

## Глава 9

### Малые колебания

#### 9.1. Теорема Лангранжа об устойчивости положения равновесия

Рассмотрим систему из  $N$  материальных точек, на которую наложено  $g$  идеальных голономных стационарных связей. Пусть ее положение определяется с помощью  $n = 3N - g$  обобщенных координат  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Положение  $q_j = q_j^0$  называется положением равновесия, если из условий  $q_j(t_0) = q_j^0$  и  $\dot{q}_j(t_0) = 0$  следует, что  $q_j(t) = q_j^0$  при всех  $t > t_0$ . В этом случае  $\dot{q}_j(t) = 0$  при всех  $t > t_0$ , поэтому кинетическая энергия  $T = 0$  при  $t > t_0$ , и из уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

следует, что в положении равновесия обобщенные силы  $Q_j = 0$ . Без ограничения общности можно считать, что  $q_j^0 = 0$ , так как в противном случае можно ввести новые обобщенные координаты  $q'_j = q_j - q_j^0$ .

Положение равновесия  $q_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что при всех  $t > t_0$  выполняются неравенства

$$|q_j(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.1)$$

если при  $t = t_0$

$$|q_j(t_0)| < \delta, \quad |\dot{q}_j(t_0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

Геометрическая иллюстрация определения устойчивости на фазовой плоскости для случая  $n = 1$  дана на рис. 9.1. Неравенства (9.2) означают, что в начальный момент времени  $t = t_0$  фазовая

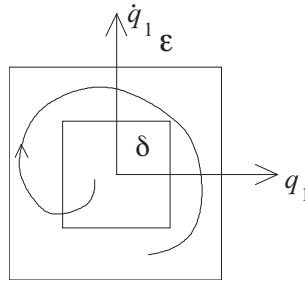


Рис. 9.1. Иллюстрация определения устойчивости.

точка с координатами  $(q_1, \dot{q}_1)$  находится внутри  $\delta$ -окрестности начала координат. В случае  $n = 1$   $\delta$ -окрестность начала координат представляет собой квадрат со стороной  $2\delta$  (см. рис. 9.1). Условия устойчивости (9.1) будут выполнены, если фазовая кривая никогда не выйдет за пределы  $\varepsilon$ -окрестности.

Предположим, что силы, действующие на рассматриваемую систему, потенциальны, т.е.

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

причем потенциальная энергия  $\Pi$  не зависит от времени. В этом случае система будет консервативной. Для консервативных систем выполняется закон сохранения механической энергии  $E = T + \Pi$ .

#### Теорема Лагранжа.

Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия.

**Доказательство**

Без ограничения общности можно предположить, что минимум достигается в начале координат, где все обобщенные координаты  $q_j$  равны нулю. Если  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  — потенциальная энергия, то функция  $\Pi + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, тоже является потенциальной энергией, поэтому будем считать, что  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ . Тогда по определению строгого минимума существует  $\Delta$  такое, что  $\Pi(0, \dots, 0) \geq 0$  при  $|q_j| < \Delta$ , причем равенство  $\Pi = 0$  имеет место только в начале координат. Ввиду того, что кинетическая энергия  $T$  в рассматриваемом случае является положительно определенной квадратичной формой, полная энергия  $E = T + \Pi$  при  $|q_j| < \Delta$  удовлетворяет неравенству  $E \geq 0$ , причем  $E = 0$  только в начале координат  $2n$ -мерного фазового пространства, т.е. при  $q_j = \dot{q}_j = 0, j = 1, \dots, n$ .

Пусть при  $t = t_0$  рассматриваемая система занимает положение, в котором ее потенциальная энергия имеет минимум, а скорости всех точек равны нулю. Тогда  $q_j = \dot{q}_j = 0$ , и следовательно,  $E = 0$ . Предположим, что система покинула занимаемое положение. Тогда ее полная энергия должна увеличиться, однако в силу закона сохранения энергии этого не может произойти. Тем самым доказано, что точка минимума потенциальной энергии является положением равновесия. Покажем теперь, что это положение равновесия устойчиво.

Пусть  $\varepsilon'$  — произвольное положительное число, причем  $\varepsilon' > \Delta$ . Если для  $\varepsilon < \Delta < \varepsilon'$  найдено  $\delta$ , которое обеспечивает выполнение условий устойчивости (9.1), то для этого  $\delta$  справедливы и неравенства

$$|q_j(t)| < \varepsilon', \quad |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon', \quad j = 1, \dots, n$$

Следовательно, при доказательстве устойчивости положения равновесия можно считать, что  $\varepsilon < \Delta$ .

Итак, выберем  $\varepsilon < \Delta$  и рассмотрим значения функции  $E$  на границе  $\varepsilon$ -окрестности начала координат фазового пространства. В случае  $n = 1$  эта граница образована четырьмя сторонами квадрата, каждая из которых имеет длину  $2\varepsilon$  (рис. 9.2). Непрерывная функция  $E(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

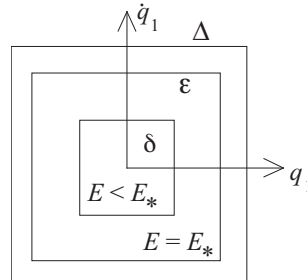


Рис. 9.2. Окрестности начала координат.

достигает на границе  $\varepsilon$ -окрестности своего минимального на ней значения  $E_*$ , причем  $E_* > 0$ , так как граница лежит внутри  $\Delta$ -окрестности, а равенство  $E = 0$  имеет место только в начале координат. Таким образом,  $E \geq E_* > 0$  для любой точки границы  $\varepsilon$ -окрестности.

Из непрерывности функции  $E$  и обращения ее в нуль в начале координат вытекает, что существует  $\delta$ -окрестность начала координат, в которой  $E < E_*$  (см. рис. 9.2). Если в момент времени  $t = t_0$  фазовая точка находится внутри  $\delta$ -окрестности, то ее полная механическая энергия  $E < E_*$ . В силу закона сохранения энергии неравенство  $E < E_*$  будет выполнено для любого  $t > t_0$ . В этом случае фазовая траектория не сможет выйти за пределы  $\varepsilon$ -окрестности. Действительно, предположим, что фазовая точка оказалась за пределами  $\varepsilon$ -окрестности. Тогда в некоторый момент времени  $t = t_*$  фазовая точка должна была пересечь границу этой окрестности. Однако это не может произойти, так как в этом случае оказалось бы, что  $E \geq E_*$  при  $t = t_*$ , а это противоречит условию  $E < E_*$  при  $t > t_0$ .

Следовательно, если в момент времени  $t = t_0$  фазовая точка находится внутри  $\delta$ -окрестности, то фазовая траектория не сможет выйти за пределы  $\varepsilon$ -окрестности. Это и означает, что положение равновесия  $q_j = 0, j = 1, \dots, n$  устойчиво. Теорема доказана.

**Замечание**

Теорема Лагранжа остается справедливой, если кроме потенциальных сил на систему действуют гироскопические или диссипативные силы. В первом случае выполняется закон сохранения энергии, во втором случае энергия  $E$  убывает, однако в обоих случаях  $E < E_*$  при  $t > t_0$ , если в

начальный момент времени фазовая точка лежит внутри выбранной при доказательстве теоремы  $\delta$ -окрестности.

## 9.2. Колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим консервативную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

где  $q$  — обобщенная координата, а  $T$  и  $\Pi$  кинетическая энергия и потенциальная энергии, причем

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad \Pi = \Pi(q).$$

Пусть  $q = 0$  соответствует положению равновесия. Тогда

$$\frac{d\Pi}{dq}(0) = 0,$$

Потенциальная энергия  $\Pi$  определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, поэтому без ограничения общности можно считать, что  $\Pi(0) = 0$ .

Разложим функции  $T$  и  $\Pi$  в ряды Тейлора в окрестности точки  $q = 0$ . Учитывая, что первые два члена в разложении функции  $\Pi$  равны нулю, получим

$$T = T_0 + \dots, \quad \Pi = \Pi_0 + \dots,$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2, \quad \Pi_0 = \frac{1}{2} c_0 q^2, \quad a_0 = A(0), \quad c_0 = \frac{d^2 \Pi}{dq^2}(0)$$

Предположим, что  $c_0 > 0$ . Тогда потенциальная энергия  $\Pi$  имеет минимум в точке  $q = 0$ , и из теоремы Лагранжа следует, что положение равновесия устойчиво. Пусть в начальный момент времени значения  $q$  и  $\dot{q}$  малы. Тогда в силу устойчивости положения равновесия они будут малы в любой другой момент времени, поэтому  $T \simeq T_0$ ,  $\Pi \simeq \Pi_0$ . Подставив приближенные значения  $T_0$  и  $\Pi_0$  кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа, получим уравнение малых колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a_0 \ddot{q} + c_0 q = 0.$$

Данное уравнение аналогично уравнению,

$$m \ddot{x} + cx = 0.$$

описывающему колебания груза массой  $m$  прикрепленного к пружине жесткости  $c$ . В связи с этим постоянную  $a_0$  называют *приведенной массой*, а величину  $c_0$  — *приведенной жесткостью*. Решение уравнения малых колебаний системы с одной степенью свободы имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $A$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные,  $\omega = \sqrt{c_0/a_0}$  частота колебаний. Если  $c_0 < 0$ , то положение равновесия оказывается неустойчивым, и малые колебания вблизи такого положения равновесия невозможны.

Пусть  $q = q_0$  — положение равновесия  $q' = q - q_0$ . Тогда

$$a_0 = A|_{q'=0} = A(q_0), \quad c_0 = \left. \frac{d^2 \Pi}{dq'^2} \right|_{q'=0} = \frac{d^2 \Pi}{dq^2}(q_0).$$

Этими формулами удобно пользоваться при решении задач, в которых положению равновесия соответствует ненулевое значение обобщенной координаты.

### Пример 1.

Рассмотрим цилиндр, вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 9.3) Центр тяжести цилиндра  $C$  находится на расстоянии  $a$  от оси вращения, радиус, мас-

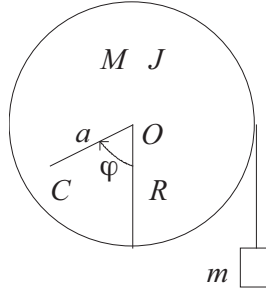


Рис. 9.3. Вращающийся цилиндр.

