Глава 7

Динамика несвободной системы материальных точек

В предыдущих главах уже встречались примеры механических систем, на положения которых налагались ограничения (связи). В данной главе будет рассмотрено движение таких систем в общем случае.

7.1. Связи и их классификация

Рассмотрим систему из N материальных точек. Система материальных точек называется *несвободной*, если имеются ограничения на положения и скорости точек системы. Эти ограничения называются *связями* и выражаются в виде *уравнений связей*.

Примеры.

1. Абсолютно твердым называется тело, расстояния между точками которого не изменяются. Рассмотрим две точки M_1 и M_2 такого тела, расстояние между которыми равно l. Если x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k $(k = 1, 2)$, то уравнение связи имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

2. Предположим, что расстояние между двумя материальными точками является заданной функцией времени: $l = l(t)$. Тогда

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2(t).$$

Так, например, $l = l_0(1 + \alpha t)$ в том случае, когда две точки соединены стержнем, расширяющимся при нагревании.

3. Если точка движется по поверхности, заданной уравнением

$$f(x, y, z) = 0,$$

то это уравнение и представляет собой уравнение связи. В частности, если расстояние точки до начала координат не меняется, то она движется по сфере, а ее координаты удовлетворяют уравнению связи

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где R — радиус сферы.

4. В том случае, когда расстояние до начала координат является заданной функцией времени (муравей ползет по раздувающемуся воздушному шарику), уравнение связи принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t),$$

В примерах 1–4 ограничения касаются положения точек. Такие связи называются *конечными.* Однако, из любого ограничения, наложенного на положения точек, следует ограничение на скорости точек. Действительно, продифференцировав уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ из примера 3, получим уравнение *дифференциальной связи*

$$x\dot{x} + x\dot{y} + x\dot{z} = 0,$$

которое содержит производные от координат по времени и выражает условие перпендикулярности скорости точки $\mathbf{v}$ к вектору $\mathbf{r}$. Интегрирование последнего равенства дает соотношение $x^2+y^2+z^2 = R^2$, где R^2 — произвольная постоянная. Следовательно, эквивалентны оба способа описания связи: "точка находится на сфере" и "скорость точки перпендикулярна к вектору $\mathbf{r}$".

В общем случае дифференциальная связь называется *интегрируемой*, если уравнение этой связи путем интегрирования может быть сведено к равенству, содержащему только координаты точек. Рассмотрим пример дифференциальной связи, которая не является интегрируемой.

5. Пусть положения двух точек заданы векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Предположим, что скорость второй точки направлена по отрезку прямой, соединяющему точки (собака бежит за кошкой). Данная связь выражается векторным равенством

$$\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{r}_{21}/r_{21}, \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

проектируя которое на оси координат, получим три уравнения связи:

$$\dot{x}_2 = v_2(x_1 - x_2)/r_{21}, \quad \dot{y}_2 = v_2(y_1 - y_2)/r_{21}, \quad \dot{z}_2 = v_2(z_1 - z_2)/r_{21}.$$

Если связи наложены на твердое тело или на систему твердых тел, то в уравнение связи входят параметры, определяющие положение твердого тела.

6. Предположим, что цилиндр радиуса R катится без проскальзывания по плоскости $y = 0$, причем ось цилиндра, проходящая через точку C, параллельна оси Oz (рис. 7.1).

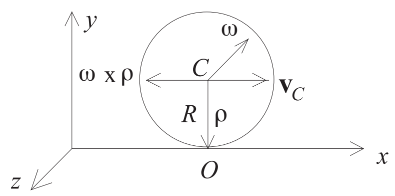

Рис. 7.1. Качение цилиндра по плоскости.

По формуле Эйлера $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, где $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_c$ — скорости точек O и C, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\dot{\varphi}$ — угловая скорость цилиндра, φ — угол поворота цилиндра, $\dot{\varphi} < 0$. Условие качения без проскальзывания означает, что $\mathbf{v}_0 = 0$. Проектирование равенства $\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0$ на ось x (см. рис. 7.1) дает уравнение связи

$$\dot{x}_c + R\dot{\varphi} = 0,$$

где x_c — координата точки C, Полученная дифференциальная связь является интегрируемой, так как ее уравнение эквивалентно уравнению

$$x_c + R\varphi = C,$$

где произвольная постоянная C может быть найдена, если в некоторый момент времени заданы значения x_c и φ. Отметим, что уравнения связей, описывающие качение шара по плоскости без проскальзывания, не интегрируются.

Классификация связей.

Уравнение произвольной связи для системы, состоящей из N материальных точек, имеет вид

$$\varphi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) = 0.$$

Введем вектор-столбец размерности $3N$, компонентами которого являются координаты точек системы:

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)^T \in E,$$

где $E = R^{3N}$ — арифметическое евклидово пространство. Вектор $\mathbf{r}$ определяет положение всех N точек относительно начала координат. Если $N = 1$, то вектор $\mathbf{r}$, задающий положение точки, принадлежит трехмерному пространству. Вектор

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N)^T \in E$$

задает проекции скоростей всех точек системы. Использование введенных обозначений позволяет записать уравнение связи в более компактной форме:

$$\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0.$$

Уравнение конечной связи имеет вид $f(t, \mathbf{r}) = 0$. Уравнение дифференциальной связи $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$ содержит проекции скоростей. Конечные и дифференциальные интегрируемые связи называются *голономными*, а дифференциальные неинтегрируемые — *неголономными.* В во всех рассмотренных примерах, за исключением примера 5, связи являются голономными. Система материальных точек называется голономной, если на нее наложены только голономные связи. В противном случае система называется неголономной.

Связь, уравнение которой $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$ не содержит в явном виде время t, называется *стационарной* (примеры 1,3,5,6). Если время входит в явном виде в уравнение связи, то связь называется *нестационарной* (примеры 2,4).

До сих пор мы рассматривали только *удерживающие* связи, которые заданы уравнением связи, однако возможны случаи, когда связь задается неравенством. Если шарик, размерами которого можно пренебречь, привязан к концу нерастяжимой нити длиной l, второй конец которой закреплен, то координаты центра шарика удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2$. Связь, заданная с помощью неравенства

$$\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \leqslant 0$$

называется *неудерживающей.* Если в случае неудерживающей связи координаты и скорости точек в некоторый момент времени $t = t_0$

удовлетворяют равенству $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$, то говорят, что при $t = t_0$ связь *напряжена*. Так, например, в задаче о движении шарика, при $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ нить, вообще говоря, будет натянута. В случае $x^2 + y^2 + z^2 < l^2$ нить не оказывает влияния на движение шарика.

Время движения системы с неудерживающей связью можно разбить на части так, чтобы для одних промежутков времени связь была напряжена, а для других $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) < 0$. В моменты времени, когда связь напряжена, ее можно заменить удерживающей связью $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$. В другие моменты времени неудерживающую связь можно отбросить. Ввиду этого в дальнейшем будут рассматриваться только удерживающие связи.

Независимость и совместность уравнений связей.

Пусть на систему из N материальных точек наложено g голономных и h неголономных связей, уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} f_j(t, \mathbf{r}) &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \\ \varphi_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) &= 0, \quad k = 1, 2, \ldots, h. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Предположим, что уравнения (7.1) являются независимыми, т. е. ни одно из них не может быть получено из других с помощью каких либо преобразований, включая дифференцирование по времени.

Дифференцирование по времени уравнений голономных связей дает дифференциальные связи

$$\frac{df_j}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g.$$

Введем обозначение

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}, \frac{\partial f}{\partial y_N}, \frac{\partial f}{\partial z_N} \right)^T.$$

Тогда

$$\frac{df_j}{dt} = \nabla f_j \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0.$$

Для стационарной связи $\partial f_j / \partial t = 0$, и векторы ∇f_j и $\mathbf{v}$ ортогональны.

Дифференцирование по t уравнений неголономных связей дает равенства

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{y}_i}\ddot{y}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{z}_i}\ddot{z}_i \right) + \Phi_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0.$$

Обозначив

$$\dot{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{z}_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_N}, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}_N}, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{z}_N}\right)^T,$$

получим

$$\dot{\nabla}\varphi_k \cdot \mathbf{w} + \Phi_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0.$$

Для зависимых уравнений связей векторы

$$\nabla f_1, \ldots, \nabla f_g, \dot{\nabla}\varphi_1, \ldots, \dot{\nabla}\varphi_h \tag{7.2}$$

линейно зависимы. Так, например, для уравнений $f_1 = 0$ и $f_2 = f_1^2 = 0$ векторы ∇f_1 и $\nabla f_2 = \nabla f_1^2 = 2f_1\nabla f_1$ параллельны. В дальнейшем будем предполагать, что векторы (7.2) линейно независимы.

