Глава 8

Движение голономной системы материальных точек в потенциальном поле

8.1. Функция Лагранжа. Интеграл энергии

Силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,... $\mathbf{F}_N$, действующие на систему из N материальных точек являются потенциальными, если

$$\mathbf{F} = -\nabla \Pi,$$

где $\mathbf{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \ldots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})^T$ — $3N$-мерный вектор, составленный из проекций сил, $\Pi = \Pi(t, \mathbf{r})$ — потенциальная энергия,

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1, \ldots, z_N)^T, \quad \nabla \Pi = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial z_N} \right)^T.$$

Пусть на систему материальных точек наложено g голономных связей, уравнения которых имеют вид

$$f_k(t, \mathbf{r}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, g.$$

Введем обобщенные координаты q_1, q_2, ..., q_n, где $n = 3N - g$. Тогда

$$\Pi = \Pi[t, \mathbf{r}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Предположим, что на систему действуют потенциальные и непотенциальные силы:

$$\mathbf{F} = -\nabla \Pi + \mathbf{F}^*,$$

где $\mathbf{F}^*$ — вектор непотенциальных сил. Учитывая, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \nabla \Pi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j},$$

для обобщенных сил получаем формулу

$$Q_j = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = -\nabla \Pi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^*,$$

где

$$Q_j^* = \mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}.$$

Если все силы потенциальны, то $Q_j^* = 0$. Подставив выражения для Q_j в уравнения Лагранжа второго рода, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^*, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ввиду того, что $\partial \Pi / \partial \dot{q}_j = 0$, эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*,$$

где функция $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа*. Уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

описывают движение системы материальных точек при отсутствии непотенциальных сил, т. е. движение в поле потенциальных сил (потенциальном поле).

Предположим, что на рассматриваемую систему материальных точек действуют потенциальные и непотенциальные силы, причем

1) связи стационарны,

2) потенциальная энергия зависит только от координат.

Тогда

$$\Pi = \Pi[\mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n)].$$

Уравнения Лагранжа первого рода

$$M\mathbf{w} = -\nabla \Pi + \mathbf{F}^* + \sum_{k=1}^{g} \Lambda_k \nabla f_k$$

умножим на вектор

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Ввиду ортогональности векторов ∇f_k и $\partial \mathbf{r}/\partial q_j$, получим

$$M\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = -\nabla \Pi \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \dot{x}_i \right) = \nabla \Pi \cdot \mathbf{v},$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = M\mathbf{w} \cdot \mathbf{v},$$

последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} = N^*.$$

Здесь $E = T + \Pi$ — полная механическая энергия, $N^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v}$ — мощность непотенциальных сил.

Если $N^* = 0$, то $dE/dt = 0$, и функция E является интегралом уравнений движения, который называется интегралом энергии. Равенство $E = \text{const}$ называется законом сохранения полной механической энергии.

Механическая система называется *консервативной* если для нее выполнены условия 1–2 и все действующие на нее силы потенциальны. Для консервативной системы $\mathbf{F}^* = 0$, $N^* = 0$, и, следовательно, имеет место закон сохранения полной механической энергии.

8.2. Гироскопические и диссипативные силы

Рассмотрим голономную систему материальных точек со стационарными связями. Силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Если на систему материальных точек действуют только потенциальные и гироскопические силы, то механическая энергия системы E не изменяется.

Сила Кориолиса $\mathbf{J_c} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_r})$ является гироскопической силой, так как ее мощность N_c равна нулю:

$$N_c = \mathbf{J_c} \cdot \mathbf{v_r} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_r}) \cdot \mathbf{v_r} = 0.$$

Мощность сил можно выразить через обобщенные силы и скорости по формуле

$$N = \mathbf{F} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j.$$

Если

$$N = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j = 0,$$

то обобщенные силы Q_j называются гироскопическими. Очевидно, что гироскопические силы Q_j зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}_j$. Рассмотрим важный частный случай, когда эта зависимость является линейной

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \dot{q}_k.$$

Тогда для любых значений $\dot{q}_j$

$$N = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0.$$

Следовательно, $\gamma_{jk} = -\gamma_{jk}$, $k \neq j$, $\gamma_{jj} = 0$, и матрица с коэффициентами γ_{jk} является кососимметричной.

Обобщенные силы называются *диссипативными*, если их мощность

$$N = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j \leqslant 0.$$

Пусть на систему материальных точек действуют только потенциальные и диссипативные силы. Тогда $dE/dt = N \leqslant 0$, и механическая энергия системы убывает.