са и момент инерции цилиндра относительно оси вращения равны  $R$ ,  $M$  и  $J$ . На цилиндр намотана нить, к концу которой подвешен груз массой  $m$ .

Найдем положения равновесия цилиндра и исследуем их устойчивость. В качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$  между вертикалью и отрезком  $OC$ . Потенциальная энергия определяется по формуле

$$\Pi = -Mga \cos \varphi - mgR\varphi,$$

где первое и второе слагаемые определяют приращение потенциальной энергии за счет изменения положения центра тяжести цилиндра и груза соответственно. Приравняв нулю производную

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = Mga \sin \varphi - mgR,$$

для определения положений равновесия получаем следующее уравнение:

$$\sin \varphi = \frac{mR}{Ma}.$$

При  $mR/Ma > 1$  это уравнение не имеет решений. Предположим, что  $mR/Ma < 1$ . Тогда уравнение в интервале  $[0, 2\pi]$  имеет два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , причем

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{mR}{Ma}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1.$$

Этим корням уравнения соответствуют два положения равновесия. Для того, чтобы исследовать их устойчивость необходимо определить знак второй производной функции  $\Pi$  в точках  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Принимая во внимание, что

$$c(\varphi) = \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = Mga \cos \varphi,$$

получаем, что  $c(\varphi_1) > 0$ ,  $c(\varphi_2) < 0$ . Следовательно, положение равновесия  $\varphi = \varphi_1$  устойчиво.

Учитывая, что кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(J + mR^2)\dot{\varphi}^2,$$

находим приведенную массу  $a_0 = J + mR^2$ , которая в данном примере, в отличие от приведенной жесткости, не зависит от рассматриваемого положения равновесия. Частота колебаний вблизи положения равновесия  $\varphi = \varphi_1$  определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{c(\varphi_1)}{a_0}} = \sqrt{\frac{Mga \cos \varphi_1}{J + mR^2}}.$$

### Пример 2.

Найдем частоту колебаний механической системы, состоящей из двух невесомых стержней  $OB$  и  $OC$ , вращающихся вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 9.4). Угол между стержнями не изменяется. К концу  $C$  стержня  $OC$  прикреплен груз массой  $m$ . Конец  $B$  стержня  $OB$  соединен с неподвижной точкой  $A$  пружиной жесткости  $c$ , причем  $OA = OB = b$ . В положении равновесия, изображенном на рис. 9.4, стержень  $OB$  составляет угол  $\beta$  с вертикалью, а стержень  $OC$  длиной  $l$  расположен горизонтально.

За обобщенную координату  $\varphi$  примем угол поворота стержней вокруг точки  $O$  по часовой стрелке. Кинетическая энергия системы равна кинетической энергии груза и определяется по формуле

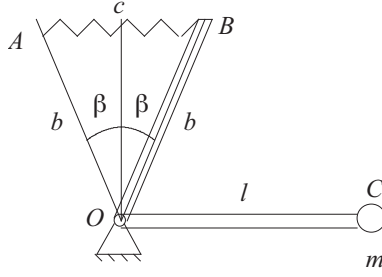


Рис. 9.4. Два стержня, соединенные под углом.

$T = ml^2\dot{\varphi}^2/2$ , поэтому приведенная масса  $a_0 = ml^2$ . Потенциальная энергия складывается из потенциальных энергий груза и пружины:

$$\Pi = -mgl \sin \varphi + \frac{1}{2}c(\delta + \Delta)^2,$$

где  $\delta$  — статическое удлинение пружины в положении равновесия,  $\Delta(\varphi)$  — дополнительное удлинение, вызванное поворотом стержня  $OB$  на угол  $\varphi$ , которое определяется по формуле

$$\Delta = 2b \sin \left( \beta + \frac{\varphi}{2} \right) - 2b \sin \beta.$$

Производная функции  $\Pi$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = -mgl \cos \varphi + c(\delta + \Delta)\Delta', \quad \Delta' = \frac{d\Delta}{d\varphi} = b \cos \left( \beta + \frac{\varphi}{2} \right)$$

обращается в нуль в положении равновесия при  $\varphi = 0$ :

$$\frac{d\Pi}{d\varphi}(0) = -mgl + c\delta b \cos \beta = 0.$$

Из последнего уравнения находится величина статического удлинения

$$\delta = \frac{mgl}{bc \cos \beta}.$$

Значение второй производной функции  $\Pi$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = mgl \sin \varphi + c\Delta'^2 + c(\delta + \Delta)\Delta'', \quad \Delta'' = -\frac{b}{2} \sin \left( \beta + \frac{\varphi}{2} \right)$$

в точке  $\varphi = 0$  представляет собой приведенную жесткость:

$$c_0 = \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}(0) = c \left( b^2 \cos^2 \beta - \frac{mgl}{2c} \operatorname{tg} \beta \right).$$

Если  $c_0 > 0$ , то положение равновесия  $\varphi = 0$  устойчиво и малые колебания вблизи этого положения равновесия происходят с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} = \sqrt{\frac{cb^2}{ml^2} \cos^2 \beta - \frac{g}{2l} \operatorname{tg} \beta}.$$

### 9.3. Уравнения колебаний системы с $n$ степенями свободы

Рассмотрим консервативную систему с  $n$  степенями свободы, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

где  $q_j$  — обобщенные координаты, а кинетическая энергия  $T$  является положительно определенной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad A_{jk} = A_{kj}.$$

Пусть начало координат  $q_1 = \dots = q_n = 0$  является положением равновесия. Тогда при  $q_1 = \dots = q_n = 0$

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Разложим функции  $T$  и  $\Pi$  в ряды по степеням  $q_j$  и  $\dot{q}_j$  в окрестности начала координат фазового пространства. Учитывая, что первые два члена в разложении функции  $\Pi$  равны нулю, получим

$$T = T_0 + \dots, \quad \Pi = \Pi_0 + \dots,$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \Pi_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k,$$

$$a_{jk} = A_{jk}(0, \dots, 0), \quad c_{jk} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0, \quad a_{jk} = a_{kj}, \quad c_{jk} = c_{kj}.$$

Квадратичная форма  $T_0$  положительно определена. Предположим, что  $\Pi_0$  тоже является положительно определенной квадратичной формой. Тогда потенциальная энергия  $\Pi$  имеет минимум в начале координат, и из теоремы Лагранжа следует, что положение равновесия устойчиво. Пусть в начальный момент времени значения обобщенных координат  $q_j$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$  малы. Тогда в силу устойчивости положения равновесия они будут малы в любой момент времени, поэтому  $T \simeq T_0$ ,  $\Pi \simeq \Pi_0$ . Подставив приближенные значения  $T_0$  и  $\Pi_0$  кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа, получим уравнения малых колебаний системы с  $n$  степенями свободы:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0. \quad (9.3)$$

Введем квадратные матрицы  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $C = \{c_{ij}\}$  порядка  $n$ , вектор  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  и запишем уравнения (9.3) в виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0. \quad (9.4)$$

Решения системы уравнений (9.4) будем искать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $\mathbf{u} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$  — постоянный вектор. После подстановки этого решения в систему (9.4) получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(C - \omega^2 A)\mathbf{u} = 0.$$

для определения координат  $r_j$  вектора  $\mathbf{u}$ . Эта система всегда имеет тривиальное решение  $\mathbf{u} = 0$ , соответствующее положению равновесия. Нетривиальные решения имеются только в том случае, когда

$$\det(C - \omega^2 A) = 0.$$

Обозначим  $\lambda = \omega^2$ . Уравнение

$$\det(C - \lambda A) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & \dots & c_{1n} - \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - \lambda a_{n1} & \dots & c_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется уравнением частот и представляет собой алгебраическое уравнение  $n$ -го порядка:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (9.5)$$

которое по основной теореме алгебры имеет  $n$  корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Докажем, что  $\lambda_k$  вещественные и положительные числа.

При доказательстве будем пользоваться следующим очевидным тождеством:

$$\mathbf{u}^T A \mathbf{u} = a(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} r_j r_k.$$

Аналогичное тождество дает связь между матрицей  $C$  и квадратичной формой  $c(\mathbf{u})$ :

$$\mathbf{u}^T C \mathbf{u} = c(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} r_j r_k.$$

Пусть  $\lambda$  — корень уравнения (9.5). Тогда система уравнений

$$C \mathbf{u} = \lambda A \mathbf{u}$$

имеет нетривиальное решение  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ , у которого вещественная  $\mathbf{v}$  и мнимая  $\mathbf{w}$  части вектора  $\mathbf{u}$  не могут быть равны нулю одновременно. Умножим последнее равенство слева на  $\mathbf{v}^T - i\mathbf{w}^T$ . Тогда

$$\lambda = \frac{(\mathbf{v}^T - i\mathbf{w}^T)C(\mathbf{v} + i\mathbf{w})}{(\mathbf{v}^T - i\mathbf{w}^T)A(\mathbf{v} + i\mathbf{w})}.$$

Из симметричности матрицы  $A$  вытекает, что  $\mathbf{w}^T A \mathbf{v} = \mathbf{v}^T A \mathbf{w}$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^T - i\mathbf{w}^T)A(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) &= \mathbf{v}^T A \mathbf{v} - i\mathbf{w}^T A \mathbf{v} + i\mathbf{v}^T A \mathbf{w} + \mathbf{w}^T A \mathbf{w} = \\ &= \mathbf{v}^T A \mathbf{v} + \mathbf{w}^T A \mathbf{w} = a(\mathbf{v}) + a(\mathbf{w}), \end{aligned}$$

Преобразовав выражение  $(\mathbf{v}^T - i\mathbf{w}^T)C(\mathbf{v} + i\mathbf{w})$  аналогичным образом, получим

$$\lambda = \frac{c(\mathbf{v}) + c(\mathbf{w})}{a(\mathbf{v}) + a(\mathbf{w})},$$

причем  $a(\mathbf{v}) + a(\mathbf{w}) \neq 0$ , так как  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  не равны нулю одновременно. Из положительной определенности квадратичных форм  $a$  и  $c$  следует, что  $\lambda > 0$ .