Система уравнений (7.1) относительно $3N$ неизвестных x_i, y_i, z_i должна иметь решения, т. е. быть совместной. Если число уравнений $l = g + h$ меньше числа неизвестных, то система может иметь бесчисленное множество решений. В этом случае возможно движение системы материальных точек, при котором координаты точек удовлетворяют уравнениям (7.1). Пусть уравнения (7.1) независимы. Тогда при $l > 3N$ система (7.1) не имеет решений, а при $l = 3N$ она может иметь только конечное число решений. В обоих случаях движение системы материальных точек невозможно, так как координаты ее точек либо не удовлетворяют уравнениям связи, либо имеют фиксированные значения. Следовательно, движение возможно только при условии $l < 3N$.

Рассмотрим пример, который показывает, что условие $l < 3N$ является необходимым, но не достаточным для существования бесчисленного множества решений системы (7.1). Пусть материальная точка M с координатами x, y и z находится на заданных расстояниях r_1 и r_2 от двух неподвижных точек A_1 и A_2. Уравнения связей имеют вид

$$f_k = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2 - r_k^2 = 0, \quad k = 1, 2, \tag{7.3}$$

где x_k, y_k и z_k — координаты точки A_k. Решениям уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ соответствуют точки, лежащие на сферах S_1, S_2 с радиусами r_1, r_2 и с центрами в точках A_1, A_2. Если расстояние r между этими точками больше, чем $r_1 + r_2$, то сферы не пересекаются, и система уравнений (7.3) не имеет решения. В случае $r = r_1 + r_2$ система (7.3) имеет единственное решение и только при $r < r_1 + r_2$ решений будет бесчисленное множество, и возможно движение точки по окружности, являющейся линией пересечения S_1 и S_2. В рассматриваемом случае $l = 2$, $N = 1$ и $l < 3N$, тем не менее система уравнений (7.1) может быть несовместной. В дальнейшем будем предполагать, что система уравнений (7.1) имеет бесчисленное множество решений. Это предположение выполняется только при условии $l < 3N$.

7.2. Идеальные связи уравнения Лагранжа первого рода

Обратная задача динамики.

Рассмотрим движение системы из N материальных точек с массами m_i при наличии g голономных и h неголономных связей, уравнения которых имеют вид

$$f_j(t, \mathbf{r}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g,$$
$$\varphi_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, h.$$

Будем искать решение обратной задачи динамики для случая $l = g + h < 3N$. Пусть заданы внешние силы $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Требуется найти закон движения системы $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$,

Проектирование уравнений второго закона Ньютона

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

на оси прямоугольной декартовой системы координат дает $3N$ скалярных уравнений:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz}.$$

Неизвестные $3N$ координат материальных точек должны удовлетворять этим $3N$ уравнениям и l уравнениям связей. Следовательно, в данной постановке при $l \neq 0$ задача оказывается неразрешимой. Неразрешимость поставленной задачи связана с наличием в несвободной системе сил $\mathbf{R}_i$, которые называются *реакциями связей.*

Реакции связей.

Рассмотрим движение математического маятника. Пусть материальная точка с массой m движется по окружности радиуса L под действием силы веса (рис. 7.2).

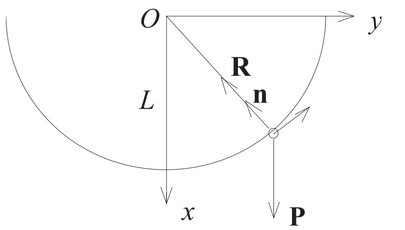

Рис. 7.2. Математический маятник.

Наряду с известной силой веса $\mathbf{P}$, на материальную точку с координатами x, y действует неизвестная сила реакции $\mathbf{R}$, обусловленная наличием связи, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = L^2$. Если физически связь реализована в виде нити, связывающей материальную точку с точкой O, то $\mathbf{R}$ — сила натяжения нити. Если связь возникла благодаря тому, что точка движется по цилиндрической поверхности, то $\mathbf{R}$ — сила, взаимодействия материальной точки с поверхностью. Силу $\mathbf{R}$ необходимо учитывать при составлении уравнений движения точки:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{R}.$$

В общем случае уравнения второго закона Ньютона для несвободной системы имеют вид

$$m_i\mathbf{w} = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Силы $\mathbf{F}_i$ заданы, а реакции связей $\mathbf{R}_i$ необходимо определить в процессе решения обратной задачи динамики. Спроектировав уравнения второго закона Ньютона на оси координат, получим систему скалярных уравнений

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + R_{ix}, \quad m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + R_{iy}, \quad m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + R_{iz}, \tag{7.4}$$

которая кроме $3N$ неизвестных координат x_i, y_i, z_i содержит $3N$ неизвестных проекций реакций связей R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}. Для определения $6N$ неизвестных функций имеется $3N + l$ уравнений, причем $3N + l < 6N$. Следовательно, учет реакций связи превратил неразрешимую задачу в задачу с бесчисленным множеством решений.

Для корректной постановки обратной задачи динамики оказываются недостаточными одни лишь геометрические свойства связей, которые выражаются уравнениями связей. Необходимо принимать во внимание физические свойства связей. Учет физических свойств связей позволяет получить недостающие $3N - l$ уравнений.

В задаче о движении математического маятника имеется три уравнения для определения четырех неизвестных функций x, y, R_x и R_y. Реакцию $\mathbf{R}$ представим в виде $\mathbf{R} = R_n\mathbf{n} + R_t\boldsymbol{\tau}$, где R_n и R_t — проекции вектора $\mathbf{R}$ на направления нормали и касательной к окружности. Если связь реализована в виде нити, то реакция направлена по нормали к окружности (см. рис. 7.2). В этом случае $R_t = 0$. Это равенство, полученное с учетом физических свойств связи, и является недостающим четвертым уравнением.

Пусть связь возникла благодаря тому, что точка движется по цилиндрической поверхности. Тогда при отсутствии сил трения снова имеет место равенство $R_t = 0$. При наличии силы трения в качестве четвертого уравнения можно использовать равенство $R_t = fR_n$, где f — коэффициент трения. В случае $R_t = 0$ рассматриваемая связь называется *идеальной*.

Идеальные связи.

Вернемся к исследованию общего случая движения несвободной системы материальных точек. Введем векторы

$$\mathbf{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nz})^T, \quad \mathbf{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots, R_{Nz})^T$$

и диагональную матрицу M порядка $3N$, элементы которой m_{ij} определяются по формулам

$$m_{3i-2\ 3i-2} = m_{3i-1\ 3i-1} = m_{3i\ 3i} = m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$
$$m_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Тогда систему $3N$ уравнений (7.4) можно записать в виде одного уравнения в пространстве E:

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Определим векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_l$ с помощью следующих формул:

$$\mathbf{e}_j = \nabla f_j, \quad j = 1, 2, \dots, g, \quad \mathbf{e}_{g+k} = \dot{\nabla}\varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, h.$$

Предполагается, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_l$ являются линейно независимыми.

Линейное подпространство E_c пространства E с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_l$ называется *пространством связей*. Множество векторов, ортогональных любому вектору из E_c, образуют подпространство E_t (ортогональное дополнение E_c), которое называется *касательным пространством* и имеет размерность $3N - l$.

Рассмотрим движение точки по поверхности, уравнение которой имеет вид $f(x, y, z) = 0$. В этом случае $N = 1$, $l = 1$, а вектор

$$\mathbf{e}_1 = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

направлен по нормали к поверхности (рис. 7.3). Пространство свя-

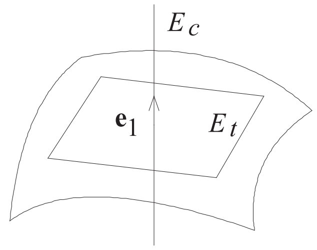

Рис. 7.3. Движение точки по поверхности.

зей E_c представляет собой прямую, ортогональную поверхности. Касательное пространство E_t является касательной плоскостью.

Вектор $\mathbf{R}$ можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_t, \quad \mathbf{R}_c \in E_c, \quad \mathbf{R}_t \in E_t.$$

Если $\mathbf{R}_t = 0$, то связи называются идеальными. В этом случае $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c \in E_c$, т. е. вектор $\mathbf{R}$ принадлежит пространству связей.