Рассмотрим снова случай линейной зависимости Q_j от $\dot{q}_j$:

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{n} B_{jk} \dot{q}_j.$$

Тогда
$$N = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

Предположим, что $B_{jk} = B_{kj}$ и введем обозначение
$$R = -\frac{1}{2}N = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \geqslant 0.$$

Положительно определенная симметричная квадратичная форма R называется функцией Релея или диссипативной функцией. В силу условия $B_{jk} = B_{kj}$ справедливо равенство
$$Q_j = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}.$$

Пусть $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$, $\gamma > 0$, т. е. силы пропорциональны скоростям. Такие силы диссипативны, так как $N = \mathbf{F}\mathbf{v} = -\gamma v^2 \leqslant 0$. Функция Релея в этом случае имеет вид
$$R = \frac{\gamma}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{\gamma}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

Здесь
$$B_{jk} = \gamma\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k},$$
и равенство $B_{jk} = B_{kj}$ выполняется.

8.3. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона

Рассмотрим голономную систему материальных точек в потенциальном поле, движение которой описывается уравнениями Лагранжа
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad L = T - \Pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Обобщенными импульсами называются функции
$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{8.1}$$

Если в качестве q_j выбрать декартовы координаты точек $x_1, y_1, \ldots,$ то из равенства

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2 + \dot{z_1}^2 + ... + \dot{z_N}^2)$$

Следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x_1}} = m\dot{x_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y_1}} = m\dot{y_1}, \ldots,$$

т. е. обобщенные импульсы совпадают с проекциями количества движения системы

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_i}$$

на оси декартовой системы координат. Отметим, что из уравнений Лагранжа вытекает равенство

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \tag{8.2}$$

Координата q_j называется *циклической*, если

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

т. е. функция Лагранжа L не зависит от q_j. В этом случае $\dot{p}_j = 0$, поэтому обобщенный импульс, соответствующий циклической координате, является постоянной величиной.

Подставив в формулу для p_j выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} B_j\dot{q}_j + T_0,$$

получим выражение p_j через обобщенные скорости

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\dot{q_k} + B_j.$$

Ввиду того, что $\det\{A_{jk}\} \neq 0$, обобщенные скорости можно выразить через обобщенные импульсы:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(t, q_k, p_k), \quad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Переменные q_j и $\dot{q}_j$ называются переменными Лагранжа, а переменные q_j и p_j — переменными Гамильтона.

Введем функцию Гамильтона

$$H(t, q_k, p_k) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j(t, q_k, p_k) - L(t, q_j, \dot{q}_j(t, q_k, p_k)).$$

Дифференцирование $H(t, q_k, p_k)$ по переменным q_k, p_k с учетом формул (8.1) и (8.2) дает равенства

$$\begin{gathered}
\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \\
\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = \\
= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\dot{p}_k.
\end{gathered}$$

Систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

называют *уравнениями Гамильтона* или каноническими уравнениями. Такая система удобна как для численного интегрирования, так и для исследования общих вопросов механики.

Для стационарных связей $T = T_2$, и выполняется равенство

$$H(t, q_k, p_k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - \Pi) = 2T - T + \Pi = T + \Pi = E.$$

Следовательно, функция Гамильтона равна полной механической энергии. В этом случае с помощью уравнений Гамильтона легко получить интеграл энергии. Действительно, если потенциальная энергия не зависит от времени, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{p}_j \dot{q}_j) = 0,$$

т. е. $E = \mathrm{const}$.

Пусть функция $f(t, q_j, p_j)$ является интегралом уравнений Гамильтона, т. е. для любого решения уравнений Гамильтона $q_j(t)$, $p_j(t)$ имеет место тождество $f(t, q_j, p_j) = \text{const}$. Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0,$$

где выражение

$$\{f, H\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

называется *скобкой Пуассона* функций f и H.

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
2) $\{cf, g\} = c\{f, g\}$,
3) $\dfrac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \dfrac{\partial g}{\partial t} \right\}$,
4) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

Первые три свойства легко доказать, используя определение скобок Пуассона. Четвертое свойство носит название тождества Якоби. Его прямое доказательство требует громоздких символьных вычислений.

Теорема Пуассона.

Скобка Пуассона двух интегралов системы уравнений Гамильтона представляет собой интеграл этой системы.

Доказательство.

Пусть f и g — два интеграла системы уравнений Гамильтона. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0.$$

Из этих равенств и свойств скобок Пуассона следует, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} + \{\{f, g\}, H\} = \\
&= \{-\{f, H\}, g\} + \{f, -\{g, H\}\} + \{\{f, g\}, H\} = \\
&= \{\{f, g\}, H\} + \{\{g, H\}, f\} + \{\{H, f\}, g\} = 0.
\end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что функция $\{f, g\}$ является интегралом.