Корни уравнения (9.5) принято нумеровать в порядке их возрастания:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Величины  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  называются *частотами колебаний*. Система с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  частот колебаний

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n.$$

Решения  $\mathbf{u}_k$  системы уравнений

$$(C - \lambda_k A) \mathbf{u} = 0$$

называются *формами колебаний*. Если  $\mathbf{u}_k$  — форма колебаний, а  $\alpha$  — произвольная постоянная, то вектор  $\alpha \mathbf{u}_k$  тоже является формой колебаний. Таким образом, форма колебаний определяется с точностью до произвольного множителя.

Если решения  $\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k)$  линейно независимы, то общее решение системы уравнений малых колебаний (9.4) имеет вид

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где  $A_k$  и  $\alpha_k$  — произвольные постоянные, которые определяются по заданным начальным условиям. Для построения общего решения достаточно найти частоты и формы колебаний.

#### 9.4. Колебания двойного маятника

Рассмотрим двойной маятник, состоящий из двух материальных точек с массами  $m$  и двух абсолютно твердых невесомых стержней с длинами  $l$  (рис. 9.5).

Предположим, что движение происходит в плоскости, а в точках  $O$  и  $A$  имеются шарниры. Рассматриваемая система материальных точек называется двойным маятником и имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы  $\varphi$  и  $\psi$ . Для составления уравнений малых колебаний относительно устойчивого положения равновесия  $\varphi = \psi = 0$  воспользуемся полученными в разделе 7.7 формулами для кинетической и потенциальной энергии двойного маятника:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2l^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)],$$

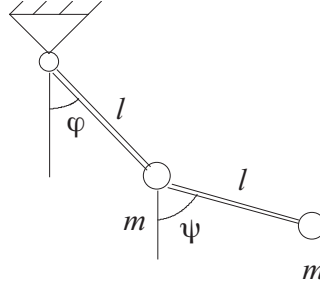


Рис. 9.5. Двойной маятник.

$$\Pi = -mgl \cos \varphi - mg(l \cos \varphi + l \cos \psi) + 3mgl.$$

Приближенные выражения для кинетической и потенциальной энергий имеют вид

$$T_0 = \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}), \quad \Pi_0 = \frac{1}{2}mgl(2\varphi^2 + \psi^2).$$

Следовательно

$$A = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = mgl \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений для определения форм колебаний

$$(C - \lambda A)\mathbf{u} = 0$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} (2k - 2\lambda)r_1 - \lambda r_2 &= 0, \\ -\lambda r_1 + (k - \lambda)r_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $k = g/l$ . Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\lambda^2 - 4k\lambda + 2k^2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$\lambda_1 = k(2 - \sqrt{2}), \quad \lambda_2 = k(2 + \sqrt{2}).$$

Координаты форм колебаний  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  находятся после подстановки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в систему линейных уравнений. Ввиду того, что при  $\lambda = \lambda_k$   $k = 1, 2$  определитель системы равен нулю, можно найти только отношение  $r_1/r_2$ , причем это отношение будет одним и тем же независимо от того, какое из двух уравнений используется для его определения.

При  $\lambda = \lambda_1$  из первого уравнения находим  $r_2 = \sqrt{2}r_1$ . В качестве первой формы колебаний можно взять вектор  $\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2})^T$ . При  $\lambda = \lambda_2$  получаем  $r_2 = -\sqrt{2}r_1$ . Следовательно, второй формой колебаний является вектор  $\mathbf{u}_2 = (1, -\sqrt{2})^T$ .

Общее решение задачи о колебаниях двойного маятника имеет вид

$$\mathbf{q}(t) = A_1\mathbf{u}_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\mathbf{u}_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  — произвольные постоянные,

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{k(2 - \sqrt{2})}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{k(2 + \sqrt{2})}.$$

Общее решение можно представить в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \psi &= A_1 \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Если начальные условия таковы, что  $A_2 = 0, A_1 \neq 0$ , то говорят, что колебания происходят по первой форме. Такие колебания имеют частоту  $\omega_1$ . При колебаниях по первой форме оба стержня отклоняются от положения равновесия в одну и ту же сторону, причем  $\psi = \sqrt{2}\varphi$ .

При  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  двойной маятник совершает колебания по второй форме с частотой  $\omega_2$ , стержни отклоняются от положения равновесия в разные стороны, а  $\psi = -\sqrt{2}\varphi$ .



Найдем начальные условия, соответствующие колебаниям по первой форме. При  $A_2 = 0$  имеют место формулы

$$\varphi(0) = A_1 \sin \alpha_1, \quad \psi(0) = A_1 \sqrt{2} \sin \alpha_1, \quad \dot{\varphi}(0) = A_1 \omega_1 \cos \alpha_1, \quad \dot{\psi}(0) = A_1 \sqrt{2} \omega_1 \cos \alpha_1$$

и, следовательно,  $\psi(0) = \sqrt{2}\varphi(0)$ ,  $\dot{\psi}(0) = \sqrt{2}\dot{\varphi}(0)$ . В частности, колебания по первой форме возникнут при

$$\psi(0) = \sqrt{2}\varphi(0), \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\varphi}(0).$$

Аналогичным образом можно найти начальные условия при которых колебания будут происходить по второй форме.

### 9.5. Ортогональность форм колебаний. Нормальные координаты

Два вектора  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  называются ортогональными, если их скалярное произведение  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  равно нулю. Пусть векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  принадлежат  $n$ -мерному евклидовому пространству  $\mathbf{E}^n$ , причем

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{e}_j,$$

где  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — базис пространства  $\mathbf{E}^n$ . Тогда выражение скалярного произведения через координаты векторов имеет вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) v_j w_k.$$

Выражение для скалярного произведения принимает привычный вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n v_j w_j$$

только в том случае, когда базис пространства  $\mathbf{E}^n$  является ортонормированным, т.е.  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ , где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Предположим, что координаты форм колебаний двойного маятника  $(1, \sqrt{2})^T$  и  $(1, -\sqrt{2})^T$  являются координатами векторов  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  относительно ортонормированного базиса. Тогда векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  не будут ортогональными, так как в этом случае  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = -1$ .

Ортогональность форм колебаний  $\mathbf{u}_j$ , как мы увидим в дальнейшем, позволяет существенно упростить решение различных задач теории колебаний, поэтому имеет смысл выбрать базис пространства  $\mathbf{E}^n$  таким образом, чтобы добиться выполнения равенств  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = 0$  при  $j \neq k$ .

Докажем, что формы колебаний, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, если  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = a_{jk}$ , где  $\mathbf{e}_j$  — векторы базиса,  $a_{jk}$  — элементы симметричной матрицы  $A$  из системы уравнений малых колебаний, которые одновременно являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы  $a$ . При таком выборе базиса формула для скалярного произведения приобретает вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} v_j w_k = \mathbf{v}^T A \mathbf{w} = \mathbf{w}^T A \mathbf{v}.$$

Пусть корням  $\lambda_j$  и  $\lambda_k$  уравнения (9.5) соответствуют формы колебаний  $\mathbf{u}_j$  и  $\mathbf{u}_k$ . Тогда

$$C \mathbf{u}_j = \lambda_j A \mathbf{u}_j, \quad C \mathbf{u}_k = \lambda_k A \mathbf{u}_k.$$

Второе равенство, умноженное слева на  $\mathbf{u}_j^T$ , вычтем из первого равенства, умноженного слева на  $\mathbf{u}_k^T$ . Получим

$$\mathbf{u}_k^T C \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^T C \mathbf{u}_k = (\lambda_j - \lambda_k)(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k).$$

Благодаря симметрии матрицы  $C$  левая часть полученного равенства обращается в нуль, поэтому из условия  $\lambda_j \neq \lambda_k$  следует, что  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = 0$ .

В частности, для двойного маятника

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^T A \mathbf{u}_2 = (1, \sqrt{2}) m l^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0.$$

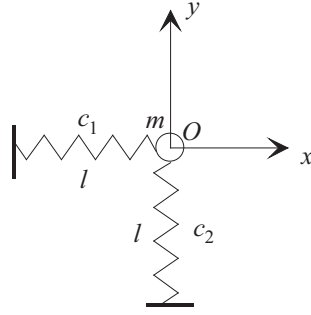


Рис. 9.6. Груз на перпендикулярных пружинах.

Если все корни уравнения (9.5) являются простыми, то формы колебаний будут ортогональными. Чтобы понять, как обстоит дело при наличии кратных корней, рассмотрим пример. Пусть две пружины, имеющие жесткости  $c_1$  и  $c_2$ , лежат в горизонтальной плоскости. В точке  $O$  соединения их концов расположен груз массы  $m$ , рассматриваемый как материальная точка, а свободные концы пружин заделаны. В недеформированном состоянии пружины перпендикулярны и имеют одинаковую длину  $l$ . Начало декартовой координат системы координат поместим в точку  $O$ , которая является положением равновесия груза, направив оси  $x$  и  $y$  вдоль первой и второй пружин (рис. 9.6).

Выбрав координаты груза  $x$  и  $y$  в качестве обобщенных координат, получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}[c_1(l_1 - l)^2 + c_2(l_2 - l)^2],$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — длины пружин после смещения груза в точку с координатами  $(x, y)$ . Рассматривая малые колебания, мы предполагаем, что малыми являются величины  $x$  и  $y$ . Пренебрегая второстепенными членами, получаем приближенные формулы

$$l_1 = \sqrt{(l+x)^2 + y^2} \simeq l\sqrt{1 + 2\frac{x}{l}} \simeq l + x, \quad l_2 = \sqrt{(l+y)^2 + x^2} \simeq l\sqrt{1 + 2\frac{y}{l}} \simeq l + y.$$

Следовательно,

$$T_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi_0 = \frac{1}{2}[c_1x^2 + c_2y^2],$$

и матрицы  $A$  и  $C$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений для определения частот и форм колебаний

$$(c_1 - \lambda m)r_1 = 0, \quad (c_2 - \lambda m)r_2 = 0 \tag{9.6}$$

имеет нетривиальные решения, если

$$(c_1 - \lambda m)(c_2 - \lambda m) = 0. \tag{9.7}$$

Корнями уравнения частот (9.7) являются  $\lambda_1 = c_1/m$  и  $\lambda_2 = c_2/m$ . Формы колебаний при  $c_1 \neq c_2$  определяются по формулам

$$\mathbf{u}_1 = (r_1, 0)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (0, r_2)^T,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — произвольные вещественные числа, и являются ортогональными векторами.