При движении точки по абсолютно гладкой поверхности реакция направлена по нормали к поверхности, поэтому $\mathbf{R}_t = 0$, и связь, описываемая уравнением $f(x, y, z) = 0$, является идеальной.

Другим важным примером идеальной связи является связь двух материальных точек с координатами x_i, y_i, z_i, сохраняющая расстояние L между ними. Уравнение связи в этом случае имеет вид

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L^2 = 0,$$

а реакциями связи являются силы взаимодействия точек $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, причем

$$\mathbf{R}_1 = 2\alpha\mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}_1 = \nabla f = 2(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T,$$
$$\mathbf{R} = 2\alpha(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)^T,$$

$\mathbf{R} = -\alpha\mathbf{e}_1$, т. е. вектор $\mathbf{R}$ принадлежит пространству связей E_c, поэтому связь является идеальной.

Векторы $\delta\mathbf{r}$, принадлежащие касательному пространству E_t, называются *возможными перемещениями.* Координаты вектора $\delta\mathbf{r}$ обозначим δx_1, δy_1, δz_1,..., δz_N. Трехмерные векторы

$$\delta\mathbf{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)^T$$

тоже называют возможными перемещениями.

Если связи идеальны, то $\mathbf{R}_t = 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c$ и для любого вектора $\delta\mathbf{r} \in E_t$ ввиду ортогональности векторов $\mathbf{R}_c$ и $\delta\mathbf{r}$ имеет место равенство

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = \mathbf{R}_c \cdot \delta\mathbf{r} = 0,$$

Справедливо и обратное, т. е. в том случае, когда $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ для любого вектора $\delta\mathbf{r} \in E_t$, связи идеальны. Действительно, если $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ для любого возможного перемещения $\delta\mathbf{r} \in E_t$, то вектор $\mathbf{R}$ принадлежит ортогональному дополнению касательного подпространства E_t, которым является пространство связей E_c. Следовательно, идеальные связи можно определить как такие связи, для которых вектор реакций $\mathbf{R}$ ортогонален любому возможному перемещению $\delta\mathbf{r}$.

Используя трехмерные векторы, равенство $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Уравнения движения.

В случае идеальности связей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c$, и уравнение движения имеет вид

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}_c.$$

Разложим вектор $\mathbf{R}_c \in E_c$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_l$ пространства E_c:

$$\mathbf{R}_c = \sum_{k=1}^{l} \Lambda_k \mathbf{e}_k$$

и подставим это разложение в уравнение движения. Проекции полученного таким способом уравнения

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^{l} \Lambda_k \mathbf{e}_k$$

называются *уравнениями Лагранжа первого рода*, а функции Λ_k — *множителями Лагранжа*.

Уравнения Лагранжа первого рода

$$\begin{gathered}
m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{j=1}^{g} \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{h} \Lambda_{g+k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{x}_i}, \\
m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{j=1}^{g} \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{h} \Lambda_{g+k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{y}_i}, \\
m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{j=1}^{g} \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{h} \Lambda_{g+k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{z}_i}, \\
i = 1, 2, \ldots, N
\end{gathered}$$

вместе с уравнениями связей (7.1) дают $3N + l$ уравнений для определения $3N$ неизвестных координат и l неизвестных множителей Лагранжа Λ_k.

Уравнения Лагранжа первого рода получены для случая идеальных связей, физические свойства которых характеризуются равенством $\mathbf{R}_t = 0$. Если связи не являются идеальными, что, в частности, возможно при наличии сил трения, то уравнения Лагранжа первого рода следует дополнить соотношениями, характеризующими физические свойства неидеальных связей.

7.3. Примеры использования уравнений Лагранжа первого рода

Пример 1.

Рассмотрим движение материальной точки с массой m под действием силы $\mathbf{F}$ по поверхности, заданной уравнением

$$f(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение является и уравнением связи. Пусть сила трения отсутствует. Тогда связь идеальна и движение описывается уравнением Лагранжа первого рода:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \Lambda\nabla f.$$

Вектор ∇f направлен по нормали к поверхности, поэтому единичная нормаль $\mathbf{n}_1 = \nabla f/|\nabla f|$. Введем обозначение $\lambda = \Lambda|\nabla f|$ и запишем уравнение Лагранжа в виде

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda\mathbf{n}_1.$$

Разложение ускорения $\mathbf{w}$ по осям трехгранника Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, имеет вид

$$\mathbf{w} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n},$$

где s — длина дуги траектории, R — радиус ее кривизны. Подставив выражение для $\mathbf{w}$ в уравнение Лагранжа и умножив уравнение на единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}_1$, получим три скалярных уравнения:

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho}\cos\vartheta = F_{n_1} + \lambda, \quad \frac{mv^2}{\rho}\sin\vartheta = F_{b_1},$$

где F_τ, F_{n_1} и F_{b_1} — проекции вектора $\mathbf{F}$, ϑ — угол между ортами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$.

Если движение точки по поверхности происходит по инерции, т. е. $\mathbf{F} = 0$, то уравнения принимают вид

$$m\ddot{s} = 0, \quad \frac{mv^2}{\rho}\cos\vartheta = \lambda, \quad \sin\vartheta = 0.$$

Движение по инерции происходит с постоянной по величине скоростью, так как $\dot{s} = const$. Из равенства $\sin\vartheta = 0$ следует, что $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$. Кривая на поверхности, у которой главная нормаль $\mathbf{n}$ параллельна нормали к поверхности, называется *геодезической.* На плоскости геодезическими линиями являются прямые, на сфере — большие круги, на цилиндре — винтовые линии, уравнения которых в цилиндрической системе координат имеют вид

$$Az + B\varphi + C = 0,$$

где A, B и C — постоянные. В частности, геодезическими на цилиндре являются его образующие ($A = 0$) и направляющие ($B = 0$). Кратчайшая дуга между двумя точками на поверхности проходит по геодезческой линии.

Петербург находится примерно на широте $\varphi = 60^o = \pi/3$. На $180^o = 2\varphi$ к западу от Петербурга почти на этой же широте лежит американский город Анкоридж. Если лететь из Петербурга в Анкоридж по шестидесятой параллели, радиус которой $r = R\cos\varphi = R/2$, где R — радиус Земли, то длина пути будет равна $\pi r = \pi R/2$. Длина дуги геодезической линии от Петербурга до Анкориджа, проходящей по меридиану через Северный полюс $(\pi - 2\varphi)R = \pi R/3$ гораздо меньше, особенно принимая во внимание, что R=6400 км.

Пример 2.

Рассмотрим движение в плоскости Oxy двух материальных точек M_1 и M_2, имеющих одинаковую массу m и соединенных нерастяжимым невесомым стержнем длиной L (рис. 7.4).

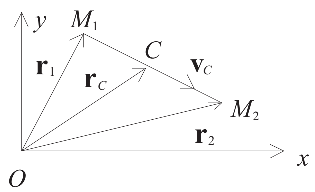

Рис. 7.4. Две материальные точки, соединенные стержнем.

Предположим, что центр стержня C имеет скорость $\mathbf{v}_c$, направленную вдоль стержня. Данная механическая система может рассматриваться как простейшая модель конька, скользящего по льду.

Уравнения двух связей, наложенных на систему, имеют вид

$$|\mathbf{r}| = L, \quad \mathbf{v}_c = \alpha\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ задают положения точек относительно начала координат.

Первая связь является голономной. Ее уравнение можно представить в виде

$$f = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2] = 0.$$

Проектируя векторное уравнение второй связи на оси координат, получим

$$\dot{x}_c = \alpha(x_2 - x_1), \quad \dot{y}_c = \alpha(y_2 - y_1),$$

где $x_c = (x_1 + x_2)/2$ и $y_c = (y_1 + y_2)/2$ — координаты точки C. Исключение α из двух последних уравнений дает равенство $\dot{x}_c(y_2 - y_1) = \dot{y}_c(x_2 - x_1)$. Следовательно, вторую связь можно задать уравнением

$$\varphi = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_2 - y_1) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_2 - x_1) = 0.$$

Система уравнений Лагранжа первого рода

$$m\ddot{x}_i = \Lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_i} + F_{ix}, \quad m\ddot{y}_i = \Lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y_i} + \Lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}_i} + F_{iy}, \quad i = 1, 2$$

после подстановки в нее выражений для функций f и φ принимает вид

$$\begin{gathered} m\ddot{x}_i = (-1)^i \Lambda_1 (x_2 - x_1) + \Lambda_2 (y_2 - y_1) + F_{ix}, \\ m\ddot{y}_i = (-1)^i \Lambda_1 (y_2 - y_1) - \Lambda_2 (x_2 - x_1) + F_{iy}, \\ i = 1, 2. \end{gathered}$$

Четыре уравнения Лагранжа первого рода и два уравнения связей содержат шесть неизвестных функций: x_1, y_1, x_2, y_2, Λ_1 и Λ_2.