Для того, чтобы получить общее решение системы уравнений Гамильтона, достаточно найти $2n$ независимых интегралов этой системы. Предположим, что мы нашли m независимых интегралов, причем $m < 2n$. Составляя скобки Пуассона из известных интегралов в ряде случаев можно получить новые независимые интегралы.

8.4. Уравнения Рауса

Уравнения движения голономной системы в потенциальном поле можно записать как в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

так и в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Раус получил уравнения движения s из которых аналогичны уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial \dot{p}_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

а $n - s$ аналогичны уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0, \quad k = s+1, s+2, \ldots, n,$$

где R - функция Рауса, которая имеет вид

$$R = R(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_s, \dot{q}_{s+1}, \ldots, \dot{q_n}) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L.$$

Рассмотрим случай $n = 2$, $s = 1$. Выведем уравнения Рауса из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Положим

$$R = R(q_1, q_2, p_1, \dot q_2) = p_1 \dot q_1(q_1, q_2, p_1, \dot q_2) - L(q_1, q_2, \dot q_1(q_1, q_2, p_1, \dot q_2), \dot q_2)$$

Здесь $\dot q_1$ выражается через p_1 и $\dot q_2$ с помощью равенства

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = A_{11}(q_1, q_2)\dot q_1 + A_{12}(q_1, q_2)\dot q_2.$$

Принимая во внимание формулы

$$\begin{gathered}
\dot p_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_1} = \dot q_1 + p_1 \frac{\partial \dot q_1}{\partial p_1} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\frac{\partial \dot q_1}{\partial p_1} = \dot q_1, \\
\frac{\partial R}{\partial q_j} = p_1 \frac{\partial \dot q_1}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\frac{\partial \dot q_1}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \\
\frac{\partial R}{\partial \dot q_2} = p_1 \frac{\partial \dot q_1}{\partial \dot q_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\frac{\partial \dot q_1}{\partial \dot q_2} = -\frac{\partial L}{\partial \dot q_2},
\end{gathered}$$

получаем, что

$$\dot q_1 = \frac{\partial R}{\partial p_1}, \quad \dot p_1 = -\frac{\partial R}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_2} - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0.$$

Аналогичным образом можно вывести уравнения Рауса в общем случае.

Уравнения Рауса удобно использовать при наличии в системе циклических координат. Рассмотрим систему, имеющую s циклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Тогда, в силу равенств

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

из первых s уравнений Рауса следует, что

$$\dot p_j = 0, \quad p_j = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

где постоянные c_j определяются из начальных условий. Таким образом, функция Рауса зависит только от нециклических координат и их производных:

$$R = R(c_1, \ldots, c_s, q_{s+1}, \ldots, q_n, \dot q_{s+1}, \ldots, \dot q_n).$$

Следовательно, обобщенные координаты $q_{s+1}, \ldots, q_n$ можно найти, решив систему $n-s$ уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0, \quad j = s+1, \ldots, n.$$

После этого циклические координаты определяются путем интегрирования соотношений

$$\dot{q}_k = \frac{\partial R}{\partial c_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

правые части которых являются известными функциями времени.

При наличии в системе с n степенями свободы s циклических координат для нахождения функций $q_j(t)$ вместо решения системы дифференциальных уравнений порядка $2n$ достаточно решить систему уравнений порядка $2(n-s)$.

8.5. Движение точки по конической поверхности

Рассмотрим движение материальной точки массой m по поверхности конуса с углом полураствора α под действием силы тяжести (рис. 8.1).

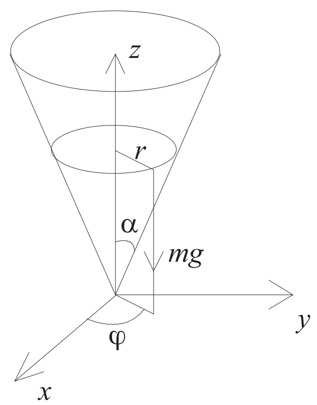

Рис. 8.1. Точка на конической поверхности.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z. Уравнение связи имеет вид

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

В качестве обобщенных координат возьмем r и φ и выразим кинетическую энергию T и потенциальную энергию Π через обобщенные координаты:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\varphi}^2\right), \quad \Pi = mgz = mgr \operatorname{ctg}\alpha.$$