Предположим теперь, что  $c_1 = c_2$ . Тогда уравнение частот (9.7) принимает вид

$$(\lambda - c/m)^2 = 0,$$

а  $\lambda = c/m$  является кратным корнем этого уравнения. При  $\lambda = c/m$  нетривиальные решения системы (9.6) имеют вид  $\mathbf{u} = (r_1, r_2)^T$ , поэтому любой вектор двумерного пространства является формой колебаний. В частности, в качестве форм колебаний можно взять два ортогональных вектора  $\mathbf{u}_1 = (1, 0)^T$  и  $\mathbf{u}_2 = (0, 1)^T$ .

Если  $\lambda$  корень кратности  $m$  уравнения частот для системы с  $n$  степенями свободы, то соответствующие ему нетривиальные решения принадлежат подпространству размерности  $m$ . Выберем в этом подпространстве  $m$  ортогональных форм колебаний  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ . Эти формы будут ортогональны остальным формам колебаний, так как соответствуют разным собственным значениям. Таким образом, и при наличии кратных собственных значений существует ортогональная система собственных векторов.

Используем ортогональность форм колебаний для упрощения уравнений малых колебаний (9.3) с помощью введения так называемых нормальных координат.

Матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ , так как  $\det A \neq 0$ . Действительно, если  $\det A = 0$ , то существует вектор  $\mathbf{v} \neq 0$  такой что  $A\mathbf{v} = 0$ . Но тогда

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = a(\mathbf{v}) = 0,$$

что противоречит положительной определенности квадратичной формы  $a$ .

Умножив систему уравнений  $C\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u}$  на матрицу  $A^{-1}$  слева, получим эквивалентную систему

$$B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad B = A^{-1}C.$$

Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , для которых данная система имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями матрицы  $B$ , а формы колебаний  $\mathbf{u}_k$  — собственными векторами этой матрицы.

После умножения уравнения (9.4) на матрицу  $A^{-1}$  слева, оно принимает вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = 0. \quad (9.8)$$

Формы колебаний  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  ортогональны, и следовательно, образуют базис пространства  $\mathbf{E}^n$ . Любой вектор пространства  $\mathbf{E}^n$ , в том числе и вектор  $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + \dots + q_n\mathbf{e}_n$ , можно представить в виде разложения по векторам этого базиса:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t)\mathbf{u}_k. \quad (9.9)$$

Функции  $x_k(t)$  называются *нормальными координатами*.

Подставив (9.9) в уравнение (9.8) с учетом равенств  $B\mathbf{u}_k = \lambda_k\mathbf{u}_k$ , получим

$$\sum_{k=1}^n (\ddot{x}_k + \lambda_k x_k)\mathbf{u}_k = 0.$$

Скалярное умножения последнего соотношения на векторы  $\mathbf{u}_j$  дает систему из  $n$  независимых уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}_j + \lambda_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Решения этих уравнений

$$x_j = A_j \sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

где  $\omega_j^2 = \lambda_j$ , называются главными колебаниями. Подставляя выражения для  $x_j$  в формулу (9.9), получаем общее решение системы уравнений малых колебаний

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n A_k \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

найденное в разделе 9.3 другим способом.

Для двойного маятника из равенства

$$\mathbf{q} = \varphi\mathbf{e}_1 + \psi\mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = x_1(\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\mathbf{e}_2) + x_2(\mathbf{e}_1 - \sqrt{2}\mathbf{e}_2)$$

следует, что для перехода к нормальным координатам в уравнениях колебаний надо сделать замену переменных

$$\varphi = x_1 + x_2, \quad \psi = \sqrt{2}(x_1 - x_2).$$

Чтобы найти замену переменных (9.9), приводящую к нормальным координатам, надо определить формы колебаний. Однако в некоторых случаях эту замену можно угадать, используя симметрию задачи.

## 9.6. Экстремальные свойства частот

Рассмотрим малые колебания системы с  $n$  степенями свободы. Пусть  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  собственные значения матрицы  $B = A^{-1}C$ . Докажем, что для первой частоты колебаний  $\omega_1$  справедлива формула

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \min_{\mathbf{u}} R(\mathbf{u}), \quad (9.10)$$

где функция  $R(\mathbf{u}) = c(\mathbf{u})/a(\mathbf{u})$  называется отношением Релея.

Учитывая, что

$$a(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T A \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad c(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T C \mathbf{u} = \mathbf{u}^T A A^{-1} C \mathbf{u} = \mathbf{u}^T A B \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot B \mathbf{u},$$

отношение Релея  $R(\mathbf{u}) = B \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ .

Предположим, что  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  — ортогональные собственные векторы, соответствующие  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Эти векторы определяются с точностью до постоянного множителя, поэтому можно считать, что  $u_k = \|\mathbf{u}_k\| = 1$ . Тогда базис  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  пространства  $\mathbf{E}^n$  будет ортонормированным. Координаты векторов  $\mathbf{u}_j$  в этом базисе имеют вид

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_n = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

Если

$$\mathbf{u} = z_1 \mathbf{u}_1 + \dots + z_n \mathbf{u}_n,$$

то

$$a(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = z_1^2 + \dots + z_n^2, \quad c(\mathbf{u}) = B \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2.$$

Вследствие предположения  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  для отношения Релея справедливо неравенство

$$R(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2}{z_1^2 + \dots + z_n^2} \geq \frac{\lambda_1 (z_1^2 + \dots + z_n^2)}{z_1^2 + \dots + z_n^2} = \lambda_1.$$

С другой стороны,  $R(\mathbf{u}_1) = \lambda_1$ . Следовательно, формула (9.10) верна, причем минимум достигается при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ .

Если вектор  $\mathbf{u} = z_1 \mathbf{u}_1 + \dots + z_n \mathbf{u}_n$  ортогонален вектору  $\mathbf{u}_1$ , то  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 = z_1 = 0$ . Следовательно, для любого вектора  $\mathbf{u}$ , ортогонального  $\mathbf{u}_1$ , отношение Релея удовлетворяет неравенству

$$R(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2}{z_2^2 + \dots + z_n^2} \geq \lambda_2,$$

причем  $R(\mathbf{u}_2) = \lambda_2$ . Поэтому

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 = 0} R(\mathbf{u}).$$

Пусть теперь  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j = z_j = 0$  при  $j = 1, \dots, k-1$ .  $k > 1$ . Тогда

$$\mathbf{u} = z_k \mathbf{u}_k + \dots + z_n \mathbf{u}_n, \quad R(\mathbf{u}) \geq \lambda_k, \quad R(\mathbf{u}_k) = \lambda_k,$$

и частоты  $\omega_k$  при  $k \geq 2$  можно найти по формуле

$$\omega_k^2 = \lambda_k = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j = 0} R(\mathbf{u}), \quad j = 1, \dots, k-1, \quad k = 2, \dots, n. \quad (9.11)$$

Для случая  $n = 3$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  дадим геометрическую интерпретацию полученных результатов. Уравнение

$$c(\mathbf{u}) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 1$$

задает эллипсоид с полуосями  $a_k = 1/\sqrt{\lambda_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , изображенный на рис. 9.7.

Концы векторов, удовлетворяющих уравнению  $c(\mathbf{u}) = 1$ , лежат на эллипсоиде, поэтому

$$\max_{c(\mathbf{u})=1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \max_{c(\mathbf{u})=1} a(\mathbf{u}) = a_1^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\max_{c(\mathbf{u})=1} a(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}} \frac{a(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} = a_1^2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

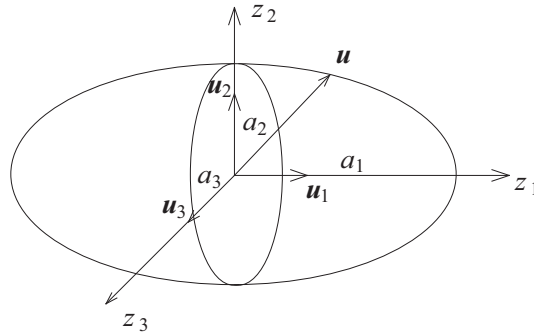


Рис. 9.7. Эллипсоид.

получаем формулу (9.10)

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{u}} \frac{c(\mathbf{u})}{a(\mathbf{u})} = \min_{\mathbf{u}} R(\mathbf{u}).$$

Как максимум, так и минимум достигаются при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ , где  $\mathbf{u}_1$  — собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1$  и совпадающий по направлению с наибольшей полуосью эллипсоида.

Концы векторов, удовлетворяющих условиям  $c(\mathbf{u}) = 1$  и  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ , лежат на эллипсе с полуосями  $a_2$  и  $a_3$  (см. рис. 9.7), причем  $a_2 > a_3$ , поэтому

$$\max_{c(\mathbf{u})=1, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1=0} a(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1=0} \frac{a(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} = a_2 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1=0} \frac{c(\mathbf{u})}{a(\mathbf{u})}.$$

Аналогичным образом получаем формулу для третьего собственного значения

$$\lambda_3 = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_k=0} \frac{c(\mathbf{u})}{a(\mathbf{u})}, \quad k = 1, 2.$$

### 9.7. Метод Релея

Метод Релея используется для приближенного вычисления первой (наименьшей) частоты. Начнем с примера. Отношение Релея для двойного маятника имеет вид

$$R(\mathbf{u}) = \frac{c(\mathbf{u})}{a(\mathbf{u})} = \frac{(2\varphi^2 + \psi^2)k}{2\varphi^2 + 2\varphi\psi + \psi^2}.$$

Функция  $R$  зависит только от одной переменной  $x = \psi/\varphi$ . Действительно, после деления числителя и знаменателя на  $\varphi^2$ , получим

$$R(\mathbf{u}) = \frac{(x^2 + 2)k}{x^2 + 2x + 2}.$$

Зависимость отношения Релея  $R$  от переменной  $x$  для  $k = 1$  приведена на рис. 9.8.