7.4. Обобщенные координаты

Рассмотрим систему из N материальных точек, на которую наложено g голономных и h неголономных связей, уравнения которых имеют вид

$$\begin{gathered} f_j(t, \mathbf{r}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, g, \\ \varphi_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, h. \end{gathered}$$

Если неголономные связи отсуствуют ($h = 0$), то система будет голономной.

Число $n = 3N - g$, которое совпадает с числом независимых параметров, определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы материальных точек. Независимые параметры q_1, q_2,..., q_n, определяющие положение системы, называются *обобщенными координатами.*

Пусть расстояния между материальными точками не изменяются. Такую систему можно использовать как модель абсолютно твердого тела. Для системы из двух точек $n = 6 - 1 = 5$, для системы из трех точек $n = 9 - 3 = 6$. При добавлении к системе из трех точек каждой следующей точки добавляются три связи, так что число степеней свободы рассматриваемой системы для любого $N > 2$ будет равно шести. Это согласуется с доказанным в кинематике утверждением о том, что положение абсолютно твердого тела определяется шестью обобщенными координатами в качестве которых можно выбрать положение одной из точек твердого тела и три угла Эйлера.

Приведем еще несколько примеров введения обобщенных координат.

Пример 1. Математический маятник.

Рассмотрим движение материальной точки M в плоскости Oxy, при котором расстояние точки до начала координат не изменяется (рис. 7.5).

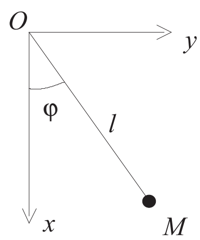

Рис. 7.5. Обобщенные координаты для математического маятника.

Уравнения связей имеют вид $z = 0$, $x^2 + y^2 = l^2$. Число степеней свободы $n = 1$. Если в качестве обобщенной координаты выбрать x, то координата y выражается через x по формуле $y = \pm\sqrt{l^2 - x^2}$. Выбрав за обобщенную координату угол φ между отрезком OM и осью Ox, получим более удобные формулы связи между декартовыми и обобщенной координатами:

$$x = l\cos\varphi, \quad y = l\sin\varphi.$$

И в том, и в другом случае, подстановка выражений для x и y в уравнение связи дает тождество.

Пример 2. Сферический маятник.

Предположим, что материальная точка движется по сфере радиуса R с центром в начале координат. В этом случае $n = 2$, а уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

В качестве обобщенных координат можно выбрать углы φ и ϑ, являющиеся сферическими координатами точки (рис 7.6).

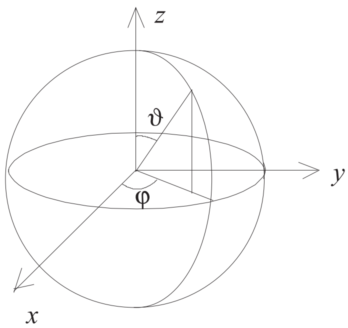

Рис. 7.6. Сферический маятник.

Подстановка в уравнение связи выражений декартовых координат через сферические

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\cos\vartheta$$

приводит к тождеству $R^2 = R^2$.

Уравнение связи задает в трехмерном пространстве сферическую поверхность. Выражения декартовых координат через обобщенные представляют собой параметрическое задание той же самой поверхности. Обобщенные координаты являются криволинейными координатами на сфере.

Пример 3.

Рассмотрим движение двух точек M_1 и M_2 в плоскости Oxy. Точки соединены нерастяжимой нитью длиной l, проходящей через маленькое колечко, расположенное в начале координат (рис 7.7).

Связь явлется неудерживающей. Предположим, что во все время движения она непряжена, т. е. нить натянута. Тогда число степеней свободы такой системы $n = 3$, а уравнение связи имеет вид

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = l,$$

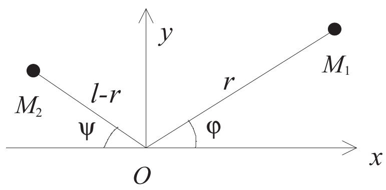

Рис. 7.7. Материальные точки, связанные нитью.

где x_k и y_k — координаты точки M_k. Выберем в качестве обобщенных координат длину r отрезка OM_1, угол φ между OM_1 и осью Ox и угол ψ между OM_2 и продолжением оси Ox. Подстановка

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi, \quad x_2 = -(l-r)\cos\psi, \quad y_2 = (l-r)\sin\psi$$

превращает уравнение связи в тождество.

В общем случае n независимых параметров q_1, q_2,…, q_n называются обобщенными координатами, если их задание определяет любое положение системы материальных точек, совместимое с голономными связями. Совместимость положения системы со связями означает, что соотношения

$$f_j(t, \mathbf{r}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \tag{7.5}$$

где векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ определяет зависимость декартовых координат от обобщенных, удовлетворяются тождественно при любых значениях $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Для одной и той же несвободной системы материальных точек в качестве обобщенных координат могут быть выбраны различные параметры. Обычно обобщенные координаты стремятся выбрать так, чтобы полученные с их помощью уравнения были как можно проще.

В случае стационарных связей $f_j(\mathbf{r}) = 0$ обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы зависимость декартовых координат от обобщенных не содержала времени t:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Уравнения голономных стационарных связей задают в пространстве E многообразие размерности n. Обобщенные координаты являются криволинейными координатами на этом многообразии.

Продифференцировав тождества (7.5) по переменным q_k, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=\nabla f_j\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}=0, \tag{7.6}$$

где $j=1,2,\dots g$, $k=1,2,\dots n$,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k},\frac{\partial y_1}{\partial q_k},\frac{\partial z_1}{\partial q_k},\dots,\frac{\partial z_N}{\partial q_k}\right)^T.$$

Равенство (7.6) означает, что векторы $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$, ортогональные всем векторам ∇f_j, принадлежат касательному пространству E_t.

Будем предполагать, что векторы $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ линейно независимы. В противном случае параметры q_1, q_2,..., q_n не являются обобщенными координатами в смысле данного ранее определения.

Проиллюстрируем последнее утверждение простым примером. Пусть уравнение связи, наложенной на материальную точку с координатами x, y, z, имеет вид

$$x+y+z=1.$$

Введем величины q_1 и q_2 по формулам

$$x=q_1+2q_2,\quad y=q_1+2q_2,\quad z=1-2q_1-4q_2. \tag{7.7}$$

Производные от вектора

$$\mathbf{r}=(q_1+2q_2)\mathbf{i}+(q_1+2q_2)\mathbf{j}+(1-2q_1-4q_2)\mathbf{k}$$

по q_1 и q_2

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$$

являются линейно зависимыми векторами.

Подстановка выражений (7.7) в уравнение связи дает тождество, однако, параметры q_1 и q_2 не являются обобщенными координатами, так они не задают все возможные положения материальной точки на плоскости $x+y+z=1$. Действительно, при любых значениях этих величин выполняется равенство $x=y$. В частности, ни при каких значениях q_1 и q_2 координаты точки M не могут иметь значения $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, удовлетворяющие уравнению связи.