Координата φ является циклической, так как функция Лагранжа $L = T - \Pi$ не зависит от φ. В связи с этим для описания движения точки по конической поверхности воспользуемся уравнениями Рауса. Принимая во внимание, что

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0, \tag{8.3}$$

где

$$R = p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{m\dot{r}^2}{2\sin^2\alpha} + mgr\operatorname{ctg}\alpha.$$

Учитывая, что $\dot{p}_\varphi = 0$, положим $p_\varphi = cm$, где c — постоянная. Отметим, что из равенства $p_\varphi = cm$ и первого из уравнений Рауса (8.3) следует формула

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{8.4}$$

Подставив выражение для p_φ в формулу для R, а R — в последнее из уравнений Рауса (8.3), получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0, \tag{8.5}$$

к интегрированию которого сводится решение рассматриваемой задачи. Умножим уравнение (8.5) на $\dot{r}$ и запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2}\sin^2\alpha + gr\sin\alpha\cos\alpha\right) = 0.$$

Их последнего равенства следует, что

$$\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\sin^2\alpha + gr\sin 2\alpha = h,$$

где $h \geqslant 0$ — произвольная постоянная. Умножим последнее равенство на r^2 и запишем его в виде

$$r^2\dot{r}^2 = F(r),$$

где

$$F(r) = -gr^3\sin 2\alpha + hr^2 - c^2\sin^2\alpha \geqslant 0.$$

Производная функции $F(r)$

$$F'(r) = -3gr^2\sin 2\alpha + 2hr$$

имеет два корня

$$r = 0, \quad r_* = \frac{2h}{3g\sin 2\alpha} > 0.$$

В точке $r = 0$ функция $F(r)$ имеет минимум, а в точке $r = r_*$ — максимум. Пусть $c \neq 0$. Тогда

$$F(0) = -c^2\sin^2\alpha < 0.$$

На рис. 8.2 изображен график функции $F(r)$ в случае $F(r_*) > 0$. Ввиду того, что $F(r) > 0$ только при $r_1 < r < r_2$, материальная

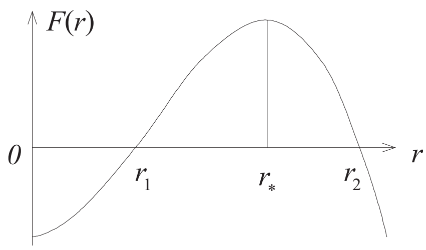

Рис. 8.2. График функции $F(r)$.

точка во все время ее движения по конусу будет находиться между окружностями $r = r_1$ и $r = r_2$. Радиусы этих окружностей зависят от начальных условий. Если $F(r_*) = 0$, то $r_1 = r_2$, и точка будет двигаться по окружности радиуса r_*.

В случае $c = 0$ из равенства (8.4) вытекает, что $\varphi = \mathrm{const}$. Это означает, что точка движется по образующей конуса.

Упражнение.

Пусть

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = v_0/r_0.$$

Показать, что $r_1 = r_2 = r_0$, если $gr_0 = v_0^2 \operatorname{tg} \alpha$.

8.6. Принцип Гамильтона

Для описания движения голономной системы материальных точек с n степенями свободы в потенциальном поле можно использовать уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Действием по Гамильтону называется интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_j, \dot{q}_j)\, dt.$$

Наборы функций $(q_1, \ \ldots, \ q_n)$, заданных в интервале $[t_1, t_2]$, можно рассматривать как элементы функционального пространства. Функционал W отображает элементы этого пространства в множество вещественных чисел. В частном случае, когда $q_i(t) = x_i$, где x_i — постоянные, не зависящие от времени, функционал представляет собой функцию многих переменных.

Если в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ функция n переменных f имеет экстремум, то в этой точке ее дифференциал $df = 0$. Дифференциал df представляет собой линейную часть приращения функции Δf:

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \cdots,$$

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

где dx_j — произвольные числа. Точки в которых $df = 0$ называются стационарными точками.

Приращение функционала W имеет вид

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} [L(t, q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j) - L(t, q_j, \dot{q}_j)] dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt + \cdots,$$

где δq_j — произвольные функции времени,

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d(\delta q_j)}{dt}.$$

Линейная часть приращения функционала

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \tag{8.6}$$

называется его первой вариацией. Если W имеет экстремальное значение на элементе функционального пространства $(q_1, \ldots, q_n)$, то для этого элемента $\delta W = 0$. Элементы функционального пространства, в которых $\delta W = 0$ называются стационарными точками функционала.