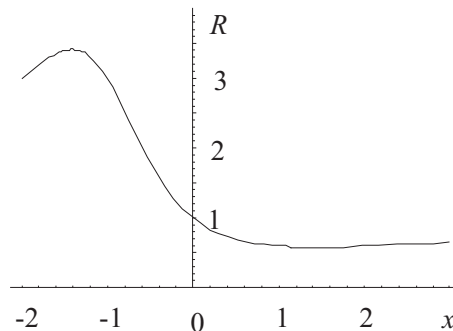


Рис. 9.8. График функции  $R(x)$ .

Если подставить в отношение Релея  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ , т.е. взять  $\varphi = 1$ ,  $\psi = \sqrt{2}$ ,  $x = \sqrt{2}$  (см. раздел 9,4), то

$$R(\mathbf{u}_1) = \frac{2k}{2 + \sqrt{2}} = k(2 - \sqrt{2}) = \lambda_1 \simeq 0.5858k.$$

Отношение Релея имеет минимум при  $x = \sqrt{2}$ . В окрестности минимума функция  $R$  меняется медленно, поэтому значение  $R(\mathbf{u})$  будет мало отличаться от  $\lambda_1$ , если направление вектора  $\mathbf{u}$  близко к направлению вектора  $\mathbf{u}_1$ , т.е.  $|x - \sqrt{2}|$  является малой величиной. Это обстоятельство позволяет получать приближенные значения  $\Lambda_1$  для  $\lambda_1$  в виде  $\Lambda_1 = R(\mathbf{u})$ . Приближенное значение  $\Lambda_1$  будет тем точнее, чем меньше величина  $|x - \sqrt{2}|$ , где  $x$  — отношение компонент вектора  $\mathbf{u}$ . Так, например, и при  $x = 1$ , и при  $x = 2$  отношение Релея  $R(\mathbf{u}) = \Lambda_1 = 0.6k$ , и погрешность приближенного значения по сравнению с точным значением  $\lambda_1 \simeq 0.5858k$  составляет всего 2.3%.

Приближенный метод определения первой частоты колебаний по формуле

$$\omega_1^2 = \lambda_1 \simeq \Lambda_1 = R(\mathbf{u}),$$

называется методом Релея и используется как для систем с конечным числом степеней свободы, так и для систем с распределенными параметрами, имеющими бесконечное число степеней свободы. В последнем случае в отношении Релея подставляют функцию или вектор-функцию. Метод Релея всегда дает оценку для первой частоты сверху, так как  $\lambda_1 \leq R(\mathbf{u}) = \Lambda_1$ .

Точность метода Релея зависит, главным образом, от удачного выбора вектора  $\mathbf{u}$ . Чаще всего в отношении Релея подставляют статический прогиб  $\mathbf{u}_s$ . Для того, чтобы оценить погрешность метода Релея в этом случае, рассмотрим колебания системы с двумя степенями свободы, изображенной на рис. 9.9. В качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  выберем отклонения верхнего и нижнего грузов

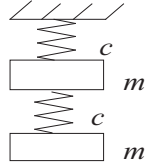


Рис. 9.9. Два груза, соединенные пружиной.

вниз от положения равновесия. Тогда кинетическую и потенциальную энергии можно записать в виде

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = -mg(q_1 + q_2) + \frac{c}{2}(\delta_1 + q_1)^2 + \frac{c}{2}(\delta_2 + q_2 - q_1)^2,$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  растяжения верхней и нижней пружин в положении равновесия. Для определения этих величин, примем во внимание, что в положении равновесия, т.е. при  $q_1 = q_2 = 0$ , частные производные функции  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -gm + c(\delta_1 + q_1) - c(\delta_2 + q_2 - q_1), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -gm + c(\delta_2 + q_2 - q_1)$$

обращаются в нуль:

$$c(\delta_1 - \delta_2) - gm = 0, \quad c\delta_2 - gm = 0.$$

Следовательно,  $\delta_1 = 2mg/c$ ,  $\delta_2 = mg/c$ . Смещения грузов, обусловленные статическими растяжениями пружин, составляют

$$q_{1s} = \delta_1 = \frac{2mg}{c}, \quad q_{2s} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3mg}{c},$$

а статический прогиб

$$\mathbf{u}_s = (q_{1s}, q_{2s})^T = \frac{mg}{c}(2, 3)^T.$$

Из формулы для кинетической энергии  $T$  вытекает, что коэффициенты квадратичной формы  $a$  имеют вид  $a_{11} = a_{22} = m$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Для коэффициентов квадратичной формы  $c$  получаем следующие формулы:

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 = 2c, \quad c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0 = c, \quad c_{12} = c_{21} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = -c.$$

Подстановка вектора  $\mathbf{u}_s$  в отношение Релея

$$R(\mathbf{u}) = \frac{2r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}k, \quad k = \frac{c}{m}$$

дает следующее приближенное значение для первого собственного значения:

$$\Lambda_1 = R(\mathbf{u}_s) = \frac{5}{13}k \simeq 0.385k.$$

Сравним  $\Lambda_1$  с точным значением  $\lambda_1$ . Уравнение для определения собственных значений имеет вид

$$\det(C - \lambda A) = 0.$$

Для рассматриваемого примера

$$\det(C - \lambda A) = \begin{vmatrix} 2c - \lambda m & -c \\ -c & c - \lambda m \end{vmatrix} = m^2(\lambda^2 - 3k\lambda + k^2).$$

Меньший корень квадратного уравнения  $\lambda^2 - 3k\lambda + k^2 = 0$  равен

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}k \simeq 0.382k.$$

Таким образом, погрешность метода Релея в рассматриваемом случае составляет 0.8%.

### 9.8. Колебания при наличии связи

Наложим на двойной маятник, описанный в разделе 9.4, связь  $\varphi = \psi$ . Тогда он превращается в систему с одной степенью свободы, а его положение определяется одной обобщенной координатой  $\varphi$  (рис. 9.10). Выражения для кинетической и потенциальной энергии принимают вид

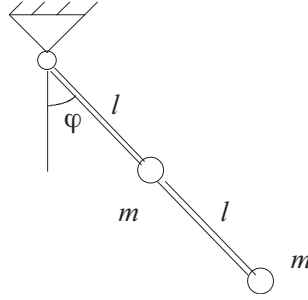


Рис. 9.10. Двойной маятник при наличии связи.

$$T = \frac{1}{2}[ml^2 + m(2l)^2]\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi - 2mgl \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$T_0 = T = \frac{5}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi_0 = \frac{3}{2}mgl\varphi^2, \quad a_0 = 5ml^2, \quad c_0 = 3mgl.$$

Частота системы с одной степенью свободы определяется по формуле

$$\tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\lambda}_1 = c_0/a_0 = 0.6k, \quad k = g/l.$$

Выражение для  $\tilde{\lambda}_1$  можно получить другим способом. При  $\varphi = \psi$  отношение Релея для двойного маятника

$$R = \frac{(2\varphi^2 + \psi^2)k}{2\varphi^2 + 2\varphi\psi + \psi^2}$$

превращается в отношение Релея для маятника со связью

$$R = \tilde{R} = \frac{3k}{5}.$$

Используя вариационное определение для  $\tilde{\lambda}_1$ , получаем

$$\tilde{\lambda}_1 = \min \tilde{R} = \tilde{R} = 3k/5.$$

Отметим, что собственное значение  $\tilde{\lambda}_1 = 0.6k$  маятника со связью лежит между собственными значениями

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})k \simeq 0.586k, \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})k \simeq 3.14k$$

системы без связи.

Перейдем к общему случаю и рассмотрим малые колебания консервативной системы с  $n$  степенями свободы вблизи устойчивого положения равновесия  $q_1 = \dots = q_n = 0$ . Пусть на такую систему наложена связь, уравнение которой имеет вид

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0,$$

где  $q_1, \dots, q_n$  — обобщенные координаты. Предположим, что  $f(0, \dots, 0) = 0$ . В противном случае система со связью не сможет совершать колебания вблизи этого положения равновесия.

Разложим функцию  $f$  в ряд Тейлора и сохраним в уравнении связи только линейные члены. Уравнение связи примет вид

$$\sum_{j=1}^n b_j q_j = 0, \quad b_j = \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \right)_0 \quad (9.12)$$

Отметим, что члены более высокого порядка были отброшены и при выводе уравнений малых колебаний. Предположим, что не все коэффициенты  $b_j$  в формуле (9.12) обращаются в нуль. Тогда без ограничения общности можно считать, что  $b_n \neq 0$ , ибо обобщенные координаты всегда можно перенумеровать.

В качестве обобщенных координат системы со связью, имеющей  $n - 1$  степень свободы, выберем  $q_1, \dots, q_{n-1}$  и рассмотрим малые колебания этой системы вблизи положения равновесия  $q_1 = \dots = q_{n-1} = 0$ . Подставив

$$q_n = b_n^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_j q_j$$

в отношение Релея для системы без связи

$$R(\mathbf{q}) = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} q_j q_k},$$

получим отношение Релея для системы со связью

$$\tilde{R}(\mathbf{q}) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{c}_{jk} q_j q_k}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{a}_{jk} q_j q_k}.$$

Эти отношения равны, если координаты вектора  $\mathbf{q}$  удовлетворяют уравнению связи (9.12).

Введем вектор

$$\mathbf{l} = A^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$$

и запишем уравнение связи в виде

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{l} = 0 \quad (9.13)$$

Уравнения (9.12) и (9.13) эквивалентны, так как

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{q}^T A A^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{q}^T \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n b_j q_j.$$

Векторы  $\mathbf{q}$ , удовлетворяющие условию ортогональности  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{l} = 0$ , образуют подпространство  $\mathbf{E}^{n-1}$  пространства  $\mathbf{E}^n$ , которое для системы со связью играет такую же роль, как пространство  $\mathbf{E}^n$  для системы без связи.

Отметим, что во всех полученных формулах вектор  $\mathbf{q}$  можно заменить пропорциональным ему вектором  $\mathbf{u}$ . В частности, если вектор  $\mathbf{u}$  удовлетворяет уравнению связи  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0$ , то  $\mathbf{u} \in \mathbf{E}^{n-1}$  и  $R(\mathbf{u}) = \tilde{R}(\mathbf{u})$ .