Для голономной системы размерность $3N - l$ касательного пространства E_t равна числу степеней свободы n, так как общее число связей $l = g$ и $3N - l = 3N - g = n$. Следовательно, n линейно независимых векторов $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$ образуют базис пространства E_t, поэтому любое возможное перемещение $\delta\mathbf{r} \in E_t$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$:

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{7.8}$$

Величины δq_k называют вариациями обобщенных координат. Производные по времени $\dot{q}_k$ от обобщенных координат q_k называются *обобщенными скоростями.* Вектор $\mathbf{v}$ является линейной функцией обобщенных скоростей:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}. \tag{7.9}$$

В случае стационарных связей $\partial\mathbf{r}/\partial t = 0$. Вторые производные по времени от обобщенных координат $\ddot{q}_k$ называются *обобщенными ускорениями.*

7.5. Общее уравнение динамики

Умножим уравнения Лагранжа первого рода

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^{l} \Lambda_k \mathbf{e}_k$$

на вектор $\delta\mathbf{r} \in E_t$. В силу ортогональности векторов $\mathbf{e}_k \in E_c$ любому вектору касательного пространства $\delta\mathbf{r} \in E_t$ получим равенство

$$(\mathbf{F} - M\mathbf{w}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0,$$

которое называется *общим уравнением динамики.* Общее уравнение динамики для трехмерных векторов принимает вид

$$\sum_{i}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Для голономных систем общее уравнение динамики впервые появилось в известной книге Лагранжа "Аналитическая механика", первое издание которой вышло в 1788 году. Лагранж построил всю механику, исходя из общего уравнения динамики. Так, например, уравнения Лагранжа первого рода следуют из общего уравнения динамики. Действительно, из уравнений второго закона Ньютона $M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$ вытекает равенство $\mathbf{R} = M\mathbf{w} - \mathbf{F}$. Учитывая общее уравнение динамики, получаем, что $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$, т. е. $\mathbf{R} \in E_c$, поэтому вектор $\mathbf{R}$ можно разложит по базису пространства E_c:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{l} \Lambda_k \mathbf{e}_k.$$

Подставив последнее равенство в уравнения второго закона Ньютона, получим уравнения Лагранжа первого рода. Общее уравнение динамики для голономных систем называют также принципом Лагранжа-Даламбера.

Для неголономных систем общее уравнение динамики было получено независимо Сусловым и Журденом, поэтому его называют принципом Суслова-Журдена.

Недостатком уравнений Лагранжа первого рода является увеличение числа уравнений вместе с увеличением числа связей. С помощью общего уравнения динамики для голономной системы можно получить уравнения, число которых $n = 3N - g$ уменьшается с увеличением числа связей.

Введем обобщенные координаты q_1, q_2,..., q_n и подставим

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j$$

в общее уравнение динамики. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left[(\mathbf{F} - M\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Ввиду того, что $\delta\mathbf{r}$ — произвольный вектор из касательного пространства, его координаты δq_j можно выбрать так, чтобы одна из них, $\delta q_k = 1$, а остальные были равны нулю. Поэтому из последнего равенства вытекают n уравнений

$$(\mathbf{F} - M\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

описывающих движение голономной системы. Отметим, что в эти уравнения не входят реакции связей.

Пример 1.

Рассмотрим плоское движение прямой треугольной призмы массой m_1, скользящей по гладкой горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник ABC. Длина катета AB равна h, угол между отрезками CA и BC равен α. По отрезку BC движется без трения материальная точка M массой m_2 (рис. 7.8).

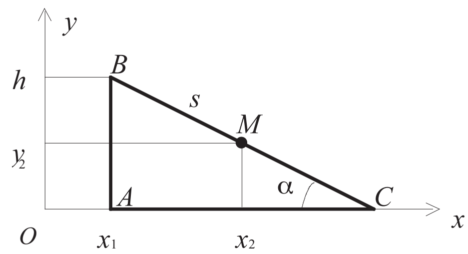

Рис. 7.8. Движение материальной точки по призме.

Направим ось Ox по отрезку AC, а ось Oy параллельно отрезку AB. Обозначим x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 координаты точек A и M. Ввиду того, что $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ и, следовательно, $\delta y_1 = \delta z_1 = \delta z_2 = 0$, общее уравнение динамики для рассматриваемой системы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2}[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{2y} - m_2\ddot{y}_2)\delta y_2 = 0,$$

где

$$F_{ix} = 0, \quad F_{2y} = -m_2 g, \quad i = 1, 2.$$

Положение призмы полностью определяется координатой x_1, а положение точки M относительно призмы — длиной s отрезка BM. Следовательно, рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем x_1 и s. Координаты x_2 и y_2 выражаются через x_1 и s по формулам

$$x_2 = x_1 + s\cos\alpha, \quad y_2 = h - s\sin\alpha. \tag{7.10}$$

Используя формулы (7.8) и (7.10), получаем

$$\delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial x_2}{\partial s}\delta s = \delta x_1 + \delta s\cos\alpha, \quad \delta y_2 = -\delta s\sin\alpha. \quad (7.11)$$

Отметим, что формулы (7.11) для вычисления возможных перемещений совпадают с формулами для вычисления полного дифференциала функции.

Продифференцировав соотношения (7.10) дважды по времени, подставим полученные выражения для $\ddot{x}_2$ и $\ddot{y}_2$, а также выражения (7.11) для δx_i, δy_i и δz_i в общее уравнение динамики:

$$m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{s}\cos\alpha)(\delta x_1 + \delta s\cos\alpha) +$$
$$+ m_2(-g + \ddot{s}\sin\alpha)\delta s\sin\alpha = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при вариациях обобщенных координат δx_1 и δs, получим два уравнения

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s}\cos\alpha = 0, \quad \ddot{x}_1\cos\alpha + \ddot{s} = g\sin\alpha,$$

описывающих движение рассматриваемой механической системы.

Если система материальных точек находится в положении равновесия, то $\mathbf{w} = 0$ и из общего уравнения динамики следует *принцип возможных перемещений*:

$$\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}$ называют возможной элементарной работой и обозначают δA. Пользуясь этим обозначением принцип возможных перемещений можно записать в виде

$$\delta A = 0.$$

Решение задач с помощью принципа возможных перемещений называют *аналитической статикой*. Принцип возможных перемещений удобно использовать в том случае, когда необходимо найти положение равновесия рассматриваемой механической системы.

Пример 2.

Найдем положение равновесия двух одинаковых однородных стержней OA и AB длиной $2l$, соединенных шарниром в точке A. Конец O первого стержня шарнирно закреплен, а к концу B второго стержня приложена горизонтальная сила величиной Q (рис. 7.9).

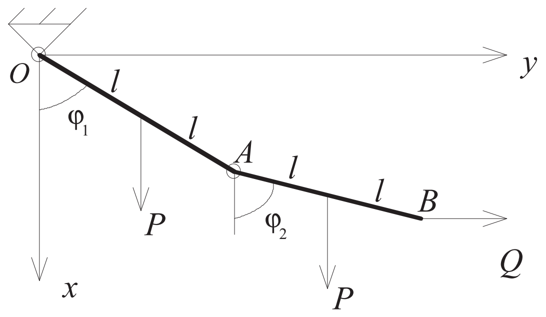

Рис. 7.9. Равновесие двух стержней.

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы, так как ее положение определяется заданием двух обобщенных координат — углов φ_1 и φ_2. Принцип возможных перемещений для данного примера имеет вид

$$\delta A = P\delta x_1 + P\delta x_2 + Q\delta y_3 = 0,$$

где координаты точек приложения сил x_1, x_2 и y_3 выражаются через обобщенные координаты по формулам

$$x_1 = l\cos\varphi_1, \quad x_2 = 2l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2, \quad y_3 = 2l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2).$$

Возможные перемещения связаны с вариациями обобщенных координат следующими соотношениями:

$$\delta x_1 = -l\sin\varphi_1\delta\varphi_1, \quad \delta x_2 = -2l\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l\sin\varphi_2\delta\varphi_2,$$
$$\delta y_3 = 2l(\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \cos\varphi_2\delta\varphi_2).$$

Подставим выражения для возможных перемещений в принцип возможных перемещений и приравняем нулю коэффициенты при вариациях обобщенных координат $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Для определения углов φ_1 и φ_2, соответствующих положению равновесия, получим два уравнения

$$-3Pl\sin\varphi_1 + 2Ql\cos\varphi_1 = 0, \quad -Pl\sin\varphi_2 + 2Ql\cos\varphi_2 = 0,$$

решения которых имеют вид

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2Q}{3P}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2Q}{P}.$$

Если для решения рассматриваемой задачи использовать уравнения равновесия двух стержней, то получится система шести уравнений (по три для каждого стержня) для определения шести неизвестных: углов φ_1 и φ_2, реакций X_O, Y_O в шарнире O и двух проекций на оси Ox и Oy силы взаимодействия стержней.

7.6. Уравнения Лагранжа второго рода

Рассмотрим голономную систему из N материальных точек, на которую наложено g голономных идеальных связей $f_k(t, \mathbf{r}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, g$. Уравнения Лагранжа первого рода для этой системы имеют вид

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^{g} \Lambda_k \mathbf{e}_k,$$

где векторы $\mathbf{e}_k = \nabla f_k$ образуют базис пространства связей E_c.