Решение уравнений Лагранжа q_1, …, q_n назовем действительным движением. Набор произвольных функций $\widetilde{q}_1$, …, $\widetilde{q}_n$, удовлетворяющих условиям

$$\widetilde{q}_k(t_1) = q_k(t_1), \quad \widetilde{q}_k(t_2) = q_k(t_2), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.7}$$

описывает некоторое совместимое со связями движение системы, которое называется кинематически возможным движением.

Принцип Гамильтона

Действительное движение является стационарной точкой функционала действия W, заданного на множестве кинематически возможных движений.

Доказательство

Положим $\widetilde{q}_j = q_j + \delta q_j$. Тогда из условия (8.7) вытекает, что

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0.$$

Интегрирование по частям в формуле (8.6) с учетом последнего равенства дает следующее выражение для первой вариации функционала действия

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \bigg|_{t_1}^{t_2} +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

Полученная формула показывает, что для действительного движения $q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющего уравнениям Лагранжа, имеет место равенство $\delta W = 0$. Это означает, что действительное движение является стационарной точкой функционала W.

Пусть теперь некоторый набор функций $q_1, \ldots, q_n$ является стационарной точкой функционала W. Тогда из равенства $\delta W = 0$ в силу произвольности функций δq_j следует, что q_j удовлетворяют уравнениям Лагранжа, т. е. $q_1, \ldots, q_n$ есть действительное движение.

Принцип Гамильтона применяется при выводе уравнений движения систем с распределенными параметрами и в неклассических областях механики.

Приведем еще одну формулировку принципа Гамильтона. Рассмотрим функционал

$$W_p = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H(t, q_k, p_k) \right] dt$$

заданный на множестве наборов функций $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, состоящих из обобщенных координат и обобщенных импульсов.

Решение $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

назовем действительным движением, а произвольный набор функций $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n$, удовлетворяющих условиям (8.7) — кинематически возможным движением.

Покажем, что действительное движение является стационарной точкой функционала W_p, заданного на множестве кинематически возможных движений. Для этого с помощью интегрирования по частям преобразуем выражение для первой вариации функционала:

$$\delta W_p = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{q}_j \delta p_j + p_j \frac{d}{dt} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt =$$
$$= p_j \delta q_j |_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt.$$

Учитывая, что в силу (8.7) $\delta q_j = \widetilde{q}_j - q_j = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$, получаем

$$\delta W_p = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt.$$

Очевидно, что для действительного движения $\delta W_p = 0$. Ввиду того, что δp_j и δq_j являются произвольными функциями, из равенства $\delta W_p = 0$ следуют уравнения Гамильтона.

8.7. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби

Для голономной системы в качестве обобщенных координат можно брать различные наборы функций, причем вид уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат. Таким образом, при преобразовании координат

$$\widetilde{q}_k = \widetilde{q}_k(q_j, t)$$

уравнения Лагранжа сохраняют вид. Следовательно, не изменят вид и уравнения Гамильтона

Для уравнений Гамильтона можно рассмотреть преобразования более общего вида

$$\widetilde{q}_k = \widetilde{q}_k(q_j, p_j, t), \quad \widetilde{p}_k = \widetilde{p}_k(q_j, p_j, t). \tag{8.8}$$

При таких преобразованиях уравнения Гамильтона, вообще говоря, не сохраняют вид. Может оказаться, что не существует такой функции $\widetilde{H}(t, \widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k)$, для которой

$$\dot{\widetilde{q}}_k = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}_k}, \quad \dot{\widetilde{p}}_k = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.9}$$

Если же существует функция $\widetilde{H}$ такая, что уравнения в новых переменных $\widetilde{q}_k$, $\widetilde{p}_k$ можно записать в виде (8.9), то преобразование (8.8) называется *каноническим.*

Из принципа Гамильтона следует, что

$$\delta W_p = 0, \quad W_p = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H \right) dt.$$

Преобразование (8.8) будет каноническим при условии

$$\delta \widetilde{W_p} = 0, \quad \widetilde{W_p} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{p}_j \dot{\widetilde{q}}_j - \widetilde{H} \right) dt.$$

В этом случае мы имеем равенство $\delta \widetilde{W_p} = \delta W_p$, из которого следует, что

$$W_p = \widetilde{W_p} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Если два интеграла отличаются на произвольную постоянную, то подынтегральные выражения отличаются на полную производную по времени от произвольной функции $S(t)$. Действительно, для любой функции $S(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dS = S(t_2) - S(t_1) = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{p}_j \dot{\widetilde{q}}_j - \widetilde{H} + \frac{dS}{dt}.$$

