\rho_1}{d\tau^2} + \rho_1 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\rho_1 = A \cos \tau + B \sin \tau.$$

Из начального условия $\rho(0) = 0$ вытекает, что $A = 0$,

$$\rho_1 = B \sin \tau, \quad \frac{d\rho_1}{d\tau} = B \cos \tau.$$

Пусть при $t = 0$ скорость маятника

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon l \frac{d\rho_1}{dt} = \varepsilon l \omega_0 \frac{d\rho_1}{d\tau} = \varepsilon l \omega_0 B = v_0.$$

Тогда

$$\rho(t) = \varepsilon l \rho_1 = \varepsilon l B \sin \tau = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Из формулы (6.32) вытекает, что

$$\theta = \omega' \tau \sin \psi + \theta_0 = \omega_\psi t + \theta_0, \quad \omega_\psi = \omega \sin \psi.$$

Функция $\rho(t)$ меняется намного быстрее, чем угол θ , так как $\omega_0 \gg \omega_\psi$. Если бы угол θ вообще не менялся, то маятник совершал бы колебания в плоскости $\theta = \theta_0$. В рассматриваемом случае можно

сказать, что плоскость качаний маятника медленно поворачивается с угловой скоростью ω_ψ . Время полного оборота плоскости качания маятника $T = 2\pi/\omega_\psi$. Отличим угла ψ от угла φ , равного широте места установки маятника, можно пренебречь и считать $T = 2\pi/\omega_\varphi$, $\omega_\varphi = \omega \sin \varphi$. На полюсе $\varphi = \pi/2$, $\omega_\varphi = \omega$ и время полного оборота составляет $T_0 = 2\pi/\omega = 24$ часа. На широте φ имеем $T = T_0/\sin \varphi = 24/\sin \varphi$.

В 1851 году французский ученый Фуко провел в Париже эксперимент с маятником длиной 67 м. Широта Парижа $\varphi_p = 49^\circ$, $\sin \varphi_p = 0.75$ и время полного оборота маятника Фуко было равно $24/0.75 = 32$ часа. С 1931 по 1986 год маятник длиной 98 м. в Исаакиевском соборе в Петербурге служил доказательством вращения Земли вокруг своей оси. Для него $T = 24/\sin 60^\circ = 28$ часов.

Оглавление

6 Частные задачи динамики точки	1
6.1. Простейшие случаи прямолинейного движения точки	1
6.2. Свободные колебания точки	5
6.3. Затухающие колебания	7
6.4. Вынужденные колебания без учета сопротивления . .	11
6.5. Вынужденные колебания при наличии сопротивления	14
6.6. Математический маятник	16
6.7. Движение точки под действием силы всемирного тяготения	20
6.8. Перелет по эллипсу Гомана	25
6.9. Задача двух тел	28
6.10. Динамика относительного движения точки	30
6.11. Падение точки на поверхность Земли	35
6.12. Маятник Фуко	37