Рассматриваемая система имеет $n = 3N - g$ степеней свободы. Введем обобщенные координаты q_1, q_2, $\ldots$, q_n. Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \; \ldots \; , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n}$$

ортогональны векторам $\mathbf{e}_k$ и образуют базис касательного пространства E_t. Спроектируем уравнения Лагранжа первого рода на базис касательного пространства, умножив их скалярно на векторы $\partial \mathbf{r}/\partial q_j$. Получим n уравнений

$$M\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.12}$$

Величины

$$Q_j = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \tag{7.13}$$

стоящие в правой части уравнений (7.12), называют *обобщенными силами*. Для определения обобщенных сил можно воспользоваться равенством

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j, \tag{7.14}$$

которое означает, что обобщенные силы Q_j являются коэффициентами при вариациях обобщенных координат δq_j в выражении для возможной элементарной работы δA.

Преобразуем левые части уравнений (7.12), используя формулу

$$M\mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(M\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\right) - M\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \tag{7.15}$$

Продифференцировав по $\dot{q}_j$ выражение для скорости (7.9)

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \tag{7.16}$$

Дифференцирование выражения для скорости по переменной q_j дает равенство

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial t}.$$

В силу равенства смешанных производных

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j}. \tag{7.17}$$

Подставив (7.16) и (7.17) в (7.15), получим

$$M\mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(M\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j}\right) - M\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j}.$$

Выражение для кинетической энергии можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}.$$

Используя равенства

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(M\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = M\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(M\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = M\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j},$$

получим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7.18}$$

Уравнения уравнения Лагранжа второго рода (7.18) не являются уравнениями в частных производных, так как T — известная функция, а q_j — искомые решения. Покажем, что уравнения (7.18) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения.

Подставим выражение для скорости (7.9) в формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}M\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right).$$

После перемножения сумм, стоящих в правых частях последнего равенства, получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n}B_j\dot{q}_j + T_0,$$

где

$$A_{jk} = M\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \quad B_j = M\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad T_0 = \frac{1}{2}M\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Отметим, что $A_{jk} = A_{kj}$.

После введения обозначений

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{j=1}^{n}B_j\dot{q}_j$$

выражение для кинетической энергии принимает вид

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

В случае стационарных связей

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0, \quad T_1 = T_0 = 0, \quad T = T_2.$$

Подставив $T = T_2 + T_1 + T_0$ в уравнения Лагранжа (7.18), с учетом равенства

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\dot{q}_k + B_j$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\ddot{q}_k + \Phi_j(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (7.19)$$

Докажем, что

$$\det\left(A_{jk}\right) \neq 0.$$

Предположим, что $\det(A_{jk}) = 0$. В этом случае система однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jk}\xi_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

имеет нетривиальное решение $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Умножив k-е уравнение на ξ_k и сложив полученные равенства, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\xi_j\xi_k = M\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\right) = 0,$$

Из последнего равенства в виду положительности m_i следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0,$$

причем не все ξ_j равны нулю. Это противоречит линейной независимости векторов $\partial\mathbf{r}/\partial q_j$, поэтому $\det(A_{jk}) \neq 0$ и систему дифференциальных уравнений (7.19) можно разрешить относительно старших производных:

$$\ddot{q}_j = \Psi_j(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Общее решение полученной системы уравнений зависит от $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из $2n$ начальных условий

$$q_j(t_0) = q_j^0, \quad \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_j^0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

7.7. Примеры использования уравнений Лагранжа второго рода

Пример 1.

Рассмотрим движение по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости двух материальных точек с массами m_1 и m_2, связанных нерастяжимой нитью, проходящей через закрепленное на плоскости маленькое кольцо (см. рис. 7.7). Кинетическую энергию материальных точек

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

выразим через обобщенные координаты r, φ, ψ и их производные. Принимая во внимание, что

$$v_1^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad v_2^2 = \dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\psi}^2,$$

получаем

$$T = \frac{1}{2}[(m_1+m_2)\dot{r}^2 + m_1 r^2\dot{\varphi}^2 + m_2(l-r)^2\dot{\psi}^2].$$

В рассматриваемой задаче на точки действуют только силы веса $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, ортогональные возможным перемещениям точек $\delta\mathbf{r}_1$ и $\delta\mathbf{r}_2$, поэтому возможная элементарная работа

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = \mathbf{P}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что все обобщенные силы равны нулю.

Подставив выражение для кинетической энергии T в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = 0,$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\varphi}^2 + m_2(l-r)\dot{\psi}^2 = 0,\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \frac{d}{dt}[(l-r)^2\dot{\psi}] = 0.\end{gathered} \tag{7.20}$$

Найдем решение системы (7.20), удовлетворяющее начальным условиям

$$r = r_0, \quad \dot\varphi = v_0/r_0, \quad \varphi = \psi = \dot r = \dot\psi = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Из третьего уравнения (7.20) вытекает, что $\dot\psi = \psi = 0$. Следствием второго уравнения является равенство $r^2\dot\varphi = c = r_0 v_0$. Первое уравнение (7.20) принимает вид

$$\ddot r = \frac{\eta^2 c^2}{r^3}, \quad \eta^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Умножив обе части уравнения на dr, получим

$$\dot r d\dot r = \eta^2 c^2 dr/r^3.$$

Интегрирование последнего уравнения с учетом начальных условий $r(0) = r_0$, $\dot r(0) = 0$ дает равенство

$$\dot r^2 = \eta^2 c^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

из которого следует, что $r \geqslant r_0$. Следовательно,

$$\frac{dr}{dt} = \pm\eta c\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r r_0} = \pm\eta v_0\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}.$$

Решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $r(0) = r_0$, имеет вид

$$r^2 = r_0^2 + \eta^2 v_0^2 t^2. \tag{7.21}$$

Подставив выражение (7.21) в формулу $r^2\dot\varphi = r_0 v_0$, получим уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{1 + a^2\eta^2 t^2}, \quad a = \frac{v_0}{r_0},$$

решение которого, найденное с учетом начального условия $\varphi(0) = 0$, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\eta}\operatorname{arctg}(\eta a t).$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\operatorname{tg}(\eta\varphi) = \eta a t. \tag{7.22}$$

Траекторию движения точки массой m_1 найдем с помощью формул (7.21) и (7.22):

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + (\eta a t)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2(\eta\varphi) = \frac{1}{\cos^2(\eta\varphi)}.$$

Следовательно,

$$r = \frac{r_0}{\cos(\eta\varphi)}, \quad x_1 = r\cos\varphi = r_0\frac{\cos\varphi}{\cos(\eta\varphi)}, \quad y_1 = r\sin\varphi = r_0\frac{\sin\varphi}{\cos(\eta\varphi)}.$$

Если $\eta = 0$, т. е. $m_1 = 0$, то траекторией первой точки является окружность радиуса r_0 (рис. 7.10). В случае $\eta = 1$, когда $m_2 = 0$,

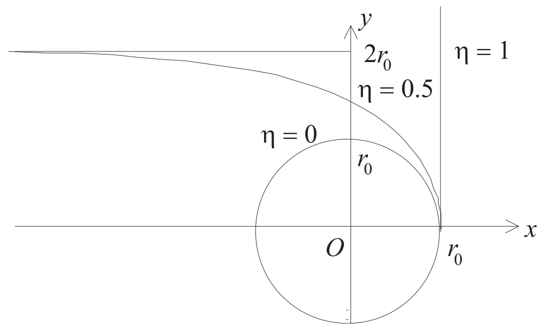

Рис. 7.10. Траектории движения для разных значений η.

точка движется по прямой $x = r_0$. Значениям η из интервала (0,1), соответствуют траектории, начинающиеся между окружностью и прямой. Одна из таких траекторий для $\eta = 0.5$ приведена на рис. 7.10. О наличии у этой кривой асимптоты $y = 2r_0$ свидетельствуют предельные соотношения $\varphi \to \pi$ при $t \to \infty$,

$$\lim_{\varphi\to\pi} x_1 = \lim_{\varphi\to\pi} r_0\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi/2)} = -\infty, \quad \lim_{\varphi\to\pi} y_1 = \lim_{\varphi\to\pi} r_0\frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi/2)} = 2r_0.$$

В общем случае $\varphi \to \pi/(2\eta)$, $r \to \infty$ при $t \to \infty$.

Пример 2. Двойной маятник.