Различным по направлению векторам  $\mathbf{l}$  соответствуют разные уравнения связей. В случае  $n = 2$  зависимость величины  $\tilde{\lambda}_1$  от  $\mathbf{l}$  можно проследить с помощью геометрической интерпретации аналитических результатов. Рассмотрим эллипс

$$c(\mathbf{u}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1,$$



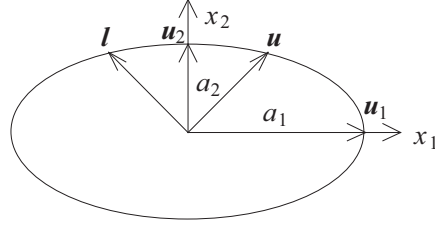


Рис. 9.11. Эллипс.

изображенный на рис. 9.11. Длины его полуосей  $a_1$  и  $a_2$  связаны с собственными числами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  следующими формулами  $a_1^2 = 1/\lambda_1$ ,  $a_2^2 = 1/\lambda_2$ . Пусть конец вектора  $\mathbf{u}$  лежит на эллипсоиде. Тогда  $c(\mathbf{u}) = 1$ ,

$$a_2^2 \leq \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \leq a_1^2.$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a(\mathbf{u})$ , получаем неравенство

$$a_2^2 \leq a(\mathbf{u})/c(\mathbf{u}) \leq a_1^2,$$

из которого вытекает, что

$$\lambda_1 \leq R(\mathbf{u}) \leq \lambda_2.$$

Если  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0$ , то  $R(\mathbf{u}) = \tilde{R}(\mathbf{u}) = \tilde{\lambda}_1(\mathbf{l})$ , и следовательно, для любого вектора  $\mathbf{l}$  выполняется неравенство

$$\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1(\mathbf{l}) \leq \lambda_2. \quad (9.14)$$

### 9.9. Теорема Релея. Максиминимальные свойства частот

Докажем, что неравенство (9.14) имеет место для любой консервативной системы с  $n$  степенями свободы, совершающей малые колебания около устойчивого положения равновесия.

Из экстремального свойства первой частоты системы со связью следует, что

$$\tilde{\lambda}_1 = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{E}^{n-1}} \tilde{R}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{E}^{n-1}} R(\mathbf{u}).$$

Учитывая, что

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{E}^n} R(\mathbf{u}),$$

а  $\mathbf{E}^{n-1} \subset \mathbf{E}^n$ , получаем неравенство  $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$ . Для доказательства неравенства (9.14) осталось показать, что  $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2$ .

Рассмотрим единичный вектор

$$\mathbf{u}_* = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2,$$

ортогональный вектору  $\mathbf{l}$ . Здесь  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  — две первые ортонормированные формы колебаний системы без связи. Вектор  $\mathbf{u}_*$  существует, так как система уравнений для определения его координат

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{l} + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{l} = 0$$

имеет решение при любых  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ .

Неравенство

$$R(\mathbf{u}_*) \geq \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0} R(\mathbf{u}) = \tilde{\lambda}_1$$

выполняется ввиду того, что  $\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{l} = 0$ . С другой стороны, принимая во внимание, что  $c(\mathbf{u}_*) = B\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_*$ ,  $a(\mathbf{u}_*) = \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_* = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}_*) &= c(\mathbf{u}_*)/a(\mathbf{u}_*) = B\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_* = B(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) \cdot (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \\ &= (\lambda_1 \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \mathbf{u}_2) \cdot (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 \leq \lambda_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \lambda_2. \end{aligned}$$

Следствием неравенств  $\tilde{\lambda}_1 \leq R(\mathbf{u}_*)$  и  $R(\mathbf{u}_*) \leq \lambda_2$  является неравенство

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_2. \quad (9.15)$$

Тем самым доказательство соотношения (9.14) завершено.

Двойное неравенство (9.14) следует из теоремы Релея, которая приводится ниже без доказательства. В идейном отношении доказательство теоремы Релея мало отличается от доказательства неравенства (9.14).

**Теорема Релея.**

Если на консервативную систему с  $n$  степенями свободы, совершающую малые колебания около устойчивого положения равновесия  $q_1 = \dots = q_n = 0$ , наложено  $s$  связей, уравнения которых имеют вид  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{l}_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , где  $\mathbf{l}_j$  — линейно независимые векторы, то

$$\omega_k \leq \tilde{\omega}_k \leq \omega_{k+s}, \quad k = 1, 2, \dots, n-s,$$

где  $\omega_1, \dots, \omega_n$  и  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{n-s}$  частоты колебаний исходной системы и системы со связями.

Ввиду того, что  $\lambda_k = \omega_k^2$ ,  $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\omega}_k^2$ , неравенства для частот в теореме Релея эквивалентны неравенствам для собственных значений:

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k \leq \lambda_{k+s}, \quad k = 1, 2, \dots, n-s \quad (9.16)$$

При  $k = s = 1$  неравенство (9.16) превращается в неравенство (9.14). В случае одной связи ( $s = 1$ ) из теоремы Релея следует, что частоты системы со связью разделяют частоты колебаний системы без связи:

$$\omega_1 \leq \tilde{\omega}_1 \leq \omega_2 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \dots \tilde{\omega}_{n-1} \leq \omega_n.$$

Следствием (9.16) является неравенство

$$\tilde{\lambda}_1(\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_s) \leq \lambda_{s+1}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

которое вместе с равенством

$$\tilde{\lambda}_1(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j = 0} R(\mathbf{u}) = \lambda_{s+1}, \quad j = 1, \dots, s \quad s = 1, \dots, n-1$$

позволяет дать следующее максиминимальное определение для собственных значений

$$\lambda_{s+1} = \max_{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_s} \tilde{\lambda}_1(\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_s) = \max_{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_s} \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{l}_j = 0} R(\mathbf{u}), \quad j = 1, \dots, s, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

С помощью максиминимального определения можно исследовать влияние изменения инерции и жесткости механической системы на частоты ее колебаний.

В отношении Релея  $R = c/a$  квадратичная форма  $c$  характеризует жесткость системы, а квадратичная форма  $a$  — ее инерцию. Рассмотрим вторую систему, жесткость и инерция которой определяются квадратичными формами  $c'$  и  $a'$ . Пусть вторая система имеет такую же инерцию, как и первая, а ее жесткость больше, чем жесткость первой системы, т.е.  $a' = a$ ,  $c' > c$ . Тогда отношение Релея для второй системы будет больше, чем для первой:

$$R' = c'/a' > c/a = R.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\lambda'_1 = \min_{\mathbf{u}} R'(\mathbf{u}) \geq \min_{\mathbf{u}} R(\mathbf{u}) = \lambda_1.$$

Следовательно, при увеличении жесткости первая частота увеличивается или не изменяется. Если же  $a' > a$ ,  $c' = c$ , то  $R' < R$ ,  $\lambda'_1 \leq \lambda_1$ , т.е. при увеличении инерции первая частота уменьшается или сохраняет прежнее значение.

Попытка сравнить таким же способом другие частоты, используя их экстремальные свойства, не дает результата. Так, например, в случае  $R' < R$  с помощью формул

$$\lambda'_2 = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'_1 = 0} R'(\mathbf{u}), \quad \lambda_2 = \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 = 0} R(\mathbf{u})$$

нельзя определить, какое из собственных значений больше, так как, вообще говоря,  $\mathbf{u}'_1 \neq \mathbf{u}_1$ , и минимумы в выражениях для  $\lambda'_2$  и  $\lambda_2$  ищутся на разных множествах.

В то же время, использование формул

$$\lambda'_2 = \max_{\mathbf{l}} \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0} R'(\mathbf{u}), \quad \lambda_2 = \max_{\mathbf{l}} \min_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0} R(\mathbf{u})$$

позволяет сделать вывод, что в рассматриваемом случае  $\lambda'_2 \leq \lambda_2$ .

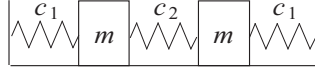


Рис. 9.12. Два груза на горизонтальной плоскости.

С помощью максиминимального определения нетрудно установить, что изменение инерции и жесткости оказывает на все  $n$  частот такое же влияние как на первую частоту. При увеличении жесткости и сохранении инерции частоты не уменьшаются, при увеличении инерции и сохранении жесткости частоты не увеличиваются.

В качестве примера рассмотрим колебания системы с двумя степенями свободы, изображенной на рис. 9.12. Выбрав в качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  смещения грузов от положения равновесия по горизонтали, получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}[c_1 q_1^2 + c_2(q_2 - q_1)^2 + c_1 q_2^2].$$

Симметрия рассматриваемой колебательной системы позволяет ввести ее нормальные координаты  $x_1$  и  $x_2$  по формулам

$$q_1 = x_1 + x_2, \quad q_2 = x_1 - x_2.$$

В новых переменных кинетическая и потенциальная энергии приобретают диагональный вид

$$T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad \Pi = c_1 x_1^2 + (c_1 + 2c_2)x_2^2,$$

а система уравнений малых колебаний распадается на два независимых уравнения

$$m\ddot{x}_1 + c_1 x_1 = 0, \quad m\ddot{x}_2 + (c_1 + 2c_2)x_2 = 0.$$

Следовательно, собственные значения определяются по формулам

$$\lambda_1 = c_1/m, \quad \lambda_2 = (c_1 + 2c_2)/m.$$

При увеличении массы  $m$  инерция увеличивается, и обе частоты  $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$  и  $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$  уменьшаются. Если увеличить жесткость крайних пружин  $c_1$ , то увеличатся обе частоты. С увеличением жесткости  $c_2$  средней пружины вторая частота растет, а первая не меняется. Это связано с тем, что при колебаниях по первой форме  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$  средняя пружина не деформируется, так как оба груза смещаются в одну сторону на одинаковое расстояние.