В качестве произвольной функции выберем $S(q_j, \widetilde{q}_j, t)$. Тогда из равенств

$$dS = \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{p}_j d\widetilde{q}_j + (\widetilde{H} - H) dt,$$
$$dS = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_j} d\widetilde{q}_j \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

вытекает, что

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \widetilde{p}_j = -\frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_j}, \quad \widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots n. \qquad (8.10)$$

Функция S называется производящей функцией канонического преобразования. Задавая различные функции S, мы будем получать разные канонические преобразования. Действительно, первые $2n$ равенств (8.10)

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(t, q_k, \widetilde{q}_k), \quad \widetilde{p}_j = -\frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}_j}(t, q_k, \widetilde{q}_k)$$

дают закон преобразования координат, так как из первых n можно найти $\widetilde{q}_j = \widetilde{q}_j(t, q_k, p_k)$, а после этого из вторых n определить $\widetilde{p}_j = \widetilde{p}_j(t, q_k, p_k)$. Для вычисления функции $\widetilde{H}$ используется третье равенство (8.10).

Пример

Пусть кинетическая и потенциальная энергии системы с одной степенью свободы определяются по формулам

$$T = \frac{\dot{q}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}.$$

Тогда

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \quad H = T + \Pi = \frac{1}{2}(p^2 + cq^2),$$

и уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -cq.$$

В качестве производящей функции возьмем $S = q\widetilde{q}$. Эта функция дает каноническое преобразование координат

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \widetilde{q}, \quad \widetilde{p} = -\frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}} = -q.$$

Уравнения в новых переменных

$$\dot{\widetilde{q}} = c\widetilde{p}, \quad \dot{\widetilde{p}} = -\widetilde{q}$$

можно записать в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{\widetilde{q}} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}}, \quad \dot{\widetilde{p}} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}}$$

с функцией

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H = \frac{1}{2}(p^2 + cq^2) = \frac{1}{2}(\tilde{q}^2 + c\tilde{p}^2).$$

Предположим, что функция S выбрана так, что $\widetilde{H} = 0$. В этом случае

$$H(t, q_j, p_j) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Учитывая, что $p_j = \partial S / \partial q_j$, получаем, что S является решением нелинейного уравнения в частных производных,

$$H\left(t, q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

которое называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Из формул (8.9) в случае $\widetilde{H} = 0$ следует, что $\widetilde{q}_j = \alpha_j$, $\widetilde{p}_j = \beta_j$, где α_j, β_j — произвольные постоянные. Подставив эти значения $\widetilde{q}_j$ и $\widetilde{p}_j$ во вторую формулу (8.10), получим равенства

$$\beta_j = -\frac{\partial S(t, q_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2 \ldots, n \tag{8.11}$$

с помощью которых можно найти q_j как функции времени и $2n$ произвольных постоянных α_j, β_j, если известно решение уравнения Гамильтона-Якоби $S = S(t, q_j, \alpha_j)$, зависящее от n произвольных постоянных α_j. После этого функции p_j находятся по первой формуле (8.10).

Следовательно, для определения общего решения уравнений Гамильтона достаточно найти решение уравнения Гамильтона-Якоби, зависящее от n произвольных постоянных. Такое решение называется *полным интегралом*.

Отметим, что решение уравнения в частных производных может зависеть от произвольных функций. Так, например, уравнение $\partial S / \partial q_1 = 0$ имеет решение $S = S_1(q_2, ..., q_n)$, где S_1 — произвольная функция.

Нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби $S = S(t, q_j, \alpha_j)$ представляет собой достаточно сложную задачу, однако в некоторых случаях её решение можно получить методом разделения переменных.

8.8. Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

Рассмотрим движение голономной системы в потенциальном поле. Пусть связи стационарны, $\partial \Pi / \partial t = 0$. Тогда $\partial H / \partial t = 0$, и уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Полный интеграл будем искать в виде

$$S = -\alpha_n t + V(q_k, \alpha_k),$$

где α_k - произвольные постоянные. Для V получаем уравнение

$$H\left(q_k, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = \alpha_n, \tag{8.12}$$

не содержащее переменной t.

Обозначим $V(q_k, \alpha_k)$ полный интеграл уравнения (8.12). Из формул (8.11) вытекают равенства

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = -\beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_n} = t - \beta_n, \tag{8.13}$$

которые позволяют определить q_j как функции t, α_j и β_j, если найден интеграл $V(q_k, \alpha_k)$.