Пусть материальная точка M_1 массой m_1 движется по окружности радиуса l_1 с началом в неподвижной точке O. Вторая материальная точка M_2 массой m_2 движется в той же плоскости по окружности радиуса l_2 с началом в точке M_1 (рис. 7.11). Механическая

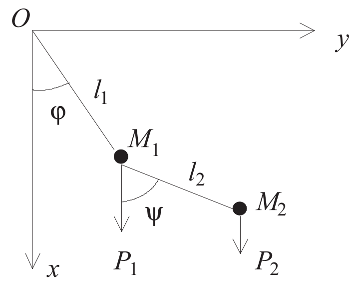

Рис. 7.11. Двойной маятник.

система, состоящая из двух таких точек, и находящаяся в однородном поле сил тяжести называется двойным маятником.

Физической моделью двойного маятника могут служить два шарика, один из который связан нерастяжимой нитью длиной l_1 с неподвижной опорой, а второй соединен с первым нерастяжимой нитью длиной l_2 . Предполагается, что во все время движения нити натянуты, а точки лежат в одной плоскости.

Ось Ox направим вертикально вниз, параллельно направлению сил веса P_1 и P_2, а ось Oy расположим в плоскости движения маятника. Двойной маятник имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы φ и ψ, образованные с осью Ox отрезками OM_1 и OM_2 (см. рис. 7.11).

Декартовы координаты (x_i, y_i) точек M_i, $i = 1, 2$ выражаются через обобщенные координаты по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos\varphi, \quad & x_2 &= l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi, \\ y_1 &= l_1 \sin\varphi, \quad & y_2 &= l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi. \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в формулу для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}[m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)]$$

дает выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}^2 + l_2^2\dot{\psi}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)].$$

Обобщенные силы можно найти по формулам (7.13):

$$Q_\varphi = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = P_1\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + P_2\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = -(P_1+P_2)l_1\sin\varphi,$$
$$Q_\psi = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = P_1\frac{\partial x_1}{\partial \psi} + P_2\frac{\partial x_2}{\partial \psi} = -P_2 l_2\sin\psi.$$

Другой способ определения Q_φ и Q_ψ основан на том, что в выражении для возможной элементарной работы

$$\delta A = P_1\delta x_1 + P_2\delta x_2 = -P_1 l_1\sin\varphi\delta\varphi - P_2(l_1\sin\varphi\delta\varphi + l_2\sin\psi\delta\psi)$$

эти обобщенные силы являются коэффициентами при $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ соответственно.

Подставив выражения для T, Q_φ и Q_ψ в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = Q_\psi$$

получим следующие уравнения движения двойного маятника

$$l_1\ddot\varphi + \alpha l_2[\cos(\varphi-\psi)\ddot\psi + \sin(\varphi-\psi)\dot\psi^2] = -g\sin\varphi,$$
$$l_2\ddot\psi + l_1[\cos(\varphi-\psi)\ddot\varphi - \sin(\varphi-\psi)\dot\varphi^2] = -g\sin\psi,$$

где $\alpha = m_2/(m_2+m_1)$.

7.8. Уравнения Аппеля

Рассмотрим систему из N материальных точек, на которую наложено g голономных и h неголономных идеальных связей. Уравнения связей имеют вид

$$f_j(t,\mathbf{r}) = 0, \quad j=1,2,\ldots,g, \qquad \varphi_k(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0, \quad k=1,2,\ldots,h.$$

Введем обобщенные координаты q_1, q_2, $\ldots$, q_n. Из формулы (7.9) следует, что вектор $\mathbf{v}$ зависит от обобщенных скоростей, поэтому обобщенные скорости $\dot q_1$, $\dot q_2$,…,$\dot q_n$ удовлетворяют h соотношениям

$$\varphi_k[t,\mathbf{r},\mathbf{v}(\dot q_1,\dot q_2,\ldots,\dot q_n)] = 0, \quad k=1,2,\ldots,h.$$

Подобно тому, как мы вводили обобщенные координаты, введем $m = n - h$ псевдоскоростей $\dot\pi_1$, $\dot\pi_2$,..., $\dot\pi_m$. Псевдоскорости выбираются так, чтобы при подстановке функций

$$\dot q_j = \dot q_j(\dot\pi_1, \dot\pi_2, \ldots, \dot\pi_m) \tag{7.23}$$

в уравнения неголономных связей, эти уравнения превращались в тождества

$$\varphi_k[t, \mathbf{r}, \mathbf{v}(\dot q_j(\dot\pi_1, \dot\pi_2, \ldots, \dot\pi_m))] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, h, \tag{7.24}$$

аналогичные тождествам (7.5). Дифференцирование тождеств (7.5) по обобщенным координатам q_j дало нам условия ортогональности (7.6). Дифференцируя тождество (7.24) по псевдоскоростям $\dot\pi_i$, получаем следующие условия ортогональности:

$$\dot\nabla\varphi_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot\pi_i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, h, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.25}$$

Из формул (7.9) и (7.23) вытекает, что

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot\pi_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot\pi_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot\pi_i},$$

Последнее равенство означает, что векторы $\partial\mathbf{v}/\partial\dot\pi_i$ являются линейными комбинациями векторов $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$, которые в силу (7.6) ортогональны векторам ∇f_j. Следовательно,

$$\nabla f_j \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot\pi_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, g, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.26}$$

Из условий (7.25) и (7.26) следует, что векторы $\partial\mathbf{v}/\partial\dot\pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ортогональны векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_l$, образующим базис пространства связей E_c, и, следовательно, принадлежат касательному пространству E_t размерности $3N - l = n - h = m$. Предположим, что векторы $\partial\mathbf{v}/\partial\dot\pi_i$ линейно независимы. Тогда они образуют базис касательного пространства E_t.

Для случая $N = 1$, $g = h = 1$ возможное расположение векторов $\partial\mathbf{v}/\partial\dot\pi_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial q_k$, $k = 1, 2$, ∇f_1 и $\dot\nabla\varphi_1$ приведено на рис. 7.12. Векторы $\mathbf{e}_1 = \nabla f_1$ и $\mathbf{e}_2 = \dot\nabla\varphi_1$ принадлежат пространству связей E_c, которое в рассматриваемом случае является плоскостью, вектор

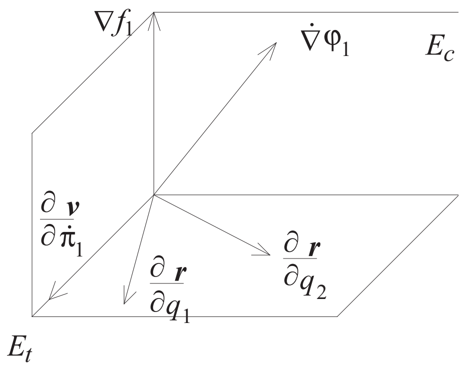

Рис. 7.12. Пространства E_c и E_t для случая $N = g = h = 1$.

$\partial \mathbf{v}/\partial \dot{\pi}_1$ параллелен прямой E_t, представляющей собой касательное пространство.

Уравнения Лагранжа первого рода

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^{l} \Lambda_k \mathbf{e}_k$$

спроектируем на векторы базиса пространства E_t, умножив их скалярно на $\partial \mathbf{v}/\partial \dot{\pi}_i$. Получим уравнения

$$M\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\pi}_i} = \Pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.27}$$

Функции Π_i в правой части этих уравнений представляют собой линейные комбинации обобщенных сил:

$$\Pi_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\pi}_i} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\pi}_i} = \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\pi}_i}.$$

Преобразуем левые части уравнений (7.27). Дифференцирование по времени формул (7.9) и (7.23) дает равенства

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \mathbf{\Phi}(t, q_k, \dot{q}_k), \quad \ddot{q}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\pi}_i} \ddot{\pi}_i.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\pi}_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\pi}_i},$$

поэтому уравнения (7.27) можно записать в следующем виде

$$M\mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Введем функцию

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i w_i^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{w}\cdot\mathbf{w},$$

которую называют энергией ускорений. Эта функция, в отличие от кинетической энергии T, не имеет физического смысла. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \frac{1}{2}\left(M\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}_i}\cdot\mathbf{w} + M\mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}_i}\right) = M\mathbf{w}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \ddot{\pi}_i},$$

уравнения (7.27) можно записать в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.28}$$

Уравнения (7.28) называют уравнениями Аппеля. Их число уменьшается с увеличением числа связей, однако уравнения Аппеля не содержат реакций связи.

Для голономной системы можно выбрать $\dot{\pi}_j = \dot{q}_j$. Тогда $\Pi_j = Q_j$ и уравнения Аппеля принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти уравнения имеют более компактный вид по сравнению с уравнениями Лагранжа второго рода, однако внешность обманчива, и вывод уравнений движения методом Лагранжа, обычно оказывается проще, чем вывод тех же уравнений методом Аппеля.