### 9.10. Вынужденные колебания

Пусть на систему с  $n$  степенями свободы, совершающую малые колебания вблизи устойчивого положения равновесия  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , действуют обобщенные силы  $Q_j(t)$ . В этом случае уравнения малых колебаний имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j.$$

Используя квадратичные формы

$$a = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} q_j q_k, \quad c = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k,$$

уравнения можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial a}{\partial q_j} + \frac{\partial c}{\partial q_j} \right) = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Выберем в качестве новых обобщенных координат нормальные координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Замена переменных

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{u}_k \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T,$$

где  $\mathbf{u}_k$  — ортонормированные формы колебаний, приводит квадратичные формы  $a$  и  $c$  к диагональному виду:

$$a = \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad c = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2. \quad (9.17)$$

В новых переменных уравнения колебаний принимаю вид

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial a}{\partial x_k} + \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) = X_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.18)$$

где  $X_k$  — обобщенные силы, соответствующие нормальным координатам, причем

$$X_k = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \mathbf{F} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial q_j}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_k} \right)^T \mathbf{Q} = \mathbf{u}_k^T \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T.$$

Подстановка выражений (9.17) в уравнения (9.18) с учетом равенств  $\lambda_k = \omega_k^2$  дает  $n$  независимых уравнений

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = X_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.19)$$

Общие решения уравнений (9.19) имеют вид

$$x_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t X_k(\tau) \sin(\omega_k(t - \tau)) d\tau.$$

Рассмотрим важный частный случай, когда внешние силы  $Q_j$ , действующие на систему, являются гармоническими функциями:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B} \sin pt, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T.$$

В этом случае

$$X_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{B} \sin pt.$$

Введем вектор  $\mathbf{D} = A^{-1} \mathbf{B}$ , где  $A = \{a_{jk}\}$ . Тогда

$$X_k = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D} \sin pt,$$

так как

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{B} = \mathbf{u}_k^T A \mathbf{D} = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D}.$$

Подставив выражение для  $X_k$  в уравнение (9.19), получим

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D} \sin pt, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.20)$$

При  $p \neq \omega_k$ , общее решение уравнения (9.20) имеет вид

$$x_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) + \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D}}{\omega_k^2 - p^2} \sin pt.$$

Ввиду наличия сопротивления свободные колебания в действительности с течением времени затухают (переходной режим) и остаются только вынужденные (стационарный режим):

$$x_k = \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D}}{\omega_k^2 - p^2} \sin pt.$$

Возвращаясь к старым координатам (9.17), получим частное решение  $\mathbf{q}^*$  в виде

$$\mathbf{q}^* = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D}}{\omega_k^2 - p^2} \mathbf{u}_k \sin pt = \mathbf{A}^* \sin pt,$$

где

$$\mathbf{A}^* = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{D}}{\omega_k^2 - p^2} \mathbf{u}_k \quad \text{— амплитудный вектор.}$$

Если  $p \simeq \omega_j$  (случай резонанса), а  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{D} \neq 0$ , то

$$\mathbf{A}^* \simeq \frac{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{D}}{\omega_j^2 - p^2} \mathbf{u}_j.$$

Следовательно, при резонансе амплитудный вектор пропорционален форме колебаний  $\mathbf{u}_j$ , соответствующей частоте  $\omega_j$ .

Если  $\mathbf{D} = \mathbf{u}_j$ , то

$$\mathbf{A}^* = \frac{u_j^2}{\omega_j^2 - p^2} \mathbf{u}_j,$$

так как  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = 0$  при  $j \neq k$ . Условие  $\mathbf{D} = \mathbf{u}_j$  редко выполняется на практике, в то время как резонанс довольно часто встречается в природе и технике.

Амплитудный вектор  $\mathbf{A}^*$  можно найти, если известны частоты и формы свободных колебаний. В том случае, когда нас интересуют только вынужденные колебания, удобнее определять амплитудный вектор путем непосредственного решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = B_j \sin pt.$$

Подставив в нее решение  $q_j = A_j \sin pt$ , получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n (c_{jk} - p^2 a_{jk}) A_j = B_j$$

для определения координат вектора  $\mathbf{A}^*$ . Если  $p \neq \omega_k$ , то определитель этой системы не равен нулю, и она имеет единственное решение.

### 9.11. Динамический гаситель колебаний

Во многих случаях колебания приводят к негативным последствиям. Результатом вибрации может быть сильный шум, сбой в работе приборов и оборудования и даже их разрушение. Наиболее опасны резонансные колебания, имеющие большую амплитуду. В некоторых случаях удается избежать резонансов путем изменения собственных частот конструкции. Кроме того, для уменьшения амплитуды колебаний используются устройства, называемые гасителями колебаний. Принцип работы одного из таких устройств — динамического гасителя колебаний, объясняется в данном разделе.

Рассмотрим груз массой  $m_1$  соединенный пружиной жесткостью  $c_1$  с неподвижным основанием, и совершающий вертикальные колебания под действием периодической силы  $Q = B \sin pt$  (рис. 9.13). В случае резонанса, т. е. при  $p^2 = \omega^2 = c_1/m_1$ , возникают интенсивные колебания этого

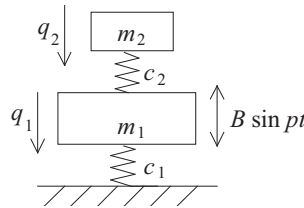


Рис. 9.13. Динамический гаситель колебаний.

груза.

Если присоединить к рассматриваемой системе динамический гаситель колебаний, состоящий из груза массой  $m_2$  и пружины жесткостью  $c_2$  (см. рис. 9.13), то можно подобрать параметры  $m_2$  и  $c_2$  так, чтобы максимально уменьшить амплитуду колебания первого груза при  $p^2 = c_1/m_1$ .

В качестве обобщенных координат введем отклонения грузов вниз от положений равновесия  $q_1$  и  $q_2$ . Тогда уравнения вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы, изображенной на рис. 9.13, имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= B \sin pt \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы и найдем коэффициенты уравнений (9.21):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{jk} \dot{q}_k^2 = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2),$$

$$a_{11} = m_1, \quad a_{22} = m_2, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$\Pi = \frac{c_1}{2} (\delta_1 + q_1)^2 + \frac{c_2}{2} (\delta_2 + q_2 - q_1)^2 - m_1 g q_1 - m_2 g q_2$$

Здесь  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — статические удлинения, которые являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \text{при } q_1 = q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_1 (\delta_1 + q_1) - c_2 (\delta_2 + q_2 - q_1) - m_1 g, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = c_2 (\delta_2 + q_2 - q_1) - m_2 g,$$

$$c_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = c_1 + c_2, \quad c_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = c_2, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -c_2$$

Уравнения (9.21) примут вид:

$$m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = B \sin pt$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - c_2 q_1 + c_2 q_2 = 0$$

Их частное решение ищем в виде:  $q_1 = A_1 \sin pt$ ,  $q_2 = A_2 \sin pt$ . Решая систему линейных уравнений

$$(c_1 + c_2 - m_1 p^2) A_1 - c_2 A_2 = B, \quad -c_2 A_1 + (c_2 - p^2 m_2) A_2 = 0,$$

получаем формулы для амплитуд

$$A_1 = \frac{(c_2 - p^2 m_2) B}{D}, \quad A_2 = \frac{B c_2}{D}, \quad D = (c_1 + c_2 - p^2 m_1)(c_2 - p^2 m_2) - c_2^2,$$

которые годятся в случае  $D \neq 0$ , т. е. при отсутствии резонанса.

Предположим, что мы хотим погасить колебания с частотой  $p^2 = c_1/m_1$ , т. е. подобрать параметры гасителя так, чтобы  $A_1 = 0$  при  $p^2 = c_1/m_1$ . Это произойдет при  $p^2 = c_2/m_2 = c_1/m_1$ . При этом  $D = -c_2^2$ ,  $A_2 = -B/c_2$ . Желательно, чтобы масса гасителя  $m_2$  была мала, но тогда будет мала жесткость  $c_2$  и велика амплитуда  $A_2$ . В результате пружина гасителя может сломаться. Поэтому подбор параметров гасителя начинают с выбора амплитуды  $A_2$ .

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) для системы с одной степенью свободы, представляющей собой груз на пружине без гасителя приведена на рис. 9.14.

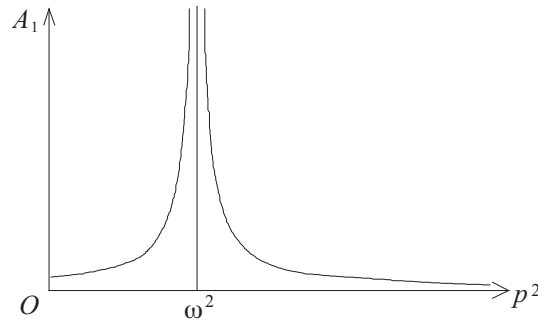


Рис. 9.14. АЧХ груза без гасителя.

В виду того, что сопротивление не учитывается, при  $p \rightarrow \omega$  амплитуда колебаний груза стремится к бесконечности. После добавления гасителя получаем систему с двумя степенями свободы. Ее амплитудно-частотная характеристика для случая  $c_2/m_2 = c_1/m_1$  изображена на рис. 9.15.

При  $p = \omega$  амплитуда колебаний груза  $A_1$  равна нулю, однако при  $p \neq \omega$  амплитуда колебаний  $A_1$  может быть большой. Представляет интерес задача определения параметров гасителя, работающего во всем интервале изменения частот. При выборе параметров такого гасителя следует учитывать силы сопротивления.

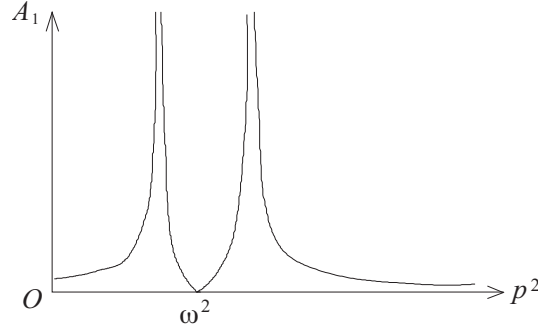


Рис. 9.15. АЧХ груза с гасителем.