Предположим, что одна из обобщенных координат q_j и производная $\partial V / \partial q_j$ входят в уравнение (8.12) в виде комбинации $f_j(q_j, \partial V / \partial q_j)$, не содержащей других координат и производных. В частности, если координата q_j является циклической, то $f_j = \partial V / \partial q_j$. Без ограничения общности можно считать, что $q_j = q_1$. Решение уравнения

$$H\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right] = \alpha_n \tag{8.14}$$

будем искать в виде

$$V = V_1(q_1) + V'(q_2, \dots, q_n).$$

Подставив это решение в уравнение (8.15) и положив

$$f_1\left(q_1, \frac{dV_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \tag{8.15}$$

мы получим уравнение

$$H(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial V'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V'}{\partial q_n}) = \alpha_n, \tag{8.16}$$

которое содержит $n-1$ независимую переменную.

Для того, чтобы найти V_1, надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (8.15). Предположим, что в уравнении (8.16) можно выделить комбинацию $f_2(q_2, \partial V/\partial q_2)$. Полагая

$$V' = V_2(q_2) + V''(q_3, \dots, q_n),$$

для определения V'' мы получим уравнение, содержащее $n-2$ независимых переменных, а для определения V_2 — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$f_2\left(q_2, \frac{dV_2}{dq_2}\right) = \alpha_2.$$

Описанный метод последовательного упрощения уравнения Гамильтона-Якоби называется разделением переменных. При переходе от уравнения Гамильтона-Якоби к уравнению (8.12) происходит отделение переменной t. На каждом следующем шаге число независимых переменных в уравнении (8.12) уменьшается на единицу.

Если процесс разделения переменных в уравнении (8.12) удается довести до конца, то нахождение полного интеграла $V(q_k, \alpha_k)$ этого уравнения сводится к решению n независимых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а сам полный интеграл имеет вид

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k.$$

Частным случаем разделения переменных является отделение циклической координаты q_j. Если $\partial H/\partial q_j = 0$, то $V_j = \alpha_j q_j$.

8.9. Движение точки под действием центральной силы

Используем уравнение Гамильтона-Якоби для решения задачи о движении материальной точки массы m под действием центральной силы $F(r)$. В качестве обобщенных координат возьмем сферические координаты точки r, ϑ, φ (рис. 8.3).

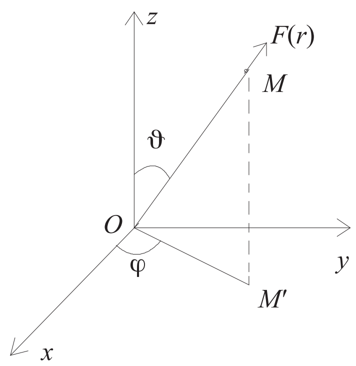

Рис. 8.3. Сферическая система координат .

Декартовы координаты точки x, y, z выражаются через ее сферические координаты по формулам

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Продифференцировав эти равенства по времени t и подставив полученные выражения в формулу для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta).$$

Отметим, что проекции скорости на оси сферической системы координат имеют вид

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\vartheta = r\dot{\vartheta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\vartheta.$$

Потенциальная энергия определяется по формуле

$$\Pi(r) = -\int F(r)dr.$$

Так, например, в случае силы всемирного тяготения $F(r) = -\gamma/r^2$ имеем $\Pi = -\gamma/r$.

Учитывая, что

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r, \quad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot\vartheta} = mr^2\dot\vartheta, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi\sin^2\vartheta,$$

получаем следующее выражение для фукции Гамильтона

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m}\left({p_r}^2 + \frac{{p_\vartheta}^2}{r^2} + \frac{{p_\varphi}^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + \Pi(r).$$

Функция H не зависит явным образом от t, поэтому для нахождения общего решения уравнений Гамильтона достаточно найти полный интеграл уравнения (8.12), которое для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \Pi(r) = \alpha_3. \quad (8.17)$$

Принимая во внимание, что φ — циклическая координата, полный интеграл ищем в виде

$$V = \alpha_1\varphi + V'(r,\vartheta).$$

Подстановка этого решения в (8.17) дает следующее уравнение для определения функции V'

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V'}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{{\alpha_1}^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right] + \Pi(r) = \alpha_3. \qquad (8.18)$$

Координата ϑ и производная $\partial V'/\partial\vartheta$ входят в уравнение (8.18) в виде комбинации

$$f = \left(\frac{\partial V'}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\vartheta},$$