Аппель получил свои уравнения для голономных систем, однако они могут быть использованы и для описания движения неголономных систем, в то время как уравнения Лагранжа второго рода нельзя использовать при наличии неголономных связей.

7.9. Движение конька по наклонной плоскости

Применим уравнения Аппеля для описания скольжения конька по наклонной плоскости. В качестве механической модели конька используем систему из двух материальных точек, описанную в примере 2 из раздела 7.3. Пусть две материальные точки M_1 и M_2, расстояние между которыми во все время движения равно $2l$, движутся по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 7.13 a). Обе

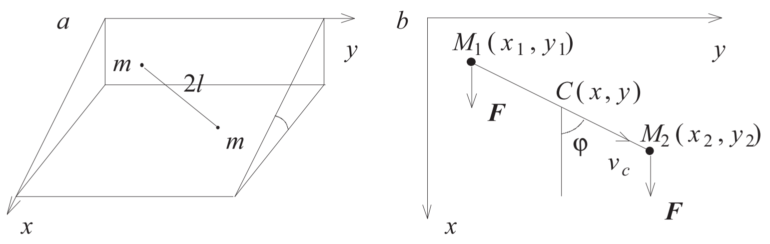

Рис. 7.13. Движение конька по наклонной плоскости.

точки имеют одинаковую массу m. Скорость $\mathbf{v}_c$ центра C отрезка M_1M_2 направлена по прямой, соединяющей точки M_1 и M_2 (рис. 7.13 b).

Введем на плоскости систему координат Oxy, показанную на рис. 7.13 a. В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты x, y точки C и угол φ, который отрезок M_1M_2 составляет с осью Ox. Условие, определяющее направление скорости $\mathbf{v}_c$, является неголономной связью и выражается равенствами

$$\dot{x} = v_c \cos\varphi, \quad \dot{y} = v_c \sin\varphi,$$

из которых вытекает уравнение связи

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

В качестве псевдоскоростей выберем $\dot{\pi} = v_c$ и $\dot{\varphi}$. Тогда подстановка в уравнение неголономной связи выражений

$$\dot{x} = \dot{\pi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = \dot{\pi}\sin\varphi, \tag{7.29}$$

для обобщенных скоростей дает тождество.

Уравнения Аппеля для рассматриваемой системы имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi_\pi, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = \Pi_\varphi.$$

Для того, чтобы получить уравнения движения, выразим функцию S, через обобщенные координаты, псевдоскорости и производные по времени от псевдоскоростей.

Координаты точек M_1 и M_2 связаны с обобщенными координатами следующими соотношениями

$$x_1 = x - l\cos\varphi, \quad y_1 = y - l\sin\varphi,$$
$$x_2 = x + l\cos\varphi, \quad y_2 = y + l\sin\varphi,$$

Продифференцируем эти равенства два раза по времени и подставим выражения для $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$ в формулу

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2).$$

Получим

$$S = m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + l^2\ddot{\varphi}^2 + l^2\dot{\varphi}^4).$$

Дифференцирование по переменной t равенств (7.29) дает формулы

$$\ddot{x} = \ddot{\pi}\cos\varphi - \dot{\pi}\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \ddot{y} = \ddot{\pi}\sin\varphi + \dot{\pi}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Подставим выражения для $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ в формулу для S. Тогда эта формула примет вид

$$S = m(\ddot{\pi}^2 + l^2\ddot{\varphi}^2 + \dot{\pi}^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\varphi}^4).$$

Для того, чтобы получить выражения для функций Π_π и Π_φ, найдем сначала обобщенные силы Q_x, Q_y и Q_φ. Возможная элементарная работа для рассматриваемой системы из двух материальных точек имеет вид

$$\delta A = F\delta x_1 + F\delta x_2,$$

где $F = mg\sin\alpha$ — проекция силы веса на наклонную плоскость (см. рис. 7.13). Используя выражения x_1 и x_2 через обобщенные координаты, получаем

$$\delta A = F(\delta x + l\sin\varphi\delta\varphi) + F(\delta x - l\sin\varphi\delta\varphi) = 2F\delta x.$$

Следовательно, $Q_x = 2F$, $Q_y = Q_\varphi = 0$,

$$\Pi_\pi = Q_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\pi}} = 2F\cos\varphi, \quad \Pi_\varphi = Q_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = 0.$$

Подстановка полученных выражений для функций S, Π_π и Π_φ в уравнения Аппеля дает уравнения

$$2m\ddot{\pi} = 2F\cos\varphi, \quad 2ml^2\ddot{\varphi} = 0,$$

из которых вытекает, что

$$\ddot{\pi} = g_1\cos\varphi, \quad \varphi = \omega t + \gamma,$$

где $g_1 = g\sin\alpha$, ω и γ — произвольные постоянные.

В разделе 7.3 для решения этой задачи использовались уравнения Лагранжа первого рода. Вместо двух уравнений Аппеля были получены шесть уравнений с шестью неизвестными.

Если $\omega = 0$, то $\varphi = \gamma$, и конек движется поступательно. При этом

$$\ddot{\pi} = g_1\cos\gamma, \quad \dot{\pi} = g_1 t\cos\gamma + v_0, \quad \dot{x} = \dot{\pi}\cos\gamma, \quad \dot{y} = \dot{\pi}\sin\gamma,$$

где v_0 — начальная скорость центра конька. Без ограничения общности можно считать, что $x(0) = y(0) = 0$. Тогда

$$x = \frac{g_1 t^2}{2}\cos^2\gamma + v_0 t\cos\gamma, \quad y = x\operatorname{tg}\gamma,$$

т. е. центр конька равноускоренно движется по прямой. Если $\alpha = 0$, то наклонная плоскость превращается в горизонтальную, величина g_1 обращается в нуль и движение по прямой становится равномерным.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. Тогда

$$\dot{\pi} = \frac{g_1}{\omega}\sin\varphi + v_0, \quad \dot{x} = \frac{g_1\sin 2\varphi}{2\omega} + v_0\cos\varphi,$$
$$\dot{y} = \frac{g_1(1-\cos 2\varphi)}{2\omega} + v_0\sin\varphi, \quad x = -\frac{g_1\cos 2\varphi}{4\omega^2} + \frac{v_0}{\omega}\sin\varphi + c_1,$$
$$y = \frac{g_1}{2\omega}t - \frac{g_1\sin 2\varphi}{4\omega^2} - \frac{v_0}{\omega}\cos\varphi + c_2,$$

где c_1 и c_2 находятся из начальных условий.

Рассмотрим движение по горизонтальной плоскости. В этом случае $g_1 = 0$,

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\varphi + c_1, \quad y = -\frac{v_0}{\omega}\cos\varphi + c_2.$$

Следовательно,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = (v_0/\omega)^2,$$

т. е. центр конька движется по окружности.

Если $\alpha \neq 0$, то движение конька имеет более сложный характер. Рассмотрим случай, когда $\varphi(0) = x(0) = y(0) = 0$. При этих предположениях формулы для координат центра конька x и y принимают вид

$$x = a(1 - \cos 2\varphi + b\sin\varphi), \quad y = a(2\varphi - \sin 2\varphi - b\cos\varphi + b),$$

где

$$\varphi = \omega t, \quad a = \frac{g_1}{4\omega^2}, \quad b = \frac{4v_0\omega}{g_1}.$$

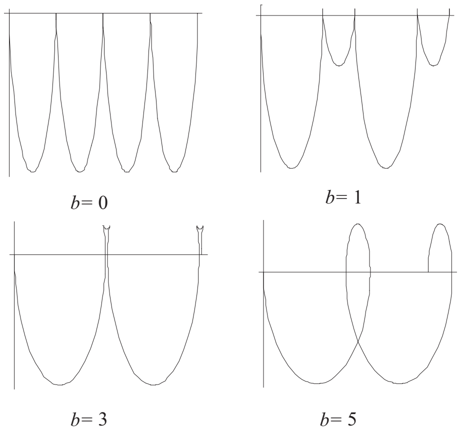

Рис. 7.14. Траектории движения центра конька.

Если $v_0 = 0$, то $b = 0$ и траектория движения центра конька представляет собой циклоиду. С увеличением b траектория движения центра конька меняется весьма своеобразно (рис. 7.14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. М., 1965.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М., 1960.
3. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М., 1992.
4. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. Л., 1985.

Оглавление