### 9.12. Свободные колебания при наличии сопротивления

Пусть на систему с  $n$  степенями свободы, совершающую малые колебания относительно устойчивого положения равновесия  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , действуют диссипативные силы

$$Q_j = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

где функция Релея  $R$  является положительно определенной квадратичной формой,  $B_{jk} = B_{kj}$ . Разложим функцию  $R$  ряд Тейлора в окрестности положения равновесия:

$$R = R_0 + \dots, \quad R_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad b_{jk} = B_{jk}(0, \dots, 0).$$

Квадратичная форма

$$b = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

также как и квадратичные формы  $a$  и  $c$ , является симметричной и положительно определенной. Уравнения малых колебаний при наличии сопротивления имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial R_0}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0$$

и будем искать их решение в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{\mu t}.$$

Для определения  $\mathbf{u}$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\mathbf{u} = 0, \tag{9.22}$$

которая имеет нетривиальное решение, если

$$\det(A\mu^2 + B\mu + C) = 0 \tag{9.23}$$

Уравнение (9.23) для определения  $\mu$  степени  $2n$  имеет  $2n$  корней  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}$ . Каждому корню  $\mu_k$  соответствует нетривиальное решение  $\mathbf{u}_k$  системы уравнений (9.22). Если уравнение (9.23) не имеет кратных корней, то векторы  $\mathbf{u}_k$  линейно независимы и общее решение системы уравнений малых колебаний имеет вид

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{2n} C_k \mathbf{u}_k e^{\mu_k t}.$$

Покажем, что для любого корня  $\mu = \gamma + i\delta$  уравнения (9.23) выполняется неравенство  $\operatorname{Re}(\mu) = \gamma < 0$ . Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$  — соответствующее  $\mu$  нетривиальное решение системы уравнений (9.22). Тогда имеет место тождество

$$(A\mu^2 + B\mu + C)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = 0.$$

Умножив это тождество слева на  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - i\mathbf{w}^T$ , получим

$$p\mu^2 + q\mu + r = 0, \quad (9.24)$$

где

$$p = (\mathbf{v} - i\mathbf{w})^T A(\mathbf{v} + i\mathbf{w}), \quad q = (\mathbf{v} - i\mathbf{w})^T B(\mathbf{v} + i\mathbf{w}), \quad r = (\mathbf{v} - i\mathbf{w})^T C(\mathbf{v} + i\mathbf{w}),$$

причем  $v^2 + w^2 \neq 0$ .

Преобразуем выражение для  $p$ :

$$p = \mathbf{v}^T A\mathbf{v} - i\mathbf{w}^T A\mathbf{v} + i\mathbf{v}^T A\mathbf{w} + \mathbf{w}^T A\mathbf{w}.$$

Благодаря симметрии квадратичной формы  $a$  имеет место равенство  $\mathbf{w}^T A\mathbf{v} = \mathbf{v}^T A\mathbf{w}$ . Следовательно, в силу положительной определенности квадратичной формы  $a$  и условия  $v^2 + w^2 \neq 0$

$$p = \mathbf{v}^T A\mathbf{v} + \mathbf{w}^T A\mathbf{w} = a(\mathbf{v}) + a(\mathbf{w}) > 0.$$

Ввиду того, что квадратичные формы  $b$  и  $c$  тоже симметричные и положительно определенные, аналогичным образом получаем, что

$$q = b(\mathbf{v}) + b(\mathbf{w}) > 0, \quad r = c(\mathbf{v}) + c(\mathbf{w}) > 0.$$

Число  $\mu$  совпадает с одним из корней уравнения (9.24)

$$\mu_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}, \quad \mu_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}.$$

Если  $q^2 - 4pr < 0$ , то оба корня имеют отрицательную вещественную часть, так как  $p > 0$  и  $q > 0$ . Если  $q^2 - 4pr > 0$ , то  $\sqrt{q^2 - 4pr} < q$  благодаря тому, что  $p > 0$ ,  $r > 0$ , и оба корня отрицательны, так как  $q > 0$ . Следовательно,  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  при  $k = 1, 2, \dots, 2n$  и общее решение

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{2n} C_k \mathbf{u}_k e^{\mu_k t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

т. е. свободные колебания затухают.

При малом сопротивлении коэффициент  $q$  в уравнении (9.24) мал и корни  $\mu_k$  являются комплексными. Комплексное общее решение  $\mathbf{q}$  можно преобразовать к вещественному виду.

Уравнение (9.23) имеет вещественные коэффициенты, поэтому его комплексные корни образуют комплексно сопряженные пары. Рассмотрим два линейно независимых решения, соответствующих комплексно сопряженным корням  $\gamma + i\delta$  и  $\gamma - i\delta$ :

$$\mathbf{q}^+ = (\mathbf{v} + i\mathbf{w})e^{(\gamma+i\delta)t}, \quad \mathbf{q}^- = (\mathbf{v} - i\mathbf{w})e^{(\gamma-i\delta)t}$$

Линейную комбинацию решений  $\mathbf{q}^+$  и  $\mathbf{q}^-$  в общем решении можно заменить линейной комбинацией двух вещественных решений

$$\frac{\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-}{2} = e^{\gamma t}(\mathbf{v} \cos \delta t - \mathbf{w} \sin \delta t), \quad \frac{\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-}{2i} = e^{\gamma t}(\mathbf{v} \sin \delta t + \mathbf{w} \cos \delta t).$$

Выполнив такую замену для всех комплексных корней, получим вещественное общее решение.

### 9.13. Вынужденные колебания при наличии сопротивления

Уравнения вынужденных колебаний системы с  $n$  степенями свободы при наличии сопротивления имеют вид

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.25)$$



Общее решение системы (9.25) есть сумма затухающего общего решения однородной системы уравнений, построенного в предыдущем параграфе, и частного решения неоднородной системы.

Найдем частное решение системы (9.25) в случае гармонических сил, когда

$$Q_j = D_j \sin pt \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Запишем систему (9.25) в векторном виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{D} \sin pt, \quad (9.26)$$

где

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T, \quad \mathbf{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)^T.$$

Учитывая, что

$$\sin pt = \frac{e^{ipt} - e^{-ipt}}{2i}$$

рассмотрим две системы уравнений

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{D}e^{ipt}, \quad A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{D}e^{-ipt}. \quad (9.27)$$

Пусть  $\mathbf{q}^+$  и  $\mathbf{q}^-$  — частные решения первой и второй систем. Тогда частное решение системы (9.26)

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-}{2i}.$$

Решения первой и второй систем (9.27) ищем в виде  $\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{ipt}$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{-ipt}$ . Для определения компонент векторов  $\mathbf{u}$  получаем две системы линейных неоднородных уравнений

$$(-Ap^2 + ipB + C)\mathbf{u} = \mathbf{D}, \quad (-Ap^2 - ipB + C)\mathbf{u} = \mathbf{D}. \quad (9.28)$$

Если  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$  — решение первой системы (9.28), то решением второй системы является вектор  $\mathbf{u}^- = \mathbf{v} - i\mathbf{w}$ , так вторая система получается из первой заменой  $i$  на  $-i$ .

Следовательно, частное решение системы (9.26) имеет вид

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{u}^+ e^{ipt} - \mathbf{u}^- e^{-ipt}}{2i} = \frac{(\mathbf{v} + i\mathbf{w})e^{ipt} - (\mathbf{v} - i\mathbf{w})e^{-ipt}}{2i} = \mathbf{v} \sin pt + \mathbf{w} \cos pt, \quad (9.29)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  — вещественная и мнимая части решения  $\mathbf{u}^+$  первой системы (9.28).

Рассмотрим вынужденные колебания динамического гасителя колебаний с учетом сил сопротивления. Найдем частное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 + (c_1 + c_2)q_1 - c_2 q_2 &= D \sin pt \\ m_2 \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 + c_2 q_2 - c_2 q_1 &= 0, \end{aligned}$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — коэффициенты сопротивления,  $D$  — амплитуда внешней силы, а остальные обозначение такие же, как в разделе 9.11.

Для рассматриваемого примера первая система (9.28) принимает вид

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 p^2 + ipb_1)u_1 - c_2 u_2 &= D, \\ -c_2 u_1 + (c_2 - m_2 p^2 + ipb_2)u_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — координаты вектора  $\mathbf{u}$ . Ее решение получаем по формулам Крамера:

$$u_1 = v_1 + iw_1 = \frac{D(c_2 - m_2 p^2 + ipb_2)}{\Delta}, \quad u_2 = v_2 + iw_2 = \frac{Dc_2}{\Delta},$$

в которых

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta + i\gamma, \quad \delta = (c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2 - b_1 b_2 p^2 \\ \gamma &= (c_1 + c_2 - m_1 p^2)pb_2 + (c_2 - m_2 p^2)pb_1. \end{aligned}$$

Умножив числители и знаменатели выражений для  $u_1$  и  $u_2$  на  $\delta - i\gamma$ , определяем  $v_1$ ,  $w_1$  и  $v_2$ ,  $w_2$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= D \frac{\delta(c_2 - m_2 p^2) + \gamma b_2 p}{\delta^2 + \gamma^2}, \quad v_2 = D \frac{\delta c_2}{\delta^2 + \gamma^2} \\ w_1 &= D \frac{\delta b_2 p - \gamma(c_2 - m_2 p^2)}{\delta^2 + \gamma^2}, \quad w_2 = -D \frac{\gamma c_2}{\delta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Решение задачи о вынужденных колебаниях динамического гасителя колебаний с учетом сил сопротивления находим с помощью формулы (9.29):

$$q_1 = v_1 \sin pt + w_1 \cos pt, \quad q_2 = v_2 \sin pt + w_2 \cos pt.$$

## Оглавление

<b>9</b>	<b>Малые колебания</b>	<b>1</b>
9.1.	Теорема Лангранжа об устойчивости положения равновесия . . . . .	1
9.2.	Колебания системы с одной степенью свободы . . . . .	3
9.3.	Уравнения колебаний системы с $n$ степенями свободы . . . . .	5
9.4.	Колебания двойного маятника . . . . .	7
9.5.	Ортогональность форм колебаний. Нормальные координаты . . . . .	9
9.6.	Экстремальные свойства частот . . . . .	12
9.7.	Метод Релея . . . . .	13
9.8.	Колебания при наличии связи . . . . .	15
9.9.	Теорема Релея. Максимиимальные свойства частот . . . . .	17
9.10.	Вынужденные колебания . . . . .	19
9.11.	Динамический гаситель колебаний . . . . .	21
9.12.	Свободные колебания при наличии сопротивления . . . . .	23
9.13.	Вынужденные колебания при наличии сопротивления . . . . .	24