поэтому решение уравнения можно представить в виде

$$V' = V_2(\vartheta) + V_3(r).$$

Положив
$$\left(\frac{dV_2}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\vartheta} = \alpha_2. \tag{8.19}$$
получим уравнение
$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dV_3}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{r^2}\right] + \Pi(r) = \alpha_3. \tag{8.20}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче процесс разделения переменных в уравнении (8.12) удалось довести до конца и свести задачу определения его полного интеграла к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений (8.19) и (8.20). Уравнения (8.19) и (8.20) имеют решения
$$V_2 = \int\sqrt{\alpha_2 - \frac{{\alpha_1}^2}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta, \quad V_3 = \int\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi) - \frac{\alpha_2}{r^2}}\,dr.$$

Формулы (8.13) для рассматриваемой задачи приобретают вид
$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2} = -\beta_2, \quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_3} = t - \beta_3.$$

Подставив в эти формулы полный интеграл уравнения (8.12)
$$V = \alpha_1\varphi + V_2(\vartheta) + V_3(r),$$
получим
$$\begin{gathered}
\varphi - \alpha_1\int\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2\sin^{-2}\vartheta}} = -\beta_1,\\
\frac{1}{2}\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2\sin^{-2}\vartheta}} - \frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi) - \alpha_2 r^{-2}}} = -\beta_2,\\
\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi) - \alpha_2 r^{-2}}} = t - \beta_3.
\end{gathered} \tag{8.21}$$

Сначала из третьего уравнения (8.21) находится $r(t)$, затем из второго — $\vartheta(t)$, а из первого — $\varphi(t)$. Таким образом, общее решение задачи о движении материальной точки под действием произвольной центральной силы получено в квадратурах.

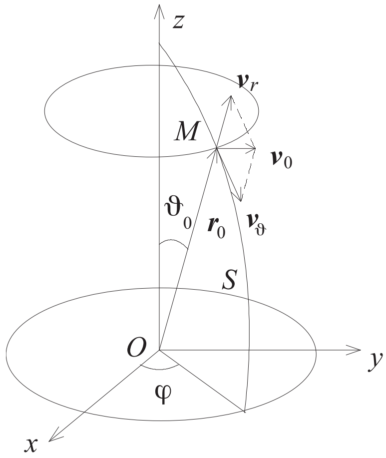

Рис. 8.4. Выбор оси Oz.

Формулы (8.21) упрощаются, если в качестве оси Oz взять луч, лежащий в плоскости S, проходящей через векторы $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ (рис. 8.4). В этом случае в момент времени $t = 0$ проекция скорости $v_\varphi(0) = r_0\dot{\varphi}\sin\vartheta_0 = 0$. Из первой формулы (8.10) следует, что

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \alpha_1,$$

поэтому

$$\alpha_1 = p_\varphi(0) = mr_0 v_\varphi(0)\sin\vartheta_0 = 0,$$

и из первого уравнения (8.21) вытекает, что $\varphi = -\beta_1$. Это означает, что во все время движения точка находится в плоскости S.

Второе уравнение (8.21) принимает вид

$$\frac{\vartheta}{2\sqrt{\alpha_2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi) - \alpha_2 r^{-2}}} = -\beta_2. \tag{8.22}$$

Оно определяет траекторию движения. Третье уравнение (8.21) не изменяется.

Пусть материальная точка движется под действием силы всемирного тяготения $F(r) = -\gamma/r^2$. Тогда $\Pi = -\gamma/r$, и уравнение (8.22) можно записать в виде

$$\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_3 + \gamma/r) - \alpha_2/r^{-2}}} = 2\sqrt{\alpha_2}\beta_2 + \vartheta.$$

Обозначим

$$\frac{2m\alpha_3}{\alpha_2} = c, \quad \frac{m\gamma}{\alpha_2} = k, \quad -2\sqrt{\alpha_2}\beta_2 = \beta, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Учитывая, что $du = -dr/r^2$, получаем следующее уравнение для определения траектории

$$\int \frac{du}{\sqrt{c + 2ku - u^2}} = \beta - \vartheta.$$

Вычислив входящий в него интеграл

$$\int \frac{d(u-k)}{\sqrt{k^2 + c - (u-k)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = -\arccos\frac{z}{a},$$

где $a^2 = k^2 + c$, $z = u - k$, запишем это уравнение в виде

$$u = k + a\cos(\vartheta - \beta).$$

После введения обозначений

$$p = \frac{1}{k}, \quad e = pa$$

уравнение принимает вид

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\vartheta - \beta)$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \beta)}.$$

Последняя формула показывает, что траекторией движения рассматриваемой точки является кривая второго порядка с эксцентриситетом e, зависящим от начальных условий. Этот же результат был получен в главе 6 с помощью формул Бине.

Оглавление